
3 3433 06274657 7



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Neununddreissigster Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1862.

Inhaltsverzeichniss des neununddreissigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber den Inhalt der Kugel und verwandter Körper.

Von

Herrn Professor Dr. *Wittstein*

in Hannover.

§. 1.

Die Inhaltsbestimmung der Kugel, welche wir dem Archimedes verdanken, wurde von Archimedes so ausgeführt, dass er die Kugel mit zwei Rotationskörpern verglich, welche durch Umdrehung eines dem grössten Kreise der Kugel eingeschriebenen und umschriebenen regelmässigen Polygons zu Stande kommen, und aus derselben Vergleichung fand Archimedes auch die Oberfläche der Kugel. Dieser Weg, der etwas Umständliches hat, wird von den heutigen elementaren Lehrbüchern nur selten eingeschlagen (ich finde ihn z. B., sehr vereinfacht, in der Geometrie von Heis und Eschweiler), vielmehr pflegt man die Sache auf eine der beiden folgenden Arten abzukürzen. Entweder man behält von der Archimedischen Entwickelung nur die Bestimmung der Kugeloberfläche, als die leichtere, bei, und geht von da zum Inhalte durch den Satz über, dass die Kugel inhaltsgleich einer Pyramide ist, welche die Oberfläche der Pyramide zur Grundfläche und den Radius zur Höhe hat. Oder man verlässt den Archimedischen Weg ganz und stellt die Halbkugel direct als die Differenz zwischen einem Cylinder und einem Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe dar, indem die Inhaltsgleichheit dadurch nachgewiesen wird, dass in der Halbkugel und in dem um den Kegel verminderten Cylider jede zwei in gleichen Abständen von der Grundfläche gelegte parallele Schnitte inhaltsgleiche Figuren hervorbringen.

Diesen letztenGang, welcher für den Anfänger den Vorzug der Einfachheit und grösseren Anschaulichkeit zu besitzen scheint, habe

ich auch in meiner „Stereometrie“ (Hannover 1862) eingeschlagen. Inzwischen habe ich seit dem Drucke dieses Buchs erkannt, dass die Entwickelung noch einer weiteren Vereinfachung fähig ist. Man kann den um einen Kegel verminderten Cylinder ganz entbehren und statt dessen geradezu ein von Ebenen begrenztes Polyeder angeben, dem die Kugel direct als inhaltsgleich nachgewiesen werden kann. Um dies auszuführen, muss ich die folgenden Begriffe aus meiner „Stereometrie“ als bekannt voraussetzen.

§. 2.

Unter einem Prismatoid verstehe ich ein Polyeder, welches von zwei parallelen Polygonen, die ausserdem vollkommen unabhängig von einander sind, als Grundflächen, und im Allgemeinen von Dreiecken, welche mit je einer Grundfläche eine Seite und mit der anderen einen Eckpunkt gemein haben, als Seitenflächen begrenzt wird.

In besonderen Fällen können irgend zwei benachbarte Dreiecke, welche nach dieser Definition die Seitenflächen des Prismatoids bilden, in eine Ebene fallen und sich zu einem Trapez oder Parallelogramm vereinigen. Dies geschieht immer da, wo zwei correspondirende Seiten der beiden Grundflächen parallel sind.

Nennt man G und g die beiden Grundflächen, D die in halber Höhe parallel den beiden Grundflächen gelegte mittlere Durchnittsfläche, und h die Höhe, so ist allgemein der Inhalt des Prismatoids

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} + 2D\right).$$

Diese Formel enthält das Prisma und die Pyramide als besondere Fälle unter sich; für das Prisma hat man zu setzen $g = G$ und $D = G$, für die Pyramide $g = 0$ und $D = \frac{1}{4}G$. Ebenso fällt der Obelisk unter diese Formel. Von den weiteren Unterarten, welche diese Formel in sich begreift, kommen hier hauptsächlich die beiden folgenden in Betracht.

Wenn eine Grundfläche des Prismatoids sich auf eine Kante reducirt, so nenne ich den Körper einen Sphenisken. Jene Kante mag die Schneide des Sphenisken heissen. Der Inhalt des Sphenisken ergiebt sich, wenn man in der allgemeinen Formel für das Prismatoid $g = 0$ setzt, also

$$I = \frac{h}{3}(\tfrac{1}{2}G + 2D).$$

Der einfachste Sphenisk ist derjenige, dessen Grundfläche ein Parallelogramm und dessen Schneide parallel mit zwei Seiten der Grundfläche ist. Alle der Grundfläche parallel gelegte Durchschnittsflächen dieses Sphenisken, insbesondere also auch die mittlere Durchschnittsfläche, sind gleichfalls Parallelogramme, welche mit der Grundfläche gleiche Winkel haben. Es könnte zweckmässig sein, diesen Sphenisken durch eine besondere Benennung auszuzeichnen (etwa Parallel-Sphenisk); doch wird zum wenigsten hier nicht leicht ein Irrthum entstehen, da in dem Folgenden nur Sphenisken dieser einfachsten Art zur Betrachtung kommen.

Wenn beide Grundflächen des Prismatoids sich auf Kanten reduciren, so entsteht ein Tetraeder. Jene beiden Kanten mögen auch hier die Schneiden des Tetraeders heissen, der senkrechte Abstand derselben ist die Höhe des Tetraeders. Der Inhalt des Tetraeders in derjenigen Auffassung, unter welcher der Körper hier erscheint, wird gefunden, wenn man in der allgemeinen Formel für das Prismatoid $G=0$ und $g=0$ setzt, also

$$I = \frac{h}{3} \cdot 2D.$$

Die mittlere Durchschnittsfläche des Tetraeders ist ein Parallelogramm, von welchem zwei Seiten parallel je einer Schneide des Tetraeders und halb so lang als dieselbe sind. Die vier Eckpunkte desselben halbiren die vier Seitenkanten des Tetraeders. Alle anderen den beiden Schneiden oder der mittleren Durchschnittsfläche parallel gelegte Durchschnittsflächen des Tetraeders sind gleichfalls Parallelogramme, welche mit der mittleren Durchschnittsfläche gleiche Winkel haben.

Die mittlere Durchnittsfläche zertheilt das Tetraeder in zwei Sphenisken von einerlei Grundfläche und gleichen Höhen, von denen ausserdem leicht bewiesen werden kann, dass sie inhaltsgleich sind.

§. 3.

Wenn am Tetraeder die mittlere Durchnittsfläche und die Höhe in der so eben entwickelten Bedeutung genommen werden, so kann man allgemein den folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz. Eine Kugel ist an Inhalt einem Tetrae-

dergleich, dessen mittlere Durchschnittsfläche gleich einem grössten Kreise der Kugel und dessen Höhe gleich einem Durchmesser der Kugel ist.

Beweis. Taf. I. Fig. 1. Es sei $ABCD$ die Kugel, AB ein grösster Kreis derselben, CD ein darauf senkrechter Durchmesser, und P der Mittelpunkt der Kugel.

Ferner sei $EFGH$ das Tetraeder, EF und GH die beiden Schneiden desselben, IK das auf beiden errichtete gemeinschaftliche Perpendikel oder die Höhe des Tetraeders, und $LMNO$ die mittlere Durchschnittsfläche des Tetraeders, welche in Q von dem Perpendikel IK geschnitten wird und dasselbe halbirt.

Nach der Voraussetzung ist sodann

$$LMNO = AB$$

$$IK = CD$$

und aus dieser Voraussetzung soll bewiesen werden, dass die beiden Körper inhaltsgleich sind.

Zu dem Ende nehme man in den beiden Körpern einen beliebigen Abstand $Pp = Qq$ an und lege durch die Punkte p und q die Durchschnittsfläche $ab \parallel AB$ und $lmno \parallel LMNO$. Alsdann hat man:

1) in der Kugel

$$AB : ab = AP^2 : ap^2,$$

oder da ap die mittlere Proportionale zwischen Cp und Dp ist:

$$AB : ab = AP^2 : Cp . Dp; \qquad (1)$$

2) im Tetraeder

$$LM : lm = EL : El = IQ : Iq$$

$$LO : lo = GL : Gl = KQ : Kq$$

und da Parallelogramme, welche einen gleichen Winkel haben, sich verhalten wie die Producte der diesen Winkel einschliessenden Seiten, so folgt weiter

$$LMNO : lmno = IQ . KQ = Iq . Kq. \qquad (2)$$

Nun sind nach Voraussetzung und Construction in den beiden Proportionen (1) und (2) das erste, dritte und vierte Glied beziehungsweise gleich gross; folglich muss man auch haben

$$lmno = ab.$$

Da dieser Schluss gültig bleibt, wie gross man auch den Abstand $Pp = Qq$ oberhalb oder unterhalb der mittleren Durchschnittsfläche annehmen mag, so folgt daraus auf bekannte Weise, dass die beiden Körper inhaltsgleich sind, w. z. b. w.

Anmerkung. Will man diesen Lehrsatz durch ein Modell veranschaulichen, so nimmt man am besten die mittlere Durchschnittsfläche $LMNO$ als Quadrat an und die vier Seitenkanten gleich gross. Alsdann wird, den Kugelhalbmesser $= r$ gesetzt,

$$EF = GH = 2r\sqrt{\pi}$$

$$EG = EH = FG = FH = 2r\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}.$$

Das Tetraeder wird also kein reguläres.

Z. B. $r = 31$ Millimeter giebt $EF = 110{,}0$ Mm., $EG = 99{,}5$ Mm. Daraus kann man das Netz des Tetraeders leicht herstellen.

§. 4.

Der vorstehende Lehrsatz zeigt, dass die Kugel in Betreff ihrer Inhaltsbestimmung sich genau der allgemeinen Formel für das Prismatoid unterordnet, wobei es dann natürlich einerlei bleibt, ob man diese Formel in ihrer Allgemeinheit oder in der für das Tetraeder schon vereinfachten Gestalt anwenden will. Nennt man r den Halbmesser der Kugel, so hat man in der allgemeinen Formel §. 2 zu setzen $G = 0$, $g = 0$, $D = r^2\pi$, $h = 2r$ woraus für den Inhalt der Kugel sich der bekannte Ausdruck ergiebt

$$I = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Aber aus dem Gange des vorigen Beweises folgt zugleich, dass auch der Kugelabschnitt, so wie das von zwei parallelen Ebenen begrenzte Kugelstück hinsichtlich der Inhaltsbestimmung wie ein Prismatoid aufgefasst werden darf. Denn die Schlüsse dieses Beweises bleiben vollständig bestehen, wenn sie auch nicht auf die ganze dem Kugeldurchmesser gleiche Höhe ausgedehnt, sondern nur auf einen beliebigen Theil dieser Höhe beschränkt werden, wobei das inhaltsgleiche Prismatoid in dem einen der angegebenen Fälle ein Sphenisk, in dem anderen ein Obelisk wird.

Um hiernach z. B. den Inhalt des Kugelabschnitts zu bestim-

men, sei r der Halbmesser der Kugel und h die Höhe des Kugelabschnitts. Die Grundfläche ist ein Kreis, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen h und $2r-h$ ist, mithin

$$G = h(2r-h)\pi.$$

Die mittlere Durchschnittsfläche ist ebenso ein Kreis, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen $\frac{h}{2}$ und $2r-\frac{h}{2}$ ist, oder

$$D = \frac{h}{2}(2r-\frac{h}{2})\pi.$$

Ueberdies ist $g=0$ zu setzen, d. h. der Körper wie ein Sphenisk zu behandeln. Durch Einsetzung dieser Werthe in die allgemeine Formel des §. 2 erhält man für den Inhalt des Kugelabschnitts

$$I = \frac{h}{3}\left[\frac{h}{2}(2r-h)\pi + h(2r-\frac{h}{2})\pi\right]$$

d. i.

$$I = \pi h^2(r-\frac{h}{3}). \qquad (1)$$

Will man in der Formel für I den Halbmesser r, welcher an dem Kugelabschnitt nicht direct gemessen werden kann, nicht haben, so kann man dafür den Halbmesser der Grundfläche einführen, welcher a sei. Aus dem schon Gesagten hat man

$$a^2 = h(2r-h)$$

und wenn man hieraus den Werth von r entnimmt und denselben in (1) substituirt, so erhält man für den Inhalt des Kugelabschnitts die Formel

$$I = \frac{\pi h}{2}(a^2+\frac{h^2}{3}). \qquad (2)$$

Die Inhaltsbestimmung eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Kugelstücks liefert weniger elegante Formeln und wird deshalb auch gewöhnlich in den Lehrbüchern übergangen. Das Vorstehende bietet aber zum wenigsten das Mittel dar, um auch diesen Inhalt direct und vollkommen allgemein zu bestimmen.

§. 5.

Wenn man über den Standpunkt der elementaren Stereometrie hinausgeht, so erscheint der Kugelabschnitt als besonderer Fall

eines **Konoids**, dessen Grundfläche ein Kreis oder eine Ellipse ist, dessen Achse rechtwinklig auf der Grundfläche steht, und dessen Achsenschnitte sämmtlich Kegelschnitte von einerlei Hauptachse sind, welche ihren Scheitel im Scheitel des Konoids haben. Dieses Konoid ist demnach entweder ein Rotations- oder dreiachsiges Ellipsoid, oder ein Rotations- oder elliptisches Paraboloid, oder ein Rotations- oder elliptisches Hyperboloid à deux nappes*). Von allen diesen Konoiden lässt sich beweisen, dass sie gleichwie Kugel und Kugelabschnitt in Beziehung auf Inhaltsbestimmung sich vollständig und genau der allgemeinen Formel für das Prismatoid unterordnen.

Es kann nämlich gezeigt werden, dass jedes dieser Konoide inhaltsgleich einem Sphenisken von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ist, wenn nur der Schneide dieses Sphenisken, welche mit zwei Seiten seiner Grundfläche parallel ist, eine angemessene Länge gegeben wird.

1) Für das Ellipsoid.

Taf. I. Fig. 2. Es sei ACF Abschnitt eines Ellipsoids, dessen Grundfläche $ABCD$ eine Ellipse mit den beiden Achsen AC und BD, dessen Höhe EF, und dessen Achsenschnitte FA, FB u.s.w. Ellipsen sind, welche die Linie FX zur grossen Achse haben.

Ferner sei $GHIKLM$ ein Sphenisk, dessen vier Seitenflächen, über die Grundfläche $GHIK$ hinaus verlängert, das Tetraeder $LMNO$ hervorbringen. In diesem Tetraeder sei QR das gemeinschaftliche Perpendikel auf den beiden Schneiden LM und NO, welches die Grundfläche $GHIK$ in P durchschneidet.

Es werde angenommen

$$GHIK = ABCD$$
$$PQ = EF$$
$$QR = FX.$$

Legt man in einem beliebigen Abstande $Ee = Pp$ von den beiden Grundflächen die Durchschnittsflächen $abcd \parallel ABCD$ und $ghik \parallel GHIK$, so hat man nach der Natur der Ellipse

$$AE^2 : ae^2 = XE.FE : Xe.Fe$$
$$BE^2 : be^2 = XE.FE : Xe.Fe$$

*) Dass das Hyperboloid à une nappe zu den Prismatoiden gehört, habe ich schon, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, in der Schrift: „Das Prismatoid" (Hannover 1860) nachgewiesen.

und da die Flächen zweier Ellipsen sich wie die Producte ihrer Halbachsen verhalten, so folgt

$$ABCD : abcd = XE.FE : Xe.Fe. \qquad (1)$$

Ferner ist im Sphenisken (wie §. 3)

$$GH : gh = RP : Rp$$
$$GK : gk = QP : Qp$$

woraus folgt

$$GHIK : ghik = RP.QP : Rp.Qp. \qquad (2)$$

Aus diesen beiden Proportionen (1) und (2) ergiebt sich wie im §. 3

$$ghik = abcd$$

und daraus folgt auf bekannte Weise die Inhaltsgleichheit der beiden Körper.

2) Für das Paraboloid.

Taf. I. Fig. 3. Die Figur werde dahin abgeändert, dass ACF (Taf. I. Fig. 2) ein Paraboloid bedeutet, dessen Achsenschnitte FA, FB u. s. w. mithin Parabeln sind, welche die unbegrenzte Linie FE zur gemeinschaftlichen Achse haben. In dem Sphenisken $GHIKLM$ (Taf. I. Fig. 3) seien die Dreiecksflächen GKL und HIM parallel.

Es werde angenommen

$$GHIK = ABCD$$
$$PQ = EF.$$

Legt man in einem beliebigen Abstande $Ee = Pp$ von den beiden Grundflächen die Durchschnittsflächen $abcd \parallel ABCD$ und $ghik \parallel GHIK$, so hat man nach der Natur der Parabel

$$AE^2 : ae^2 = FE : Fe$$
$$BE^2 : be^2 = FE : Fe$$

woraus wie oben folgt:

$$ABCD : abcd = FE : Fe. \qquad (1)$$

Ferner ist im Sphenisken

$$GH = gh$$
$$GK : gk = QP : Qp,$$

mithin:

$$GHIK : ghik = QP : Qp. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$ghik = abcd$$

und daraus die Inhaltsgleichheit der beiden Körper.

3) Für das Hyperboloid.

Taf. I. Fig. 4. Die Figur werde dahin abgeändert, dass *ACF* (Taf. I. Fig. 2) ein Hyperboloid bedeutet, dessen Achsenschnitte *FA, FB* u. s. w. Hyperbeln sind, welche die Linie *FY* zur grossen Achse haben. An dem Sphenisken *GHIKLM* (Taf. I. Fig. 4) mögen die vier Seitenflächen, über die Schneide *LM* hinaus verlängert, das Tetraeder *LMNO* hervorbringen, in welchem *QR* das gemeinschaftliche Perpendikel auf den beiden Schneiden *LM* und *NO* sei, dessen Verlängerung die Grundfläche *GHIK* in *P* rechtwinkelig trifft.

Es werde angenommen

$$GHIK = ABCD$$

$$PQ = EF$$

$$QR = FY.$$

Legt man wieder in einem beliebigen Abstande $Ee = Pp$ von den Grundflächen die Durchschnittsflächen $abcd \parallel ABCD$ und $ghik \parallel GHIK$, so folgt aus der Natur der Hyperbel

$$AE^2 : ae^2 = YE.FE : Ye.Fe$$

$$BE^2 : be^2 = YE.FE : Ye.Fe$$

und daraus wie oben:

$$ABCD : abcd = YE.FE : Ye.Fe. \qquad (1)$$

Ferner ist im Sphenisken

$$GH : gh = RP : Rp$$

$$GK : gk = QP : Qp$$

mithin:

$$GHIK : ghik = RP.QP. Rp.Qp. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$ghik = abcd$$

und daraus wieder die Inhaltsgleichheit der beiden Körper.

§. 6.

Eine Vergleichung unter den Sphenisken, welche den vorbezeichneten Konoiden inhaltsgleich sind, lässt sofort erkennen, dass

1) für das Ellipsoid, jede der beiden Seiten der Grundfläche des Sphenisken, welche der Schneide parallel sind, kleiner als die Schneide;

2) für das Paraboloid, jede dieser beiden Seiten der Grundfläche gleich der Schneide; und

3) für das Hyperboloid, jede dieser beiden Seiten der Grundfläche grösser als die Schneide des Sphenisken ist.

Diese Beziehung erinnert augenfällig an die Entstehung der Benennungen der Kegelschnitte aus ἔλλειψις (Mangel), παραβολή (Gleichheit), ὑπερβολή (Uebermass). Es würde selbst nicht unmöglich sein, geradezu hieraus die Kegelschnitte zu definiren.

Ferner folgt aus der genannten Vergleichung, dass von allen vorbezeichneten Konoiden über einerlei Grundfläche und von gleichen Höhen das Ellipsoid den grössten, und das Hyperboloid den kleinsten Inhalt hat. Das Ellipsoid wird desto grösser, je kleiner die gemeinschaftliche grosse Achse der Achsenschnitte angenommen wird, und kann jeden beliebig grossen Werth erreichen, hat also kein Maximum. Das Hyperboloid dagegen wird desto kleiner, je kleiner die gemeinschaftliche grosse Achse der Achsenschnitte genommen wird, und hat zum Minimum einen Kegel von derselben Grundfläche und Höhe.

Was die Berechnung der Inhalte selbst betrifft, so bedarf man dazu offenbar der Sphenisken nicht weiter, sondern kann die betreffenden Dimensionen an dem Konoid selbst nehmen und in die Formel des §. 2 setzen. Wird die Grundfläche G und die Höhe h als bekannt vorausgesetzt, so handelt es sich wesentlich nur noch um die Kenntniss der mittleren Durchschnittsfläche D. Man kann dieselbe gleichfalls direct messen, was man immer vorziehen wird, wenn über die Natur der Achsenschnitte des Konoids nichts Näheres bekannt ist. Man kann sie aber auch aus diesen Achsenschnitten berechnen, wozu in jedem der drei Fälle eine der mit (1) bezeichneten Proportionen des vorigen Paragraphen gebraucht werden kann, wie folgt.

Im Ellipsoid sei $2a$ die gemeinschaftliche Hauptachse der Achsenschnitte. Dann hat man

$$G : D = h(2a - h) : \frac{h}{2}(2a - \frac{h}{2}),$$

folglich

$$D = \frac{G}{4} \cdot \frac{4a - h}{2a - h}$$

und

$$I = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3a - h}{2a - h}.$$

Für $h = a$, oder das halbe Ellipsoid, erhält man hieraus *)

$$I = \frac{2Ga}{3},$$

oder wenn man mit b und c die beiden anderen Halbachsen des Ellipsoids bezeichnet, wodurch $G = bc\pi$ wird,

$$I = \frac{2abc\pi}{3}.$$

Die Verdoppelung hiervon giebt das ganze Ellipsoid. Man kann dasselbe aber auch direct haben, wenn man $G = 0$, $D = bc\pi$ und $h = 2a$ setzt.

Im Paraboloid hat man

$$G : D = h : \frac{h}{2},$$

folglich

$$D = \frac{G}{2}$$

und

$$I = \frac{Gh}{2}.$$

Im Hyperboloid sei $2a$ die gemeinschaftliche Hauptaxe der Achsenschnitte. Dann wird

$$G : D = h(2a + h) : \frac{h}{2}(2a + \frac{h}{2}),$$

folglich:

$$D = \frac{G}{4} \cdot \frac{4a + h}{2a + h}$$

und

*) Im halben Ellipsoid ist $D = \frac{3}{4} G$, im Paraboloid (s. unten) $D = \frac{1}{2} G$, im Kegel $D = \frac{1}{4} G$, welche Zusammenstellung auch nicht ohne Interesse sein mag.

$$I = \frac{Gh}{3} \cdot \frac{3a+h}{2a+h}$$

Es wird kaum der Bemerkung bedürfen, dass der Inhalt des abgestumpften Konoids, welches durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene als zweite Grundfläche begrenzt wird, gleichfalls genau nach der allgemeinen Formel des Prismatoids berechnet werden kann. Ein Beispiel dazu giebt die bekannte Lambert'sche Formel für den Inhalt eines Fasses:

$$I = \frac{h}{3}(G + 2D),$$

wo G die Bodenfläche, D die mittlere Durchschnittsfläche und h die Länge des Fasses bedeuten. Diese Formel ist nach dem Vorhergehenden vollkommen streng, wenn das Fass wie ein an den beiden Enden um gleiche Grössen abgestumpftes Ellipsoid angesehen werden kann.

II.

Der Kreisabschnitt und die Simpson'sche Formel.

Von

Herrn Professor Dr. *Wittstein*

in Hannover

Der Kreisabschnitt pflegt in den Elementarbüchern der Geometrie sehr stiefmütterlich behandelt zu werden. Wenn man bewiesen hat, das der Kreisausschnitt einem Dreiecke gleich ist, welches den Bogen zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat, so pflegt man fortzufahren: der Inhalt des Kreisabschnitts wird gefunden, wenn man von dem Kreisausschnitte das Dreieck subtrahirt, welches durch die Sehne und zwei Halbmesser gebildet wird; und damit wird der Gegenstand verlassen.

Es sei r der Halbmesser, b der Bogen, a die Sehne und h der Pfeil des Kreisabschnitts. Dann wird also sein Inhalt durch die Differenz ausgedrückt

$$I = \frac{br}{2} - \frac{a(r-h)}{2} \tag{1}$$

und damit die Sache als erledigt angenommen.

Diese Kürze hat allerdings ihre guten Gründe. Die vier Grössen, welche die Formel (1) zur Inhaltsbestimmung des Kreisabschnitts fordert, sind nicht unabhängig von einander; zwei derselben müssen hinreichen, um daraus die beiden anderen zu bestimmen. Aber die Ableitung ist, was den Bogen b anlangt, in den Elementen unausführbar, denn sie setzt trigonometrische Begriffe voraus.

Wenn z. B., wie gewöhnlich, die Sehne a und der Pfeil h gegeben sind, so kann man den Halbmesser r aus der Gleichung bestimmen

$$\frac{a^2}{4} = h(2r-h).$$

Was dagegen den Bogen b anlangt, so sei φ der ihm zugehörige Centriwinkel. Alsdann muss man zur Bestimmung von φ eine der drei Gleichungen anwenden

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2r}, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{r-h}{r}, \quad \tang\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2(r-h)}$$

und erhält daraus b durch die Proportion

$$360^0 : \varphi = 2r\pi : b.$$

Diese Rechnung kann natürlich in den Elementen der Planimetrie keinen Raum finden.

Nichts desto weniger scheint es, dass man auch schon in den Elementen, welche keine Trigonometrie voraussetzen, in der Inhaltsbestimmung des Kreisabschnitts weiter gehen könne als dies bisher üblich gewesen ist. Ich werde hier eine Entwickelung mittheilen, welche ich in die zweite Auflage meiner „Planimetrie" (Hannover 1862) aufgenommen habe und für deren Zulassung in die elementaren Lehrbücher hauptsächlich die beiden folgenden Umstände sprechen dürften:

1) Sie giebt schon dem Anfänger ein sehr instructives Beispiel der Exhaustions-Methode, welche sonst, nach

dem Vorgange des Archimedes, erst bei der Quadratur der Parabel gelehrt wird, also für Gymnasialschüler selten oder niemals.

2) Sie macht es möglich, die Simpson'sche Formel für Flächenberechnungen, deren Aufnahme in die Elemente so wünschenswerth ist, schon hier abzuleiten, während dieselbe sonst nur unter Voraussetzung der Quadratur der Parabel bewiesen wird.

§. 2.

Die Gleichung (1) lässt sich umformen in

$$I = \frac{ah}{2} + \frac{(b-a)r}{2} \qquad (2)$$

und deutet in dieser Gestalt schon den Weg an, welchen die Exhaustion der vorliegenden Fläche zu nehmen hat, wenn der Bogen b vermieden werden soll.

Taf. I. Fig. 5. Man beschreibe in den Kreisabschnitt das gleichschenkelige Dreieck ABC, welches die Sehne $AB = a$ zur Grundlinie und den Pfeil $CD = h$ zur Höhe hat. Der Inhalt dieses Dreiecks ist $\frac{ah}{2}$.

In die beiden übrig gebliebenen Kreisabschnitte beschreibe man wieder die gleichschenkeligen Dreiecke ACE und CBF, welche die Sehne $AC = CB = a_1$ zur Grundlinie und den Pfeil $EG = FH = h_1$ zur Höhe haben. Der Inhalt dieser beiden Dreiecke ist $= 2 . \frac{a_1 h_1}{2}$.

In die vier nun noch übrigen Kreisabschnitte beschreibe man wieder ebenso gleichschenkelige Dreiecke, welche in der Figur nicht weiter angezeigt sind, und nehme die Sehne $AE = a_2$ zur Grundlinie und den zugehörigen Pfeil $= h_2$ zur Höhe. Der Inhalt dieser vier Dreiecke ist $= 4 . \frac{a_2 h_2}{2}$.

Fährt man so weiter fort, bezeichnet Sehne und Pfeil der nun folgenden acht Kreisabschnitte mit a_3 und h_3 u.s.w. und addirt alle Dreiecke, so erhält man den Inhalt des Kreisabschnitts durch die unendliche Reihe ausgedrückt:

$$I = \frac{ah}{2} + 2 . \frac{a_1 h_1}{2} + 4 . \frac{a_2 h_2}{2} + 8 . \frac{a_3 h_3}{2} + \ldots \qquad (3)$$

Diese Reihe nimmt eine elegantere Gestalt an, wenn man statt der Werthe h, h_1, h_2 u. s. w. den Halbmesser r einführt. Man hat nämlich, wie unmittelbar aus der Figur zu schliessen ist,

$$h = \frac{a_1^2}{2r}, \quad h_1 = \frac{a_2^2}{2r}, \quad h_2 = \frac{a_3^2}{2r}, \text{u. s. w.}$$

und die Substitution dieser Werthe giebt die Reihe:

$$I = \frac{aa_1^2}{4r} + 2.\frac{a_1 a_2^2}{4r} + 4.\frac{a_2 a_3^2}{4r} + 8.\frac{a_3 a_4^2}{4r} + \ldots \qquad (4)$$

Um nach dieser Formel den Inhalt des Kreisabschnitts zu berechnen, bedarf es der Kenntniss der Werthe a_1, a_2, a_3, u. s. w Diese Werthe entstehen aber successive aus einander auf dieselbe Weise, wie aus der Seite eines eingeschriebenen regelmässigen Polygons die Seite des eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl hergeleitet wird, oder es ist

$$a_1 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

$$a_2 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_1^2}{4}}}$$

u. s. w u. s. w..

Wenn eine genaue Zeichnung des Kreisabschnitts vorliegt, wie es in den technischen Anwendungen bei Gewölben, Brückenbogen u. s. w. der Fall zu sein pflegt, so kann man kürzer die Werthe von a_1, a_2, a_3, u. s. w. aus der Zeichnung nehmen.

In der numerischen Rechnung bricht die unendliche Reihe immer von selbst da ab, wo ihre Glieder so klein werden, dass sie zu der letzten in Betracht zu ziehenden Decimalstelle keinen Beitrag mehr geben.

§. 3.

Die hier entwickelte Formel (4) für die Inhaltsberechnung des Kreisabschnitts ist im Allgemeinen einer Zusammenziehung in einen geschlossenen Ausdruck nicht fähig. Dies ist jedoch in einem besonderen Falle möglich, den die Praxis sehr häufig darbietet, nämlich wenn der Kreisabschnitt sehr flach, d. h. wenn der Pfeil des Kreisabschnitts im Vergleich mit seiner Sehne sehr klein ist.

Wenn CD sehr klein ist im Vergleich mit AB, so ist AC wenig grösser als AD, und man kann mithin angenähert setzen

$$a_1 = \frac{a}{2}$$

und folglich um so mehr auch

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a}{4}, \quad a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{a}{8}, \text{ u.s.w.}$$

Setzt man diese Werthe in (4), so kommt,

$$I = \frac{a^3}{16r} + \frac{a^3}{64r} + \frac{a^3}{256r} + \ldots \tag{5}$$

$$= \frac{a^3}{16r}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots).$$

Der hier vor der Klammer stehende Factor $\frac{a^3}{16r}$ ist einerlei mit $\frac{ah}{2}$, wie aus der Vergleichung mit (3) unmittelbar hervorgeht, und die eingeklammerte Reihe hat zur Summe $= \frac{4}{3}$. Mithin ist endlich

$$I = \frac{2ah}{3}, \tag{6}$$

d. h. der Inhalt eines sehr flachen Kreisabschnitts beträgt zwei Drittel eines Rechtecks, welches die Sehne des Kreisabschnitts zur Grundlinie und den Pfeil desselben zur Höhe hat.

Diese Formel findet man sonst aus der Theorie der Parabel durch die Betrachtung, dass der Bogen einer Parabel in der Nähe ihres Scheitels mit dem Krümmungskreise des Scheitels als zusammenfallend angesehen werden kann.

Was die Anwendbarkeit der Formel (6) anlangt, so kann man die Frage aufwerfen, wann einem Kreisabschnitte die hier vorausgesetzte Eigenschaft, sehr flach zu sein, zukomme. Diese Frage lässt aus der Vergleichung der beiden Reihen (4) und (5) eine vollkommen präcise Antwort zu. In der Reihe (5) ist jedes Glied genau ein Viertel des vorhergehenden; in der Reihe (4) dagegen ist jedes Glied im Allgemeinen grösser als ein Viertel des vorhergehenden, und reducirt sich nur dann gleichfalls auf ein Viertel des vorhergehenden, wenn diese Reihe in (5) übergeht. Wenn man demnach die beiden ersten Glieder der Reihe (4) in Zahlen berechnet und das zweite Glied mit hinreichender Genauigkeit gleich einem Viertel des ersten findet, so ist die Voraussetzung

erfüllt, auf welcher die Formel (6) ruht, und man darf mithin die Inhaltsberechnung nach dieser Formel ausführen.

Wenn aber das zweite Glied der Reihe (4) nicht gleich einem Viertel des ersten sich ergiebt, so muss man nach dieser allgemeinen Reihe zu rechnen fortfahren, kann aber zum wenigsten den Schluss der Rechnung in die Formel (6) überleiten. Denn man wird in der Reihe (4) jedenfalls früher oder später zu einer Stelle gelangen, von welcher angefangen jedes Glied hinreichend genau gleich einem Viertel des vorhergehenden ist; wenn man das erste dieser Glieder um seinen dritten Theil vergrössert, so hat man sofort die vollständige Summe.

Beiläufig werde bemerkt, dass man, wenn I gefunden, hinterher auch im Stande ist, die Bogenlänge des Kreisabschnitts zu berechnen. Denn man hat nur nöthig den Werth von I in die Gleichung (1) oder (2) zu setzen und diese für b aufzulösen. So insbesondere giebt die Gleichsetzung der beiden Werthe (2) und (6) für die Bogenlänge b eines sehr flachen Kreisabschnitts den bemerkenswerthen Ausdruck:

$$b = a(1 + \frac{h}{3r}).$$

§. 4.

Aus der Formel (6) lässt sich die Simpson'sche Formel ableiten, welche von sehr vielfältigem Gebrauche ist, um angenähert den Inhalt einer durch eine beliebige krumme Linie begrenzten Fläche zu berechnen.

Taf. I. Fig. 6. Es sei AB eine beliebige krumme Linie, welche eine Fläche begrenzt, und XY eine willkürlich angenommene Abscissenlinie, auf welcher in gleichen Abständen $XC = CD$ vorläufig die drei rechtwinkeligen Ordinaten XA, CL, DM errichtet sind. Die Abstände dieser Ordinaten seien so klein genommen, dass der Bogen ALM keine zu starke Krümmung hat. Man setze $XC = CD = \alpha$ und $XA = y$, $CL = y_1$, $DM = y_2$.

Zieht man die gerade Linie AM, so wird durch dieselbe das zwischen den Ordinaten XA und DM enthaltene Flächenstück in das Trapez $XDMA$ und das Segment AML zerlegt. Das Trapez $XDMA$, dessen parallele Seiten y und y_2 sind und dessen Höhe $= 2\alpha$ ist, hat den Inhalt

$$\alpha(y + y_2).$$

Die Mittellinie dieses Trapez beträgt $CK = \frac{y + y_2}{2}$, folglich ist

$$KL = y_1 - \frac{y + y_2}{2}.$$

Um den Inhalt des Segments AML zu bestimmen, mache man $CZ = KL$ und denke sich durch die Punkte X, Z, D eine krumme Linie gelegt, welche ein Segment XDZ von demselben Inhalte wie AML hervorbringt. Dieses Segment XDZ kann man angenähert wie einen Kreisabschnitt ansehen, dessen Pfeil im Vergleich mit seiner Sehne klein ist. Die Sehne dieses Kreisabschnitts ist $= 2\alpha$, der Pfeil $= y_1 - \frac{y + y_2}{2}$, und mithin nach (6) sein Inhalt

$$\frac{4\alpha}{3}(y_1 - \frac{y + y_2}{2}).$$

Durch Addition der beiden gefundenen Werthe erhält man für den Inhalt des Flächenstücks $XDMLA$

$$I = \alpha(y + y_2) + \frac{4\alpha}{3}(y_1 - \frac{y + y_2}{2})$$

d. i.

$$I = \frac{\alpha}{3}(y + 4y_1 + y_2). \qquad (7)$$

Sollte der Bogen ALM seine convexe Seite nicht, wie in der Figur, nach oben, sondern nach unten wenden, d. h. $CL < CK$ sein, so lässt sich durch entsprechende Abänderung der Figur zeigen, dass der Ausdruck für I in (7) dessen ungeachtet derselbe wird.

Es seien nun solcher Theile wie $XC = CD = \alpha$ auf der Abscissenlinie XY beliebig viele, jedoch in gerader Anzahl vorhanden, und die entsprechenden Ordinaten seien der Reihe nach

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_{2n-2},\ y_{2n-1},\ y_{2n}.$$

Alsdann erscheint die ganze zwischen den Ordinaten y und y_{2n} enthaltene Fläche wie eine Summe von Flächenstücken, deren Inhalte nach der Formel (7) zu berechnen sind. Mithin erhält man für die ganze Fläche den Ausdruck:

$$I = \frac{\alpha}{3}(y + 4y_1 + y_2) + \frac{\alpha}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{\alpha}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

d. i.

$$I = \frac{\alpha}{3}(y + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_3 + \ldots 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

welches die Simson'sche Formel ist.

III.

Ueber die der Ellipse parallele Curve und die dem Ellipsoid parallele Fläche.

Von

Herrn Dr. *Wilhelm* **Fiedler**,

Lehrer der darstellenden Geometrie u. d. Gewerbeschule zu Chemnitz.

---

1. Im VI. Zusatze zu meiner deutschen Ausgabe von Rev. Salmon's „Treatise on Conic Sections" („Analytische Geometrie der Kegelschnitte" p. 598—604) und nachher habe ich, den brieflichen Andeutungen des trefflichen Gelehrten nachgebend, Folgerungen aus der Betrachtung der Discriminante der Gleichung

$$kS + S_1 = 0$$

mitgetheilt (p. 602), welche sich den Art. 362—367 des Werkes anschliessen; sie galten einer Gruppe von Sätzen über Kegelschnitte, zu deren Entdeckung der Satz von Faure: „die Länge der Tangente, welche man vom Centrum einer Ellipse an den umschriebenen Kreis eines in Bezug auf sie sich selbst conjugirten Dreiecks ziehen kann, ist der Länge der Sehne des elliptischen Quadranten gleich" (Nouvelles Annales de Mathématiques 1860. 524 p. 234) die Anregung gab. Ich knüpfte diese Folgerungen an andre Betrachtungen über die geometrische Bedeutung der Discriminante an, in welchen diese Letztere besonders zur Bestimmung der Enveloppen von geraden Linien und der Oerter von Punkten benutzt ward. Im Hinblick auf diese schloss ich die Entwickelungen über die obige Gleichung für

$$S = 0$$

als Gleichung eines Kreises mit der Bemerkung, die ich mir hier zu wiederholen erlaube: „Endlich knüpfen wir diese Entwickelungen an die erste Betrachtung dieses Zusatzes, indem wir bemerken, dass die Discriminante der Gleichung

$$k^4 . r^2 + k^3 . \frac{\left\{ \begin{array}{c} a^2b^2c^2 + a^2\alpha^2(b^2+c^2) + b^2\beta^2(c^2+a^2) + c^2\gamma^2(a^2+b^2) \\ -(a^2b^2+b^2c^2+ca^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2) \end{array} \right\}}{a^2b^2c^2}$$

$$+ k^2 . \frac{\left\{ \begin{array}{c} (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + (a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2) \\ -(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2) \end{array} \right\}}{a^2b^2c^2}$$

$$+ k . \frac{(a^2+b^2+c^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2} = 0$$

in Bezug auf die Veränderliche k ist die Gleichung der zum betrachteten Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

parallelen Oberfläche, d. i. die Gleichung der Oberfläche, deren auf den Normalen des Ellipsoids gemessener Abstand von diesem Letzteren unveränderlich und $= r$ ist.

Indem ich darauf zurückkomme, schliesse ich zugleich die von Cayley von andern Grundlagen aus neuestens gegebenen Entwickelungen über denselben Gegenstand an. (Man vergleiche „Annali di Matematica da B. Tortolini", t. III, p. 311 u. 345.)

2. Die Richtigkeit der ausgesprochenen Sätze zuerst erweist sich leicht. Denn was den ersten anbelangt, so repräsentirt bekanntlich die Discriminante der Gleichung

$$k[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2] + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

welche in der oben gegebenen Form erhalten wird, und an den angeführten Orten in der kürzeren Gestalt

$$k^3 . \Delta + k^2 . \Theta + k . \Theta_1 + \Delta_1 = 0$$

geschrieben worden ist, die auch hier beibehalten werden soll, das System der drei Paare von geraden Linien, welche durch die vier Durchschnittspunkte des Kreises

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$$

mit dem Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

hindurch gehen, oder die Gegenseitenpaare und das Diagonalenpaar des gemeinschaftlichen eingeschriebenen Vierecks.

Für den Fall, dass zwei dieser Paare von geraden Linien in eins zusammenfallen, oder dass von den vier Durchschnittspunkten der beiden Curven zwei in einem vereinigt sind*), d. h. wenn Berührung zwischen ihnen stattfindet, muss jene durch die Gleichsetzung der Discriminante mit Null erhaltene Gleichung

$$k^3.\Delta + k^2.\Theta + k.\Theta_1 + \Delta_1 = 0$$

ein Paar gleiche Wurzeln in k haben, d. h. ihre nach der Veränderlichen k gebildete Discriminante muss selbst mit Null gleich sein. Diese Discriminante wird durch die Elimination aus den partiellen Differentialen der homogen gedachten Gleichung, d. i. aus

$$3\Delta k^2 + 2\Theta k + \Theta_1 = 0$$
$$\Theta k^2 + 2\Theta_1 k + 3\Delta_1 = 0$$

erhalten, und kann in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} 3\Delta, & 2\Theta, & \Theta_1, & 0 \\ 0, & 3\Delta, & 2\Theta, & \Theta_1 \\ \Theta, & 2\Theta_1, & 3\Delta_1, & 0 \\ 0, & \Theta, & 2\Theta_1, & 3\Delta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\Theta^2\Theta_1^2 + 18\Delta\Delta_1\Theta\Theta_1 = 4\Delta\Theta_1^3 + 27\Delta^2\Delta_1^2 + 4\Delta_1\Theta^3,$$

und endlich in der zur Discussion brauchbarsten Form

$$(9\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1)^2 = 4(\Theta^2 - 3\Delta\Theta_1)(\Theta_1^2 - 3\Delta_1\Theta)$$

geschrieben werden.

3. Wenn nun in diese Gleichung die Werthe der Grössen Θ, Θ_1, Δ, Δ_1, wie sie eben gegeben sind, substituirt werden — ich will nur die Coordinaten des Centrums α, β durch ξ, η bezeichnen, um sie als Veränderliche zu characterisiren — so entsteht eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung keine andere ist, als diese: Sie repräsentirt den Ort des Mittelpunkts eines Kreises vom Halbmeser r, welcher die gegebene Ellipse berührt; somit ist sie die allgemeine Gleichung der der Ellipse parallelen Curve.

*) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 364.

Man hat

$$\Delta = a^2b^2r^2, \quad \Theta = a^2b^2 - a^2(\eta^2 - r^2) - b^2(\xi^2 - r^2),$$
$$\Delta_1 = 1, \quad \Theta_1 = a^2 + b^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2);$$

die Substitution liefert also eine Gleichung vom achten Grade in Bezug auf ξ, η, als Gleichung der parallelen Curve. Sie erscheint in der Form

$$[a^2b^2 - a^2(\eta^2 - r^2) - b^2(\xi^2 - r^2)]^2[a^2 + b^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)]^2$$
$$+ 18a^2b^2r^2[a^2b^2 - a^2(\eta^2 - r^2) - b^2(\xi^2 - r^2)][a^2 + b^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)]$$
$$= 4a^2b^2r^2[a^2 + b^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)]^3$$
$$+ 27a^4b^4r^4 + 4[a^2b^2 - a^2(\eta^2 - r^2) - b^2(\xi^2 - r^2)]^3,$$

oder in der anderen

$$[9a^2b^2r^2 - (a^2b^2 - a^2\eta^2 - b^2\xi^2 + a^2r^2 + b^2r^2)(a^2 + b^2 - \xi^2 - \eta^2 + r^2)]^2$$
$$= 4[(a^2b^2 - a^2\eta^2 - b^2\xi^2 + a^2r^2 + b^2r^2)^2 - 3a^2b^2r^2(a^2 + b^2 - \xi^2 - \eta^2 + r^2)]$$
$$\times[(a^2 + b^2 - \xi^2 - \eta^2 + r^2)^2 - 3(a^2b^2 - a^2\eta^2 - b^2\xi^2 + a^2r^2 + b^2r^2)]\,^{*)}.$$

Sie stimmt mit der von Catalan im III. Bde. der „Nouvelles Annales“ von M. Terquem (1844, p. 553) gegebenen überein, welche auf Grund des Beweises von Cauchy im XIII. Bde. der Comptes rendus (p. 1063) entwickelt wurde, dass die Gleichung der parallelen Curve der Ellipse durch die Elimination von θ aus den Gleichungen

---

*) Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass Salmon bereits in seinem „Treatise on the higher plane Curves“ (1852 p. 273—74) eine Lösung des Problems gegeben hat, die von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehend, doch zu einem höchst eleganten Resultate geführt hat. Er untersucht die Curven, welche mit der Ellipse dieselbe Evolute haben und zeigt, dass diese Aufgabe sich auf die Bestimmung der reciproken Curve einer Curve 4. Grades reducirt (Art. 109); er löst sodann aber auch die Aufgabe direct durch die Betrachtung der äquidistanten Tangenten und die Theorie der Enveloppen. (Vergl. p. 98—104 des genannten Werks). Das Resultat, die Gleichung der Parallelcurve, ist in die Form

$$4S^3 = T^2$$

gesetzt, und enthält nach der Natur von S und T allerdings Glieder des zwölften Grades; aber alle von höheren als dem 8. Grade verschwinden in der Entwickelung. Auch die Beziehung der Brennpunkte zur Parallelcurve (siehe unten Art. 10) entgeht Salmon nicht. (p. 274.)

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\theta)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\theta)^2}=1,\qquad \frac{\theta^2x^2}{(a^2+\theta)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(b^2+\theta)^2}=r^2$$

gefunden werden müsse.

Cayley hat bemerkt, dass die verlangte Elimination sich am einfachsten vollzieht, indem man aus den vorigen Gleichungen die neuen bildet

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}=1+\frac{r^2}{\theta},\quad \frac{x^2}{(a^2+\theta)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\theta)^2}=\frac{r^2}{\theta^2}.$$

Hier ist die zweite durch die Differentiation der ersten nach θ erhalten und die verlangte Elimination kommt daher auf die Bildung der Discriminante dieser ersteren zurück, d. i. der Discriminante von

$$(\theta+r^2)(\theta+a^2)(\theta+b^2)-x^2\theta(\theta+b^2)-y^2\theta(\theta+a^2)=0.$$

Man erhält damit genau die obige Gleichung wieder.

4. In vollkommener Analogie knüpft sich die Aufgabe, die parallele Fläche des Ellipsoids zu bestimmen, an die allgemeine Gleichung

$$k^4.\varDelta+k^3.\Theta+k^2.\Omega+k.\Theta_1+\varDelta_1=0,$$

in welcher

$$\varDelta=a^2b^2c^2r^2,\quad \Theta=a^2b^2c^2+(a^2+b^2)c^2\zeta^2+(b^2+c^2)a^2\xi^2+(c^2+a^2)b^2\eta^2$$
$$-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-r^2),$$
$$\varDelta_1=1,\qquad \Omega=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2)$$
$$-(a^2+b^2+c^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-r^2),$$
$$\Theta_1=a^2+b^2+c^2-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-r^2)$$

sind. (Wieder sind, um die Coordinaten des Centrum der Kugel als die Veränderlichen zu characterisiren, die Buchstaben ξ, η, ζ an Stelle von α, β, γ eingeführt worden.)

Soll die Kugel

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-r^2=0$$

das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

berühren, so muss die obige Gleichung in k gleiche

Wurzeln besitzen und ihre Discriminante nach k muss also Null sein.

Man bildet diese Letztere durch Elimination aus

$$4\Delta k^3 + 3\Theta k^2 + 2\Omega k + \Theta_1 = 0,$$
$$\Theta k^3 + 2\Omega k^2 + 3\Theta_1 k + \Delta_1 = 0$$

entweder in Form der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 4\Delta, & 3\Theta, & 2\Omega, & \Theta_1, & 0, & 0 \\ 0, & 4\Delta, & 3\Theta, & 2\Omega, & \Theta_1, & 0 \\ 0, & 0, & 4\Delta, & 3\Theta, & 2\Omega, & \Theta_1 \\ \Theta, & 2\Omega, & 3\Theta_1, & 4\Delta_1, & 0, & 0 \\ 0, & \Theta, & 2\Omega, & 3\Theta_1, & 4\Delta_1, & 0 \\ 0, & 0, & \Theta, & 2\Omega, & 3\Theta_1, & 4\Delta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder in der entwickelten Form

$$256\Delta^3\Delta_1{}^3 + \Theta^2\Theta_1{}^2\Omega^2 + 144\Delta\Delta_1{}^2\Theta^2\Omega + 144\Delta^2\Delta_1\Theta_1{}^2\Omega$$
$$+ 36\Delta_1\Theta^3\Theta_1\Omega + 36\Delta\Theta_1{}^3\Theta\Omega + 16\Delta\Delta_1\Omega^4$$
$$= 4\Theta^3\Theta_1{}^3 + 4\Delta\Theta_1{}^2\Omega^3 + 4\Delta_1\Theta^2\Omega^3 + 27\Delta_1{}^2\Theta^4 + 27\Delta^2\Theta_1{}^4 + 6\Delta\Delta_1\Theta^2\Theta_1{}^2$$
$$+ 192\Delta^2\Delta_1{}^2\Theta\Theta_1 + 128\Delta^2\Delta_1{}^2\Omega^2 + 80\Delta\Delta_1\Theta\Theta_1\Omega^2,$$

und in der brauchbarern reducirten*)

$$4(4\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1 + \frac{\Omega^2}{3})^3$$
$$= \tfrac{1}{27}(72\Delta\Delta_1\Omega + 9\Theta\Theta_1\Omega - 27\Delta\Theta_1{}^2 - 27\Delta_1\Theta_1{}^2 - 2\Omega^3)^2$$

---

*) Man verdankt diese Rednction der Discriminante einer binären Form des vierten Grades den Herren Boole und Cayley. Wenn man sie in der Form

$$[\Delta\Delta_1 - 4\frac{\Theta}{4}\cdot\frac{\Theta_1}{4} + 3\left(\frac{\Omega}{6}\right)^2]^3$$
$$= 27[\Delta\Delta_1\frac{\Omega}{6} + 2\frac{\Theta}{4}\frac{\Theta_1}{4}\frac{\Omega}{6} - \Delta\left(\frac{\Theta_1}{4}\right)^2 - \Delta_1\left(\frac{\Theta}{4}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{6}\right)^3]^2$$

schreibt, so erkennt man darin die von jenen gegebene Relation der Invarianten der gedachten Form

$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = 0,$$
$$(AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2,$$

oder

$$S^3 = 27T^2.$$

Man erkennt daraus leicht, dass die Gleichung der Parallelfläche in ξ, η, ζ von der zehnten Ordnung ist.

5. Ich beabsichtige augenblicklich nicht, in die Discussion derselben einzugehen, aber ich bemerke, dass dieselbe besonders auf der reducirten Form zu verweilen haben wird. Folgende Ergebnisse aus der Theorie der binären biquadratischen Formen gewinnen für dieselbe entscheidende Bedeutung. Für die Form

$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = 0$$

lassen sich beide Invarianten S und T als symmetrische Functionen der Wurzeln ausdrücken; nämlich, wenn die vier aus der Gleichung entspringenden Werthe des Verhältnisses $\frac{x}{y}$ durch α, β, γ, δ bezeichnet werden,

$$S = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2(\delta-\alpha)^2 + (\gamma-\delta)^2(\alpha-\beta)^2,$$

$$T = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\delta) + \ldots.$$

oder:

$$S = \Sigma_3(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2,$$

und ebenso:

$$T = \Sigma_6(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\delta).$$

Es ist nach Salmon's Bemerkung vortheilhafter, diesen letzteren Ausdruck in der Form

$$T = [(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)][(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)-(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]$$
$$\times [(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)]$$

zu schreiben; denn nun erkennt man, dass die Gleichungen

$$S = 0, \qquad T = 0$$

gleichmässig die Bedingung ausdrücken, unter welcher die Gleichung drei gleiche Wurzeln hat; und dass speciell $T = 0$ die Bedingung ausdrückt, unter welcher die vier Wurzeln der Gleichung — durch Punkte einer Geraden oder Strahlen eines Büschels repräsentirt — ein harmonisches System bilden.

6. Cayley gelangt am angeführten Orte zu derselben Gleichung für die Parallelfläche des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1^{*}),$$

indem er zunächst die Coordinaten ξ, η, ζ des Endpunkts der Normale von der Länge r im Punkte (x, y, z) des Ellipsoids durch die Substitution

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\frac{r}{k}$$

in der Form

$$\xi = x(1+\frac{k}{a^2}), \quad \eta = y(1+\frac{k}{b^2}), \quad \zeta = z(1+\frac{k}{c^2})$$

ausdrückt und aus den durch die Substitution dieser Werthe gewonnenen Gleichungen:

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2+k)^2}+\frac{b^2\eta^2}{(b^2+k)^2}+\frac{c^2\zeta^2}{(c^2+k)^2}=1,$$

$$\frac{k^2\xi^2}{(a^2+k)^2}+\frac{k^2\eta^2}{(b^2+k)^2}+\frac{k^2\zeta^2}{(c^2+k)^2}=r^2$$

die folgenden bildet:

$$\frac{\xi^2}{a^2+k}+\frac{\eta^2}{b^2+k}+\frac{\zeta^2}{c^2+k}=1+\frac{r^2}{k},$$

$$\frac{\xi^2}{(a^2+k)^2}+\frac{\eta^2}{(b^2+k)^2}+\frac{\zeta^2}{(c^2+k)^2}=\frac{r^2}{k^2};$$

die zweite derselben ist das in Bezug auf k genommene partielle Differential der ersten und somit die Gleichung der parallelen Fläche des Ellipsoids zu gewinnen, indem man die Discriminante der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2+k}+\frac{\eta^2}{b^2+k}+\frac{\zeta^2}{c^2+k}=1+\frac{r^2}{k}$$

in Bezug auf k bildet und mit Null vergleicht. Die Wegschaffung der Nenner lässt in ihr die Gleichung vierten Grades wiederfinden, welche vorher gefunden ward.

Es ist von Interesse, damit die von Will. Roberts**) ge-

*) Ich reducire überall seine Bezeichnungen auf die hier gebrauchten.

**) M. W. Roberts ist derjenige des bekannten gelehrten Brüderpaares von Dublin, welcher in Terquem's „Annales" unter dem Anagramm Strebor so viele schwierige Probleme der Geometrie und Analysis gelöst hat.

gebene und von Cayley bekannt gemachte Auflösung zu vergleichen. Die Parallelfläche des Ellipsoids kann offenbar gewonnen werden als die Enveloppe aller aus den Punkten der Oberfläche mit einem und demselben Radius r beschriebenen Kugeln. Roberts betrachtet nun zunächst die Ringfläche, welche die gemeinschaftliche Enveloppe der Kugeln ist, deren Centra einen Kreisschnitt des Ellipsoids bilden und geht sodann von ihr erst auf die Parallelfläche selbst über. In der That, nur die Gleichung der den Kreisschnitten entsprechenden Ringfläche ist einfach genug, um die Gleichung ihrer Enveloppe, der Parallelfläche des Ellipsoids, in genügend knapper Form zu erhalten. Für die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

erhält man die Gleichungen:

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2+k)^2}+\frac{b^2\eta^2}{(b^2+k)^2}=1, \qquad \frac{k^2\xi^2}{(a^2+k)^2}+\frac{k^2\eta^2}{(b^2+k)^2}=r^2-z^2$$

und die Gleichung der Ringfläche durch die Discriminante der Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{a^2+k}+\frac{\eta^2}{b^2+k}=1+\frac{r^2-z^2}{k}$$

in Bezug auf k. Sie ist eine cubische Form, reducirt sich aber für $a=b$, oder für die Kreisschnitte, auf eine quadratische Form.

Indem ich mich auf diese Andeutungen beschränke, verweise ich auf die schönen von Cayley über diesen Gegenstand gegebenen Entwickelungen (Annali di Mat. t. III. p. 347).

7. Statt in die Discussion der Parallelfläche des Weiteren einzugehen, will ich die Hauptmomente der Discussion der Parallelcurve der Ellipse bezeichnen. Es wird nöthig sein, dazu nach einander von ihrer Klasse und von ihren Singularitäten, nämlich von Rückkehrpunkten und Doppelpunkten zu handeln, und nützlich, ein Paar specielle Fälle zu erörtern.

Die Parallelcurve der Ellipse ist von der vierten Klasse, d. h. man kann von jedem Punkte ihrer Ebene aus vier Tangenten an sie ziehen. Man beweist diess, indem man die Gleichung der Curven in Tangentialcoordinaten aufstellt; denn dieselbe ist vom vierten Grade in den Veränderlichen.

Die Tangente der Ellipse kann durch den von ihr mit der Hauptachse gebildeten Winkel α in der Form ausgedrückt werden:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)} = 0\,^{*});$$

dann ist unmittelbar

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - r - \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)} = 0$$

die Gleichung der im Abstande r zu ihr parallelen Geraden, d. h. die entsprechende Tangente der Parallelcurve der Ellipse.

Indem man sie durch

$$Xx + Yy + Zz = 0$$

repräsentirt, wo X, Y, Z die Tangentialcoordinaten sind, hat man

$$X : Y : Z = \cos\alpha : \sin\alpha : r + \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)}$$

und findet

$$Z + r\sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{a^2X^2 + b^2Y^2} = 0$$

als Gleichung der Parallelcurve, oder in der von Wurzelgrössen freien Form:

$$[(a^2 - r^2)X^2 + (b^2 - r^2)Y^2]^2 = Z^2[2(a^2 + r^2)X^2 + 2(b^2 + r^2)Y^2 + Z^2],$$

also in der That vom vierten Grade**).

Aber auch die Construction liefert das nämliche Ergebniss. Um von einen gegebenen Punkte aus die Tangenten der Parallelcurve einer gegebenen Ellipse für die Distanz r zwischen beiden zu zeichnen, beschreibt man von diesem Punkte aus mit dem Halbmesser r einen Kreis, zieht die gemeinschaftlichen Tangenten dieses Kreises und der Ellipse, und erhält die verlangten Tangenten in den zu ihnen durch das Centrum des Kreises gezogenen Parallelen; nach dieser Construction kann die Zahl dieser Tangenten nie grösser als vier sein.

---

*) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 179.

**) M. Cayley bemerkt, dass die Normale der Ellipse durch die Gleichung

$$ax\sin\alpha - by\cos\alpha = (a^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha$$

repräsentirt werden kann, und dass man durch Betrachtung der orthogonalen Trajectorie dieser Geraden die Gleichung

$$(xdx + ydy)\sqrt{b^2dx^2 + a^2dy^2} + (a^2 - b^2)dxdy = 0$$

erhält; die Differentialgleichung der Parallelcurve der Ellipse. In das Integral derselben, welches von der achten Ordnung ist, tritt die Grösse r als Constante ein.

8. Indem man bemerkt, dass eine Curve des 8ten Grades im Allgemeinen von der 56. Klasse ist, wird man von selbst zu der Frage nach den Singularitäten der Parallelcurve der Ellipse geführt, welche die entsprechende Erniedrigung der Klassenzahl bewirken.

Sie besitzt zuerst zwölf Rückkehrpunkte oder Spitzen. Sie sind die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Curven vierter Ordnung, welche durch die Factoren der allgemeinen Gleichung der Parallelcurve einzeln dargestellt werden, nämlich der Curven:

$$9\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1 = 0, \quad \Theta^2 - 3\Delta\Theta_1 = 0, \quad \Theta_1{}^2 - 3\Delta_1\Theta = 0.$$

Man erkennt zunächst, dass sie zwölf gemeinschaftliche Durchschnittspuukte besitzen, weil jede dieser drei Gleichungen aus den beiden andern hervorgeht; sodann aber, dass diese Punkte Rückkehrpunkte der Parallelcurve sind, aus der Art und Weise der Verbindung jener drei Gleichungen. In der That, die Form

$$(9\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1)^2 = 4(\Theta^2 - 3\Delta\Theta_1)(\Theta_1{}^2 - 3\Delta_1\Theta)$$

zeigt, dass die Parallelcurve der Ellipse von den Curven

$$\Theta^2 - 3\Delta\Theta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Theta_1{}^2 - 3\Delta_1\Theta = 0$$

in denjenigen Punkten berührt wird, in welchen die Curve

$$9\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1 = 0$$

sie schneidet.

Man erhält die fraglichen Rückkehrpunkte aus diesen Gleichungen selbst, vollkommen direct, indem man aus ihnen die Relationen

$$\Theta = 3(\Delta^2\Delta_1)^{\frac{1}{3}}, \quad \Theta_1 = 3(\Delta\Delta_1{}^2)^{\frac{1}{3}}$$

zieht und die entsprechenden Werthe aus Art. 3. substituirt.

Man hat

$$a^2b^2 - a^2\eta^2 - b^2\xi^2 + (a^2 + b^2)r^2 = 3(abr)^{\frac{4}{3}},$$

$$a^2 + b^2 + r^2 - \xi^2 - \eta^2 = 3(abr)^{\frac{2}{3}}$$

zur Bestimmung der fraglichen Coordinatenwerthe.

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass sie denjenigen Punkten der Ellipse entsprechen, deren Krümmungs-

halbmesser gleich r **ist.** Man beweist diess nach Cayley's Vorgang, indem man durch

$$a\cos\alpha,\quad b\sin\alpha$$

die Coordinaten eines Punktes der Curve*) bezeichnet; denn damit sind die Coordinaten des Krümmungscentrums durch

$$a\xi = (a^2 - b^2)\cos^3\alpha, \qquad b\eta = -(a^2 - b^2)\sin^3\alpha$$

bestimmt, somit ist der Krümmungsradius $= r$, wenn man hat:

$$r = \frac{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

oder:

$$a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = (abr)^{\frac{2}{3}}.$$

Diess giebt:

$$(a^2 - b^2)\cos^2\alpha = a^2 - (abr)^{\frac{2}{3}}, \quad -(a^2 - b^2)\sin^2\alpha = b^2 - (abr)^{\frac{2}{3}};$$

und somit für $\xi^2 + \eta^2$ und $a^2\eta^2 + b^2\xi^2$ Werthe, welche mit den obigen übereinstimmen.

Diese zwölf Punkte sind imaginär, so lange r nicht ein zwischen den Grenzen $\frac{b^2}{a}$ und $\frac{a^2}{b}$ enthaltener Werth ist; ist r aber zwischen diesen Grenzen enthalten, so sind unter ihnen vier reelle und acht imaginäre. Für die Grenzwerthe

$$r = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad r = \frac{a^2}{b}$$

vereinigen sich die reellen Rückkehrpunkte paarweise in zwei respective in der Achse der ξ und der η gelegenen Punkten.

Indem man hierzu bemerkt, dass die den zwölf Rückkehrpunkten entsprechende Reduction der Klassenzahl $= 36$ ist, erkennt man, dass mit ihnen die Singularitäten der Curve nicht erschöpft sind.

9. Aber die Form der allgemeinen Gleichung gestattet, leicht darzuthun, dass die Curve überdiess **acht Doppelpunkte** enthält; da diese die Klassenzahl der Curve um weitere 16 Einheiten reduciren, so erkennt man durch die Identität

$$56 - 36 - 16 = 4,$$

*) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 231 f. Art. 245.

dass die betrachtete Curve andere Singularitäten nicht haben kann.

Von jenen Doppelpunkten werden am leichtesten aus der allgemeinen Gleichung erkannt die vier, welche der unendlich entfernten Geraden angehören; es sind einmal die imaginären Kreispunkte, welche die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = 0$$

bestimmt, sodann aber die durch

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = 0$$

in unendlicher Entfernung bestimmten Punkte.

Ausser diesen aber gehören den Achsen der Ellipse je zwei symmetrisch gelegene Doppelpunkte an, wie man erkennt, wenn man durch die Substitutionen

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

die Achsenschnittpunkte der Curve bestimmt. Denn diesen entsprechen die Gleichungen:

$$[(\eta - b)^2 - r^2][(\eta + b)^2 + r^2][a^2\eta^2 - (a^2 - b^2)(r^2 - a^2)]^2 = 0,$$
$$[(\xi - a)^2 - r^2][(\xi + a)^2 + r^2][b^2\xi^2 - (a^2 - b^2)(b^2 - r^2)]^2 = 0.$$

Es ergeben sich daraus für die bezeichneten Doppelpunkte die Gleichungen*):

$$a^2\eta^2 = (a^2 - b^2)(r^2 - a^2),$$
$$b^2\xi^2 = (a^2 - b^2)(b^2 - r^2);$$

und man findet für die entsprechenden Punkte der Ellipse die entsprechenden Werthepaare:

$$x^2 = \frac{a^4 - b^2r^2}{a^2 - b^2}, \quad y^2 = \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{r^2 - a^2}{a^2 - b^2};$$

$$x^2 = \frac{a^4}{b^2} \cdot \frac{b^2 - r^2}{a^2 - b^2}, \quad y^2 = \frac{a^2r^2 - b^4}{a^2 - b^2}.$$

Demnach sind die Doppelpunkte in der Achse der y reell, so lange $r > a$, die in der Achse der x aber, so lange $b > r$ ist; dagegen sind die Punkte der Ellipse, welche jenen entsprechen,

*) Man muss diese Form aus dem Umstande schliessen, dass von jedem der Scheitel aus auf die entsprechenden Achsen nach dem einen und andern Sinn die Distanz r abgetragen werden kann.

nur reell, für $r < \frac{a^2}{b}$, und die Punkte derselben, welche diesen entsprechen, für $r > \frac{b^2}{a}$. Man sieht, diese letzteren Bedingungen der Realität sind die nämlichen, durch deren Erfüllung vier der Rückkehrpunkte reell werden.

In dem ersteren Falle werden für $r > \frac{a^2}{b}$, im zweiten für $r < \frac{b^2}{a}$ die Doppelpunkte zu isolirten oder conjugirten Punkten; die entsprechenden Curvenäste kommen nicht zur Erscheinung.

Bei den Grenzwerthen $r = \frac{a^2}{b}$ und $r = \frac{b^2}{a}$ vereinigen sich diese respective der Achse der y und der Achse der x angehörigen Doppelpunkte, die vorhin isolirt waren, wieder mit der Curve und zugleich mit zwei Rückkehrpunkten, ohne dass jedoch irgend eine Singularität in der Curve selbst sichtbar würde.

Für die besonderen Fälle $r = a$ und $r = b$ vereinigen sich die beiden Doppelpunkte respective der Achse der y und der Achse der x im Centrum der Curve als gemeinschaftlich zweien Zweigen der Parallelcurve, denen respective die Achse der y und die Achse der x als gemeinschaftliche Tangente entsprechen *).

10. Es ist lohnend, den beiden speciellen Voraussetzungen

$$a = b \quad \text{und} \quad r = 0$$

an der Hand der allgemeinen Gleichung nachzugehen und sich die geometrische Bedeutung der gewonnenen Resultate zu vergegenwärtigen.

Die erstere giebt die reducirte Gleichung:

$$a^4(\xi^2 + \eta^2)^2[(\xi^2 + \eta^2 - a^2)^2 - 2r^2(\xi^2 + \eta^2 + a^2) + r^4] = 0;$$

die Parallelcurve eines Kreises zerfällt also in vier gerade Linien, nämlich die von seinem Centrum nach seinen imaginären Punkten im Unendlichen gezogenen Geraden, jede doppelt gezählt, und zwei Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 - (a + r)^2 = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 - (a - r)^2 = 0;$$

denn das Product dieser letzteren Gleichungen ist der andere Factor der Gleichung der Parallelcurve.

*) Man vergleiche: Magnus „Aufgaben und Lehrsätze etc.“ Bd. I. p. 432, Aufg. 152, I.

Mit welchem Rechte die nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen gezogenen Geraden der Parallelcurve angehören, erläutert die specielle Voraussetzung $r = 0$, denn auch hier bleiben diese Geraden mit dem doppelt erscheinenden gegebenen Kreise zugleich als Bestandtheile der Parallelcurve und ihrer Gleichung bezeichnet.

Der Voraussetzung $r = 0$ entspricht die Gleichung:

$$(b^2\xi^2+a^2\eta^2-a^2b^2)^2[(\xi^2+\eta^2)^2-2(a^2-b^2)(\xi^2+\eta^2)+(a^2-b^2)^2] = 0.$$

Die Parallelcurve setzt sich also aus der zweifach wiederholten Ellipse und vier geraden Linien zusammen, welche für $a^2e^2 = a^2-b^2$ durch die Gleichung

$$(\xi \pm ae)^2+\eta^2 = 0$$

repräsentirt sind.

Für $a = b$ kommt man auf $\xi^2+\eta^2 = 0$ zurück.

Jede dieser Geraden verbindet einen reellen und einen imaginären Brennpunkt der Ellipse und ist eine Tangente derselben*). Dass sie aber zur Parallelcurve gehören, beweist M. Cayley durch diese einfache Entwickelung.

Durch

$$\xi = \frac{a}{e}, \quad \eta = ia\left(\frac{1}{e}-e\right), \quad (i = \sqrt{-1})$$

ist ein imaginärer Punkt der Ellipse und durch

$$(\xi-\frac{a}{e})^2 + [\eta - ia\left(\frac{1}{e}-e\right)]^2 = 0$$

der mit dem Halbmesser Null aus diesem Punkte beschriebene Kreis gegeben; der letztere zerfällt aber in die zwei Geraden

$$\xi - \frac{a}{e} + i[\eta - ia\left(\frac{1}{e}-e\right)] = 0$$

oder

$$\xi - ae + i\eta = 0,$$

welche eine Tangente der Ellipse ist, und die Gerade

*) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 400 Aufg. 5.

$$\xi - \frac{a}{e} - i[\eta - ia\left(\frac{1}{e} - e\right)] = 0$$

oder

$$\xi - a\left(\frac{2}{e} - e\right) - i\eta = 0,$$

welche den Berührungspunkt mit demjenigen imaginären Kreispunkt im Unendlichen verbindet, welchen die vorige Tangente nicht enthält.

Ich erinnere hier an die vielfach analogen Züge, welche schon nach dem Früheren die Discussion der Parallelfläche des Ellipsoids mit dem Vorigen gemein haben muss; und bemerke, wie leicht sich die vorigen Entwickelungen auf die entsprechenden Probleme bezüglich der Hyperbel und Parabel und bezüglich der anderen Oberflächen zweiten Grades übertragen lassen. Von alle dem wäre jedoch wohl nur die Discussion der allgemeinen Gleichung der Parallelfläche des Ellipsoids an diesem Orte eingehenderer Aufmerksamkeit werth; ich ziehe jedoch vor, es bei den Andeutungen des Art. 5 f. bewenden zu lassen und von einem neuen Gesichtspunkte aus diese Discussion und die ganze Richtung dieser Untersuchung zu erhellen.

11. Unter dem Namen der Curve von Talbot hat man eine krumme Linie bezeichnet, die aus der Ellipse als die Enveloppe der Normalen hervorgeht, welche man in den Punkten derselben auf den in ihnen ausgehenden Durchmessern errichtet. Es liegt nahe, an die auf gleiche Art als Umhüllungsfläche der Normalebenen aus dem Ellipsoid hervorgehende Fläche zu denken. Die erste allgemeine und elegante Darstellung jener Curve ist wohl von Tortolini (Raccolta scientif. di Roma, 1846; Annali di Scienze etc. da B. Tortolini, Vol. VI, 1855) gegeben worden; mit ihr und der entsprechenden Fläche hat sich A. Cayley in einer schönen Abhandlung der Philosoph. Transactions (Febr. 1858) beschäftigt, und ihre Discussion in den elegantesten Formen gegeben. Ich will hier zeigen, dass die Cayley'sche Gleichungsform sehr einfach aus den Betrachtungen dieser Abhandlung hervorgeht.

Geometrisch ergiebt sich sehr leicht, dass die Punkte der gedachten Curve als die dem Mittelpunkt der Ellipse entgegengesetzten Durchmesser-Endpunkte von Kreisen gefunden werden, die die Ellipse berühren und ihr Centrum enthalten; ebenso leicht erkennt man das analoge Gesetz für die Fläche, wornach ihre Punkte als Durchmesserpunkte der Kugeln sich bestimmen, die

das Ellipsoid berühren und deren Oberflächen sein Centrum enthalten.

Für solche Kreise gilt die ihre Gleichung specialisirende Relation:

$$\alpha^2+\beta^2=r^2,$$

für solche Kugeln die analoge:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=r^2;$$

da überdiess nicht die Mittelpunkte, sondern die Durchmesserendpunkte dieser Kreise und Kugeln die fragliche Oberfläche bestimmen, so hat man α, β oder α, β, γ nicht in die laufenden Coordinaten ξ, η oder ξ, η, ζ selbst, sondern in $\frac{\xi}{2}$, $\frac{\eta}{2}$ oder $\frac{\xi}{2}$, $\frac{\eta}{2}$, $\frac{\zeta}{2}$ zu übersetzen, um aus den allgemeinen Gleichungen des Art. 1 die Gleichungen der Curve und Fläche von Talbot in ihrer bequemsten Form hervorgehen zu sehen.

Man erhält aus

$$k^3.r^2+k^2.\frac{a^2b^2-a^2(\beta^2-r^2)-b^2(\alpha^2-r^2)}{a^2b^2}+k.\frac{a^2+b^2-(\alpha^2+\beta^2-r^2)}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2}$$
$$=0$$

so zunächst:

$$k^3.(\alpha^2+\beta^2)+k^2.\frac{a^2b^2+a^2\alpha^2+b^2\beta^2}{a^2b^2}+k.\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2}=0,$$

d. i.

$$\varDelta=a^2b^2(\alpha^2+\beta^2),\quad \Theta=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+a^2b^2,\quad \Theta_1=a^2+b^2,\quad \varDelta_1=1;$$

in Folge dessen geht die Gleichung

$$(9\varDelta\varDelta_1-\Theta\Theta_1)^2=4(\Theta^2-3\varDelta\Theta_1)(\Theta_1^2-3\varDelta_1\Theta)$$

in

$$\{9a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)-(a^2+b^2)(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+a^2b^2)\}^2$$
$$=4\{(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+a^2b^2)^2-3a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)(a^2+b^2)\}$$
$$\times\{(a^2+b^2)^2-3(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+a^2b^2)\}$$

über, in welcher nun noch die Substitution

$$\alpha = \frac{\xi}{2}, \quad \beta = \frac{\eta}{2}$$

zu vollziehen ist, um die Gleichung der besprochenen Curve zu erhalten. Es ist dabei bemerkenswerth, dass man die Discriminante der betrachteten Gleichung dritten Grades auch in der Form

$$4\left(\frac{\Theta_1^2}{9} - \frac{\Delta_1\Theta}{3}\right)^3 = \left(\frac{2\Theta_1^3}{27} + \Delta_1^2\Delta - \frac{\Delta_1\Theta\Theta_1}{3}\right)^2$$

schreiben kann, welches direct auf die Cayley'sche Gleichungsform der Curve führt. (Vergl. Art. 1 und die Anmerkung des Art. 3.)

Die Curve ist symmetrisch zu den Achsen und berührt in den Endpunkten derselben die Ellipse; ihre Form ist eine ganz verschiedene, jenachdem $a^2 \lessgtr 2b^2$ ist: im ersten Falle ein ganz innerhalb der Ellipse gelegenes Oval mit zwei conjugirten Punkten in der Achse der x, im zweiten an den Enden der grossen Achse nach aussen mit einer zu der der Ellipse entgegengesetzten Convexität zu Rückkehrpunkten gehend, um von da aus mit Durchschneidung der Ellipse und ihrer grossen Achse — wodurch Doppelpunkte in derselben bestimmt werden — nach dem Endpunkt der kleinen Achse zu verlaufen.

Für die aus dem Ellipsoid entsprechend abgeleitete Fläche, welche von der 10ten Ordnung ist, erhält man die zur Discussion bequemste Gleichungsform aus der reducirten Gestalt der in Art. 4 gegebenen Discriminante

$$\left\{\Delta\Delta_1 - \frac{\Theta\Theta_1}{4} + \frac{\Omega^2}{12}\right\}^3 = 27\left\{\frac{\Delta\Delta_1\Omega}{6} + \frac{\Theta\Theta_1\Omega}{48} - \frac{\Delta\Theta_1^2}{16} - \frac{\Delta_1\Theta^2}{16} - \frac{\Omega^3}{216}\right\}^2,$$

ebenfalls mittelst der vorher gegebenen Substitutionen.

Die Form der Fläche ist natürlich sehr mannichfaltig, je nach den Achsenverhältnissen des Ellipsoids; dem Falle

$$a^2 > 2b^2, \quad b^2 > 2c^2$$

entspricht die grösste Zahl reeller Singularitäten. Die den Hauptschnitten des Ellipsoids entsprechenden Curven 6ter Ordnung besitzen dann nach dem Vorigen reelle Doppelpunkte und Rückkehrpunkte, die Fläche selbst besitzt drei Knotenlinien (Nodalen), welche durch jene und eine Rückkehrcurve (Cuspidale), welche durch diese hindurchgeht. Für die genauere interessante Discussion muss ich auf Cayley's Abhandlung (sie ist auch im II. Bande der „Annali di Matematica“ 1859, p. 168—179 abgedruckt)

verweisen, da nur die Verbindung darzulegen war, in der die Ableitung ihrer Gleichung mit derjenigen steht, welche ich hier für die Gleichung der Parallelfläche gegeben habe.

Hinsichtlich dieses Zusammenhangs mag noch erwähnt sein, dass eine einfache Verlegung des Coordinatenanfangs das Mittel darbietet, die Enveloppen von Normalen und Normalebenen solcher Radien vectoren der Ellipse und des Ellipsoids zu studiren, welche nicht vom Mittelpunkte ausgehen; die specielle Wahl desselben, welche dann freisteht, liefert eine grosse Zahl merkwürdiger Singularitäten.

12. Es ist dabei endlich zu erinnern, in welcher Weise sich diese Ergebnisse der Theorie der derivirten Flächen und Curven anschliessen, zu der W. Roberts im X. Bande von Liouville's Journal den Grund gelegt hat, und welche neuerdings von Hirst in No. 11 des Quarterly Journal (p. 210—18) weiter ausgeführt worden ist. Nach derselben ist die erste positive derivirte Oberfläche einer Fläche S der Ort des Fusspunktes der Senkrechten, die man von einem festen Punkte auf die Tangentialebene der Oberfläche S fällt; aus ihr entstehen auf dieselbe Weise die höheren positiven derivirten Flächen von S. Umgekehrt wird die Enveloppe der zu den Radien vectoren der Fläche S von jenem Punkte aus in ihren Endpunkten in der Fläche gelegten Normalebenen als erste negative derivirte Fläche von S benannt, und es werden die höheren negativen Derivirten aus ihr auf dieselbe Art abgeleitet. Bekanntlich ist die erste positive Derivirte des Ellipsoids in Bezug auf das Centrum die Wellenfläche von Fresnel, die erste negative Derivirte ist offenbar die so eben Betrachtete. Den zwischen ihr und der Parallelfläche des Ellipsoids bestehenden Zusammenhang, der so eben begründet worden ist, sprach W. Roberts ohne Beweis in den Comptes rendus, 1859, p. 746, wie folgt, aus: Wenn man in die Gleichung der Parallelfläche eines Ellipsoids an Stelle der gleichbleibenden Entfernung r die Grösse $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ substituirt, so erhält man die Gleichung der ersten negativen derivirten Fläche eines Ellipsoids, dessen Radien die Hälften der Radien des gegebenen Ellipsoids sind.

An dieser Stelle vollziehe ich zur Verdeutlichung des Zusammenhangs mit den Betrachtungen des 6. Art. noch die Substitution

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=r^2 \quad \text{und} \quad 4a^2,\ 4b^2,\ 4c^2 \quad \text{statt} \quad a^2,\ b^2,\ c^2$$

in die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2+k}+\frac{\eta^2}{b^2+k}+\frac{\zeta^2}{c^2+k}=1+\frac{r^2}{k},$$

deren Discriminante in Bezug auf k die Gleichung der Parallelfläche liefert; sie giebt

$$\frac{\xi^2}{4a^2+k}+\frac{\eta^2}{4b^2+k}+\frac{\zeta^2}{4c^2+k}=1+\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{k}$$

oder

$$\frac{\xi^2}{k(1+\frac{k}{4a^2})}+\frac{\eta^2}{k(1+\frac{k}{4b^2})}+\frac{\zeta^2}{k(1+\frac{k}{4c^2})}=1.$$

Die erste negative derivirte Fläche des Ellipsoids ist in der That die Enveloppe dieser Gleichung, insofern k in ihr veränderlich gedacht wird.

Da die derivirten Flächen einen sehr einfachen Zusammenhang mit den inversen Flächen und den reciproken Flächen zu einer gegebenen haben, nämlich so, dass, wenn die inverse und reciproke Fläche in Bezug auf eine und dieselbe vom Ursprung aus beschriebene Kugel gebildet werden, die erste positive Derivirte einer gegebenen Fläche die inverse Fläche ihrer reciproken und die erste negative Derivirte die reciproke Fläche ihrer inversen ist, so ist damit die Parallelfläche, so weit man sich auf Oberflächen zweiten Grades beschränkt, auch diesen bekannten abgeleiteten Flächen verbunden.

Auch in diesen Zusammenhängen schliesst sich die gegenwärtige Entwickelung an den Inhalt jenes oben erwähnten VI. Zusatzes zur „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte" an; sie erläutern wie er die geometrische Bedeutung der Discriminante. Indem ich sie hier mittheile, leitet mich der Wunsch, zur allgemeineren Kenntniss der Vortheile nach Kräften beizutragen, welche die Methoden der neueren Algebra bei geometrischen Untersuchungen gewähren.

IV.

Ueber die Kettenbrüche, welche Wurzeln cubischer Gleichungen darstellen.

Von

Herrn Professor *Märcker*

am Gymnasium Bernhardinum in Meiningen.

---

§. 1. Hat man eine quadratische Gleichung von der Form:

$$ax^2+bx+c=0,$$

worin a, b und c ganze Zahlen bedeuten, so lässt sich bekanntlich jede ihrer Wurzeln, vorausgesetzt dass dieselben irrational aber nicht imaginär sind, in einen Kettenbruch verwandeln, der in's Unendliche fortläuft. Dasselbe gilt bei derselben Voraussetzung von den cubischen Gleichungen der Form:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

wobei ebenfalls a, b, c und d ganze Zahlen sind.

So wie die ersteren Kettenbrüche, die quadratischen, in mehrfacher Beziehung merkwürdige Eigenschaften besitzen, so gilt dies auch von der letzteren Art, den cubischen Kettenbrüchen.

Um diese Eigenschaften kennen zu lernen, muss man zunächst mit der Rechnungsweise sich vertraut machen, durch welche man Wurzeln cubischer Gleichungen, analog dem bei quadratischen Gleichungen üblichen Verfahren, in Kettenbrüche verwandelt. Die drei Wurzeln der obigen cubischen Gleichung sind:

I) $$x=\frac{-\frac{1}{3}b+P+Q}{a},$$

II) $$x=\frac{-\frac{1}{3}b+fP+gQ}{a},$$

III) $$x=\frac{-\frac{1}{3}b+gP+fQ}{a}.$$

Hier bedeuten nämlich f und g die beiden imaginären Cubikwurzeln von 1, nämlich:

$$f=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), \qquad g=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3});$$

P und Q aber baben die folgenden Werthe:

$$P=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{27}b^3+\tfrac{1}{6}abc-\tfrac{1}{2}a^2d+\sqrt{(-\tfrac{1}{27}b^3+\tfrac{1}{6}abc-\tfrac{1}{2}a^2d)^2+(-\tfrac{1}{9}b^2+\tfrac{1}{3}ac)^3}},$$

$$Q=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{27}b^3+\tfrac{1}{6}abc-\tfrac{1}{2}a^2d-\sqrt{(-\tfrac{1}{27}b^3+\tfrac{1}{6}abc-\tfrac{1}{2}a^2d)^2+(-\tfrac{1}{9}b^2+\tfrac{1}{3}ac)^3}}.$$

Wie bieraus leicht folgt, gelten die Gleichungen:

$$PQ=\tfrac{1}{9}b^2-\tfrac{1}{3}ac$$

und

$$P^3+Q^3=-\tfrac{2}{27}b^3+\tfrac{1}{3}abc-a^2d.$$

§. 2. Um nun einen der Werthe von x in einen Kettenbruch zu verwandeln, kann man zwar, nachdem derselbe durch die cardanische Formel oder trigonometrisch bis zu einer hinreichenden Menge von Decimalen berechnet worden, auf die allgemeine Weise der Verwandlung von Decimalbrüchen in Kettenbrüche verfahren. Jedoch bekommt man hierdurch nicht diejenigen Zahlen, auf die es bei der Untersuchung des Wesens cubischer Kettenbrüche vorzugsweise ankommt. Bei dem zum Behuf dieser Untersuchung einzuschlagenden, jetzt näher zu beschreibenden Verfahren muss man ebenfalls die irrationale aber nicht imaginäre Grösse $P+Q$ (oder $fP+gQ$ oder $gP+fQ$), alsdann auch P^2+Q^2 (oder gP^2+fQ^2 oder fP^2+gQ^2) berechnen, und zwar auf so viel Decimalen als nöthig ist, um zu bestimmen, wie viel Ganze in jedem der bei der Rechnung vorkommenden irrationalen Brüche enthalten sind.

Ist die Zahl der in der Grösse

$$x=\frac{-\frac{1}{3}b+P+Q}{a}$$

enthaltenen Ganzen h, so haben wir:

$$\frac{-\frac{1}{3}b+P+Q}{a}=h+\frac{P+Q-ah-\frac{1}{3}b}{a}=h+\frac{1}{\varphi_1}.$$

Hierin ist:

$$\varphi_1=\frac{a}{P+Q-ah-\frac{1}{3}b}.$$

Um den Nenner von φ_1 rational zu haben, multipliciren wir Zähler und Nenner mit der Grösse:

$$P^2+Q^2+(ah+\tfrac{1}{3}b)(P+Q)+a^2h^2+\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}ac,$$

deren Berechnung später gezeigt werden wird. Zuerst thun wir es im Nenner, wobei nach §. 1:

$$(P+Q)(P^2+Q^2)=P^3+Q^3+PQ(P+Q)$$
$$=-\tfrac{2}{27}b^3+\tfrac{1}{3}abc-a^2d+(\tfrac{1}{9}b^2-\tfrac{1}{3}ac)(P+Q)$$

und

$$(ah+\tfrac{1}{3}b)(P+Q)^2=(2ah+\tfrac{2}{3}b)(\tfrac{1}{9}b^2-\tfrac{1}{3}ac)+(ah+\tfrac{1}{3}b)(P^2+Q^2)$$

eingesetzt wird:

$$\begin{aligned}
&P^2+Q^2+(ah+\tfrac{1}{3}b)(P+Q)+a^2h^2+\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}ac\\
&P+Q-ah-\tfrac{1}{3}b\\
\hline
&-\tfrac{2}{27}b^3+\tfrac{1}{3}abc-a^2d+(\tfrac{1}{9}b^2-\tfrac{1}{3}ac)(P+Q)+(ah+\tfrac{1}{3}b)(P^2+Q^2)\\
&+(2ah+\tfrac{2}{3}b)(\tfrac{1}{9}b^2-\tfrac{1}{3}ac)+(a^2h^2+\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}ac)(P+Q)+(-ah-\tfrac{1}{3}b)(P^2+Q^2)\\
&+(-ah-\tfrac{1}{3}b)(a^2h^2+\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}ac)+(-a^2h^2-\tfrac{2}{3}abh-\tfrac{1}{9}b^2)(P+Q).
\end{aligned}$$

Hier heben sich die Glieder mit $P+Q$ und P^2+Q^2. Es bleibt noch nach Auflösung der Parenthesen stehen:

$$\begin{array}{rr}
 & -\tfrac{2}{27}b^3+\tfrac{1}{3}abc-a^2d\\
+\quad(\tfrac{2}{9}ab^2-\tfrac{2}{3}a^2c)h+ & \tfrac{2}{27}b^3-\tfrac{2}{9}abc\\
-a^3h^3-a^2bh^2+(-\tfrac{2}{9}ab^2-\tfrac{1}{3}a^2c)h & -\tfrac{1}{9}abc
\end{array}$$

oder:

$$-a^3h^3-a^2bh^2-a^2ch-a^2d=-a^2(ah^3+bh^2+ch+d).$$

Multipliciren wir den Zähler a mit derselben Grösse, womit es beim Nenner geschah, so hebt sich a, und der Werth von φ_1 heisst nun:

$$\varphi_1=\frac{P^2+Q^2+(ah+\frac{1}{3}b)(P+Q)+a^2h^2+\frac{2}{3}abh+\frac{1}{3}ac}{-a(ah^3+bh^2+ch+d)}.$$

Sind hierin i Ganze enthalten, so haben wir:

$$\varphi_1 = i$$

$$+ \frac{P^2 + Q^2 + (ah + \tfrac{1}{3}b)(P+Q) + a^2h^2 + \tfrac{2}{3}abh + \tfrac{1}{3}ac + ai(ah^3 + bh^2 + ch + d)}{-a(ah^3 + bh^2 + ch + d)}$$

$$= i + \frac{1}{\varphi_2},$$

so dass also

$$\varphi_2 = \frac{-a(ah^3 + bh^2 + ch + d)}{P^2 + Q^2 + (ah + \tfrac{1}{3}b)(P+Q) + a^2h^2 + \tfrac{2}{3}abh + \tfrac{1}{3}ac + ai(ah^3 + bh^2 + ch + d)}$$

ist. Hier müssen wieder Zähler und Nenner mit einer Grösse von der Form

$$l(P^2 + Q^2) + m(P + Q) + n$$

multiplicirt und l, m, n so bestimmt werden, dass die Glieder mit $P + Q$ und $P^2 + Q^2$ im Nenner sich heben.

Da sich diese Multiplication zur Befreiung der Nenner von irrationalen Grössen auf eine nun leicht ersichtliche Weise immerfort wiederholt, so wollen wir l, m, n für einen Nenner von der allgemeinen Form

$$\alpha(P^2 + Q^2) + \beta(P + Q) + \gamma$$

so bestimmen, dass derselbe, mit

$$l(P^2 + Q^2) + m(P + Q) + n$$

multiplicirt, rational wird. Es ist:

$$[\alpha(P^2 + Q^2) + \beta(P + Q) + \gamma][l(P^2 + Q^2) + m(P + Q) + n]$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \alpha l(P^4 + Q^4 + 2P^2Q^2) + (\alpha m + \beta l)(P^3 + Q^3 + PQ(P + Q)) \\ + (\alpha n + \gamma l)(P^2 + Q^2) + \beta m(P^2 + Q^2 + 2PQ) + (\beta n + \gamma m)(P + Q) + \gamma n \end{array} \right\}.$$

Wir setzen $PQ = \delta$ und $P^3 + Q^3 = \varepsilon$, wobei nach §. 1.

$$\delta = \tfrac{1}{9}b^2 - \tfrac{1}{3}ac$$

und

$$\varepsilon = -\tfrac{2}{27}b^3 + \tfrac{1}{3}abc - a^2d$$

ist. Dann haben wir:

$$P^4 + Q^4 = (P^3 + Q^3)(P+Q) - PQ(P^2 + Q^2) = \varepsilon(P+Q) - \delta(P^2 + Q^2).$$

Also ist das erhaltene Product:

$$(-\alpha\delta l+\alpha n+\gamma l+\beta m)(P^2+Q^2)+(\alpha\varepsilon l+\alpha\delta m+\beta\delta l+\beta n+\gamma m)(P+Q)$$
$$+2\alpha\delta^2 l+\alpha\varepsilon m+\beta\varepsilon l+2\beta\delta m+\gamma n.$$

Hierin sollen die Glieder mit P^2+Q^2 und $P+Q$ verschwinden, so dass die beiden Gleichungen

$$-\alpha\delta l+\alpha n+\gamma l+\beta m=0$$

und

$$\alpha\varepsilon l+\alpha\delta m+\beta\delta l+\beta n+\gamma m=0$$

zu lösen sind. Die erste wird mit $-\beta$ und die zweite mit α multiplicirt:

$$\alpha\beta\delta l-\beta\gamma l-\qquad\beta^2 m\qquad-\alpha\beta n=0$$
$$\alpha^2\varepsilon l+\alpha\beta\delta l+\alpha^2\delta m+\alpha\gamma m+\alpha\beta n=0$$

addirt: $(\alpha^2\varepsilon+2\alpha\beta\delta-\beta\gamma)l+(\alpha^2\delta+\alpha\gamma-\beta^2)m=0.$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn wir

$$l=-\alpha^2\delta-\alpha\gamma+\beta^2$$

und

$$m=\alpha^2\varepsilon+2\alpha\beta\delta-\beta\gamma$$

setzen. Die Gleichung

$$-\alpha\delta l+\alpha n+\gamma l+\beta m=0$$

oder

$$\alpha n=(\alpha\delta-\gamma)l-\beta m$$

verwandelt sich dann in:

$$\alpha n=(\alpha\delta-\gamma)(-\alpha^2\delta-\alpha\gamma+\beta^2)-\beta(\alpha^2\varepsilon+2\alpha\beta\delta-\beta\gamma)$$
$$=-\alpha^3\delta^2-\alpha^2\beta\varepsilon-\alpha\beta^2\delta+\alpha\gamma^2.$$

Folglich ist:

$$n=-\alpha^2\delta^2-\alpha\beta\varepsilon-\beta^2\delta+\gamma^2.$$

Es bleibt dann im Nenner noch:

$$(2\alpha\delta^2+\beta\varepsilon)l+(\alpha\varepsilon+2\beta\delta)m+\gamma n$$

stehen, was aus den gefundenen Werthen von l, m, n zu berechnen ist.

Nun ergibt sich auch, warum wir oben den ersten rational zu machenden Nenner

$$P+Q-ah-\tfrac{1}{3}b$$

mit

$$P^2+Q^2+(ah+\tfrac{1}{3}b)(P+Q)+a^2h^2+\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}ac$$

zu multipliciren hatten. Dort war nämlich $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=-ah-\frac{1}{3}b$, $\delta=\frac{1}{9}b^2-\frac{1}{3}ac$. Folglich ist:

$$l=-\alpha^2\delta-\alpha\gamma+\beta^2=1,$$

$$m=\alpha^2\varepsilon+2\alpha\beta\delta-\beta\gamma=ah+\tfrac{1}{3}b,$$

$$n=-\alpha^2\delta^2-\alpha\beta\varepsilon-\beta^2\delta+\gamma^2=-\delta+\gamma^2$$

$$=-\tfrac{1}{9}b^2+\tfrac{1}{3}ac+(ah+\tfrac{1}{3}b)^2=a^2h^2+\tfrac{2}{3}abh+\tfrac{1}{3}ac.$$

§. 3. Damit die Verwandlung der Wurzeln cubischer Gleichungen in Kettenbrüche ganz deutlich werde, lassen wir jetzt ein Beispiel folgen, bei welchem wahrgenommen werden wird, dass, mit Ausnahme des Bruches φ_1, die Zahlen, welche man durch die Formeln für l, m, n bekommt, immer einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, welcher dem zum rational zu machenden Nenner gehörigen Zähler gleich ist. Man kann diesen gemeinsamen Factor von l, m, n selbstverständlich weglassen, so dass man statt ihrer die durch Division mit jenem Factor entstehenden Zahlen l', m', n' nimmt; und dennoch wird der neue, nun rationale Nenner auch wieder jenen Factor enthalten (diese und die vorige Behauptung werden später bewiesen werden), so dass der mit $l'(P^2+Q^2)+m'(P+Q)+n'$ zu multiplicirende Zähler sich ganz hebt, und die eben genannte Grösse der neue Zähler wird.

Es sei $2x^3+3x^2+9x-5=0$ die gegebene Gleichung, welche nur die eine reelle Wurzel

$$x=\frac{-1+\sqrt[3]{18+\sqrt{449}}+\sqrt[3]{18-\sqrt{449}}}{2}$$

hat. Man findet als Summe der beiden Cubikwurzeln: $P+Q=1{,}9247$. Auch ist $PQ=\delta=-5$ und $P^3+Q^3=\varepsilon=36$. Da nun $(P+Q)^2=3{,}7001$, so ist:

$$P^2+Q^2=(P+Q)^2-2PQ=3{,}7001+10=13{,}7001.$$

In

$$\frac{-1+P+Q}{2}=\frac{0{,}9247}{2}$$

sind 0 Ganze enthalten; also setzen wir:

$$\frac{-1+P+Q}{2}=\frac{1}{\varphi_1}.$$

Es ist nach §. 2:

$$\varphi_1=\frac{P^2+Q^2+(ah+\frac{1}{3}b)(P+Q)+a^2h^2+\frac{2}{3}abh+\frac{1}{3}ac}{-a(ah^3+bh^2+ch+d)},$$

oder, da $h=0$, $a=2$, $b=3$, $c=9$, $d=-5$ ist:

$$\varphi_1=\frac{P^2+Q^2+P+Q+6}{10}.$$

Hierin sind, weil der Zähler

$$13{,}7001+1{,}9247+6=21{,}6248$$

ist, 2 Ganze enthalten, also

$$\varphi_1=\frac{P^2+Q^2+P+Q+6}{10}=2+\frac{P^2+Q^2+P+Q-14}{10}=2+\frac{1}{\varphi_2}.$$

Also:

$$\varphi_2=\frac{10}{P^2+Q^2+P+Q-14}.$$

Jetzt ist $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-14$, $\delta=-5$, $\varepsilon=36$; folglich:

$$l=-\alpha^2\delta-\alpha\gamma+\beta^2 \quad = \quad 5+14+1 \quad = 20,$$
$$m=\alpha^2\varepsilon+2\alpha\beta\delta-\beta\gamma \quad = \quad 36-10+14 \quad = 40,$$
$$n=-\alpha^2\delta^2-\alpha\beta\varepsilon-\beta^2\delta+\gamma^2=-25-36+5+196=140.$$

Den gemeinschaftlichen Factor 10, welcher dem Zähler von φ_2 gleich ist, lassen wir weg und nehmen $l'=2$, $m'=4$, $n'=14$. Dann wird der neue Nenner:

$$(2\alpha\delta^2+\beta\varepsilon)l'+(\alpha\varepsilon+2\beta\delta)m'+\gamma n'=(50+36).2+(36-10).4-196$$
$$=172+104-196=80,$$

worin auch wieder der Factor 10 enthalten ist, der gegen den Zähler 10 sich hebt. Demnach ist:

$$\varphi_2=\frac{2(P^2+Q^2)+4(P+Q)+14}{8}.$$

Das weitere Heben mit 2 unterbleibt, weil, wenn die nachher aufzufindenden Gesetze zutreffen sollen, alle Zahlen streng nach den gegebenen Vorschriften berechnet werden müssen.

Der Zähler von φ_2 ist:

$$27{,}4002+7{,}6988+14=49{,}0990.$$

Also sind, da der Nenner 8 ist, 6 Ganze in φ_2 enthalten. Wir haben:

$$\varphi_2 = 6 + \frac{2(P^2+Q^2)+4(P+Q)-34}{8} = 6 + \frac{1}{\varphi_3}.$$

Also:

$$\varphi_3 = \frac{8}{2(P^2+Q^2)+4(P+Q)-34}.$$

Jetzt ist $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = -34$, $\delta = -5$, $\varepsilon = 36$. Folglich:

$$l = -\alpha^2\delta - \alpha\gamma + \beta^2 \quad = \quad 20+68+16 \quad = 104,$$

$$m = \alpha^2\varepsilon + 2\alpha\beta\delta - \beta\gamma \quad = \quad 144-80+136 \quad = 200,$$

$$n = -\alpha^2\delta^2 - \alpha\beta\varepsilon - \beta^2\delta + \gamma^2 = -100-288+80+1156 = 848.$$

Den gemeinschaftlichen Factor 8 lassen wir weg und nehmen $l' = 13$, $m' = 25$, $n' = 106$. Der neue Nenner ist:

$$(2\alpha\delta^2 + \beta\varepsilon)l' + (\alpha\varepsilon + 2\beta\delta)m' + \gamma n'$$

$$= (100+144).13 + (72-40).25 - 3604 = 3172 + 800 - 3604 = 368,$$

worin 8, der Zähler, 46 mal enthalten ist. Daher wird:

$$\varphi_3 = \frac{13(P^2+Q^2)+25(P+Q)+106}{46}.$$

Hierin sind 7 Ganze enthalten. Es ist:

$$\varphi_3 = 7 + \frac{13(P^2+Q^2)+25(P+Q)-216}{46} = 7 + \frac{1}{\varphi_4};$$

$$\varphi_4 = \frac{46}{13(P^2+Q^2)+25(P+Q)-216},$$

oder, wenn wir wie vorher die Rechnung fortsetzen:

$$\varphi_4 = \frac{93(P^2+Q^2)+179(P+Q)+736}{526}$$

$$= 4 + \frac{93(P^2+Q^2)+179(P+Q)-1368}{526} = 4 + \frac{1}{\varphi_5};$$

u. s. w.

Die Entwickelung stellt sich also, wenn wir die zu den Theilnennern gehörigen Näherungswerthe mit ihnen in die nämliche Zeile stellen und mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ u. s. w. bezeichnen, so dar:

$$\frac{P+Q-1}{2}$$

$$=0+\frac{P+Q-1}{2}=0+\frac{1}{\varphi_1};\quad \mathfrak{A}_1=\frac{0}{1};$$

$$\varphi_1=\frac{P^2+Q^2+P+Q+6}{10}$$

$$=2+\frac{P^2+Q^2+P+Q-14}{10}=2+\frac{1}{\varphi_2};\quad \mathfrak{A}_2=\frac{1}{2};$$

$$\varphi_2=\frac{2(P^2+Q^2)+4(P+Q)+14}{8}$$

$$=6+\frac{2(P^2+Q^2)+4(P+Q)-34}{8}=6+\frac{1}{\varphi_3};\quad \mathfrak{A}_3=\frac{6}{13};$$

$$\varphi_3=\frac{13(P^2+Q^2)+25(P+Q)+106}{46}$$

$$=7+\frac{13(P^2+Q^2)+25(P+Q)-216}{46}=7+\frac{1}{\varphi_4};\quad \mathfrak{A}_4=\frac{43}{93};$$

$$\varphi_4=\frac{93(P^2+Q^2)+179(P+Q)+736}{526}$$

$$=4+\frac{93(P^2+Q^2)+179(P+Q)-1368}{526}=4+\frac{1}{\varphi_5};\quad \mathfrak{A}_5=\frac{178}{385};$$

u. s. w.

§. 4. Nachdem gezeigt ist, wie man bei der Entwickelung eines cubischen Kettenbruches, analog dem bei quadratischen Kettenbrüchen üblichen Verfahren, zu Werke gehen muss, wollen wir an dem gegebenen Beispiel die Eigenthümlichkeiten aufsuchen, welche cubische Kettenbrüche in Verbindung mit den bei ihrer Entwickelung entstehenden Zahlen darbieten. Die Beweise für die an diesem Beispiel erkannten Gesetze sollen dann nachfolgen.

Zunächst fällt in die Augen, dass der Nenner jedes Näherungswerthes dem in der folgenden Reihe stehenden Coefficienten von P^2+Q^2 gleich ist. Die Nenner der Näherungswerthe sind von der ersten Reihe an: 1, 2, 13, 93 u. s. w.; dieselben Zahlen sind von der zweiten Reihe an auch die Coefficienten von P^2+Q^2. Da die Nenner immerfort wachsen müssen, so kann keiner von den irrationalen Brüchen je wieder ganz die Gestalt eines früheren haben und eine Periodicität, wie sie sich bei der Entwickelung quadratischer Kettenbrüche in den irrationalen Brüchen zeigt, ist völlig ausgeschlossen.

Etwas schwerer ist das Gesetz für die Coefficienten von $P+Q$ zu erkennen. Heisst irgend ein Näherungswerth $\frac{p}{q}$, so hat der in der folgenden Reihe stehende Coefficient von $P+Q$ den Werth $ap+\frac{1}{3}bq$. So ist für $\frac{1}{2}$ in der zweiten Reihe $p=1$, $q=2$, und da $a=2$ und $b=3$, so ist $ap+\frac{1}{3}pq=2+2=4$, was der Coefficient von $P+Q$ in der dritten Reihe ist. Für $\frac{6}{13}$ ist $p=6$, $q=13$, also $ap+\frac{1}{3}bq=12+13=25$; auch steht in der vierten Reihe $25(P+Q)$. Für $\frac{43}{93}$ ist $p=43$, $q=93$, also $ap+\frac{1}{3}bq$ $=86+93=179$, womit in der fünften Reihe $P+Q$ multiplicirt ist. Ist $a=1$ und $b=0$, so ist $ap+\frac{1}{3}bq=p$, also der Coefficient von $P+Q$ mit p einerlei. Dies gilt namentlich für alle Cubikwurzeln ganzer Zahlen, wenn man sie in einem Kettenbruch darstellt. Man hat z. B. für die Cubikwurzel von 2 die Gleichung:

$$x^3-2=0.$$

Es ist $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=-2$, $P=\sqrt[3]{2}$, $Q=0$. Wir finden, wenn wir wie in §. 3 rechnen:

$$P=1+\frac{P-1}{1}$$

$$=1+\frac{1}{\varphi_1};\quad \mathfrak{N}_1=\frac{1}{1};$$

$$\varphi_1=\frac{P^2+P+1}{1}=3+\frac{P^2+P-2}{1}$$

$$=3+\frac{1}{\varphi_2};\quad \mathfrak{N}_2=\frac{4}{3};$$

$$\varphi_2=\frac{3P^2+4P+2}{10}=1+\frac{3P^2+4P-8}{10}$$

$$=1+\frac{1}{\varphi_3};\quad \mathfrak{N}_3=\frac{5}{4};$$

$$\varphi_3=\frac{4P^2+5P+4}{3}=5+\frac{4P^2+5P-11}{3}$$

$$=5+\frac{1}{\varphi_4};\quad \mathfrak{N}_4=\frac{29}{23};$$

$$\varphi_4=\frac{23P^2+29P+27}{55}=1+\frac{23P^2+29P-28}{55}$$

$$=1+\frac{1}{\varphi_5};\quad \mathfrak{N}_5=\frac{34}{27};$$

$$\varphi_5 = \frac{27P^2+34P-10}{62} = 1 + \frac{27P^2+34P-72}{62}$$

$$= 1 + \frac{1}{\varphi_6}, \quad \mathfrak{N}_6 = \frac{63}{50};$$

$$\varphi_6 = \frac{50P^2+63P+54}{47} = 4 + \frac{50P^2+63P-134}{47}$$

$$= 4 + \frac{1}{\varphi_7}, \quad \mathfrak{N}_7 = \frac{286}{227};$$

u. s. w.

Für alle cubischen Kettenbrüche zeigt sich ein ganz besonders bemerkenswerthes Gesetz in den Nennern der irrationalen Brüche. In jedem derselben geht der Coefficient von x^3, den wir mit a bezeichneten, auf, und es lässt sich daher jeder dieser Nenner in der Form aN darstellen. Ist nun der einem solchen Nenner vorausgehende Näherungswerth $=\frac{p}{q}$, so gilt die Gleichung:

$$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = \pm N,$$

wobei das obere oder untere Zeichen vor N genommen werden muss, jenachdem die Zahl, welche angibt, in der wievielten Reihe der Nenner aN steht, eine ungerade oder eine gerade ist. In dem Beispiel von §. 3., worin $a=2$, $b=3$, $c=9$, $d=-5$ ist, gilt

$$2p^3 + 3p^2q + 9pq^2 - 5q^3 = \pm N.$$

Wir haben in der zweiten Reihe $p=1$, $q=2$, und in der dritten $aN=8$, also $N=4$. Es gilt daher die Gleichung:

$$2.1 + 3.1.2 + 9.1.4 - 5.8 = 4;$$

denn

$$2 + 6 + 36 - 40 = 4.$$

Ferner für $p=6$, $q=13$, $N=23$ gilt:

$$2.216 + 3.36.13 + 9.6.169 - 5.2197 = -23;$$

denn

$$432 + 1404 + 9126 - 10985 = -23.$$

Ferner für $p=43$, $q=93$; $N=263$ gilt:

$$2.79507 + 3.1849.93 + 9.43.8649 - 5.804357 = 263;$$

denn

$$159014 + 515871 + 3347163 - 4021785 = 263.$$

Bei dem anderen Beispiel $x^3-2=0$ muss die Gleichung $p^3-2q^3=\pm N$ gelten.

Wir haben:

für $p=1$,	$q=1$	und	$N=1$:	$1-2$	$=-1$,
- $p=4$,	$q=3$	-	$N=10$:	$64-2.27$	$=10$,
- $p=5$,	$q=4$	-	$N=3$:	$125-2.64$	$=-3$,
- $p=29$,	$q=23$	-	$N=55$:	$24389-2.12167$	$=55$,
- $p=34$,	$q=27$	-	$N=62$:	$39304-2.19683$	$=-62$,
- $p=63$,	$q=50$	-	$N=47$:	$250047-2.125000$	$=47$.

Es ist wohl kaum nöthig, darauf hinzuweisen, dass in Beziehung auf das zuletzt angeführte Gesetz die cubischen Kettenbrüche mit den quadratischen mit Ausnahme des einzigen Umstandes übereinstimmen, dass bei letzteren in der Gleichung $ap^2+bpq+cq^2=\pm N$ dieses N der Nenner des irrationalen Bruches ist, welchem der Näherungswerth $\frac{p}{q}$ vorausgeht, bei ersteren aber in der Gleichung $ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=\pm N$ das N durch Division des Nenners mit a erhalten wird. Ist in der cubischen Gleichung $a=1$, so ist es hier ganz ebenso wie dort.

§. 5. Um nun für die aufgestellten Gesetze die Beweise zu geben, bezeichnen wir einen beliebigen Näherungswerth mit $\frac{p}{q}$ und den vorhergehenden mit $\frac{r}{s}$. Heisst der Theilnenner, welcher zu dem auf $\frac{p}{q}$ folgenden Näherungswerth gehört, k, so ist dieser Näherungswerth bekanntlich

$$=\frac{kp+r}{kq+s}.$$

k ist die grösste ganze Zahl, welche in dem dazu gehörigen irrationalen Bruch von der Form

$$\frac{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v}{w}$$

enthalten ist. Setzen wir diesen Bruch statt k, so bekommen wir statt des Näherungswerths den vollständigen Werth des ganzen Kettenbruchs, nämlich:

$$\frac{p\left[\frac{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v}{w}\right]+r}{q\left[\frac{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v}{w}\right]+s}$$

oder:

$$\frac{pt(P^2+Q^2)+pu(P+Q)+pv+rw}{qt(P^2+Q^2)+qu(P+Q)+qv+sw}.$$

Da nun auch der Kettenbruch $=\frac{P+Q-\frac{1}{3}b}{a}$ ist, so haben wir:

$$\frac{pt(P^2+Q^2)+pu(P+Q)+pv+rw}{qt(P^2+Q^2)+qu(P+Q)+qv+sw}=\frac{P+Q-\frac{1}{3}b}{a},$$

folglich:

$$apt(P^2+Q^2)+apu(P+Q)+apv+arw$$

$$=\left\{\begin{array}{c}-\frac{1}{3}bqt(P^2+Q^2)-\frac{1}{3}bqu(P+Q)-\frac{1}{3}b(qv+sw)\\+qu(P^2+Q^2)+(qtPQ+qv+sw)(P+Q)+qt(P^3+Q^3)+2quPQ\end{array}\right\},$$

oder, da $PQ=\delta$ und $P^3+Q^3=\varepsilon$ ist,

$$(apt+\tfrac{1}{3}bqt-qu)(P^2+Q^2)+(apu+\tfrac{1}{3}bqu-\delta qt-qv-sw)(P+Q)$$
$$+apv+arw-\varepsilon qt-2\delta qu+\tfrac{1}{3}bqv+\tfrac{1}{3}bsw=0.$$

Da hier die rationalen Glieder sich nicht gegen die irrationalen heben können, so müssen sowohl jene als diese für sich die Summe 0 geben. Aber auch die mit P^2+Q^2 verbundenen Glieder können sich nicht gegen die mit $P+Q$ verbundenen aufheben; also ist 0 die Summe von diesen wie von jenen. Es gelten demnach die drei Gleichungen:

I) $$apt+\tfrac{1}{3}bqt-qu=0,$$

II) $$apu+\tfrac{1}{3}bqu-\delta qt-qv-sw=0,$$

III) $$apv+arw-\varepsilon qt-2\delta qu+\tfrac{1}{3}bqv+\tfrac{1}{3}bsw=0.$$

Mit Hülfe derselben sollen zunächst die Gesetze über die Coefficienten von P^2+Q^2 und $P+Q$ nachgewiesen werden, wobei auch hinsichtlich des in §. 3. zur Entwickelung des cubischen Kettenbruches gezeigten Verfahrens dargethan werden wird, dass die aus den Formeln für l und m berechneten Zahlen den gemeinschaftlichen Factor w enthalten, der in ihnen, sowie in n, weggelassen wird. Doch gilt dies noch nicht für den zweiten

irrationalen Bruch φ_1, weil der Beweis voraussetzt, dass bereits zwei Näherungswerthe $\frac{r}{s}$ und $\frac{q}{p}$ vorher gegangen sind.

Da wir die grösste in dem irrationalen Bruch

$$\frac{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v}{w}$$

enthaltene ganze Zahl k genannt haben, so haben wir:

$$\frac{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v}{w}=k+\frac{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v-kw}{w}.$$

Hier ist der Nenner des Bruches

$$\frac{w}{t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v-kw}$$

durch Multiplication von Zähler und Nenner mit

$$l'(P^2+Q^2)+m'(P+Q)+n'$$

rational zu machen, wobei die für l und m aus den Formeln

$$l=-\alpha^2\delta-\alpha\gamma+\beta^2$$

und

$$m=\alpha^2\varepsilon+2\alpha\beta\delta-\beta\gamma$$

hervorgehenden Zahlen noch mit w, das, wie sich zeigen wird, darin aufgehen muss, zu dividiren sind, damit wir l' und m' bekommen. Wir haben jetzt

$$t(P^2+Q^2)+u(P+Q)+v-kw$$

statt

$$\alpha(P^2+Q^2)+\beta(P+Q)+\gamma,$$

also ist t statt α, u statt β und $v-kw$ statt γ in jene Formeln einzusetzen. Zunächst erhalten wir:

$$l=-\delta t^2-tv+u^2+ktw.$$

Multipliciren wir die obige mit I) bezeichnete Gleichung durch $-u$ und die mit II) bezeichnete durch t, so gibt dies:

$$-aptu-\tfrac{1}{2}bqtu+qu^2=0$$

und

$$aptu+\tfrac{1}{2}bqtu-\delta qt^2-qtv-stw=0$$

addirt: $$-\delta qt^2-qtv+qu^2-stw=0$$

also:

$$-\delta t^2 - tv + u^2 = \frac{stw}{q}.$$

Dies in den Werth von l eingesetzt, gibt:

$$l = \frac{stw}{q} + ktw = \frac{tw}{q}(kq+s).$$

Ist nun t, der Coefficient von P^2+Q^2, dem Nenner q des vorhergehenden Näherungswerthes gleich, so wird $l = w(kq+s)$, und nachdem dies mit w, welches, wie man sieht, darin aufgehen muss, dividirt ist, bekömmt man $t' = kq+s$ als den neuen Coefficienten von P^2+Q^2. Diese Zahl $kq+s$ ist aber der Nenner des auf $\frac{p}{q}$ folgenden Näherungswerthes $\frac{kp+r}{kq+s}$. Es ist demnach bewiesen, dass, wenn das Gesetz für den Nenner eines Näherungswerthes und den darauf folgenden Coefficienten von P^2+Q^2 einmal gilt, es auch das nächstemal gelten muss. Da der erste Näherungswerth immer 1 zum Nenner, und das darauf folgende P^2+Q^2 (nach §. 2.) auch 1 zum Coefficienten hat, so ist auch der Nenner des zweiten Näherungswerthes mit dem darauf folgenden Coefficienten von P^2+Q^2 übereinstimmend. Ebenso stimmt der Nenner des dritten, vierten, überhaupt aller Näherungswerthe mit dem jedesmal folgenden Coefficienten von P^2+Q^2 überein. Auch ist hier zugleich der Beweis geliefert worden, dass in der für l aus der Formel berechneten Zahl $l = w(kq+s)$ der Zähler w des im Nenner rational zu machenden Bruches jedesmal aufgehen muss.

Um nun das Gesetz für die Coefficienten von $P+Q$, dass nämlich dieselben durch die Formel $u = ap + \frac{1}{3}bq$ ausgedrückt werden, zu beweisen, brauchen wir bloss den Werth von u aus der Gleichung I) zu entwickeln. Sie heisst:

$$apt + \tfrac{1}{3}bqt - qu = 0.$$

Hieraus erhalten wir:

$$u = \frac{t}{q}(ap + \tfrac{1}{3}bq),$$

oder, da bereits bewiesen wurde, dass $t = q$ ist,

$$u = ap + \tfrac{1}{3}bq.$$

Es ist nun auch hinsichtlich des neuen Coefficienten von $P+Q$, den man durch Division mit w in $m = \alpha^2\varepsilon + 2\alpha\beta\delta - \beta\gamma$ erhält, zu

beweisen, dass wirklich w ein Factor dieser Grösse m ist. Wir haben wie vorher $\alpha = t$, $\beta = u$, $\gamma = v - kw$. Dies eingesetzt gibt:

$$m = \varepsilon t^2 + 2\delta tu - uv + kuw.$$

In Gleichung III) können wir statt $apv + \frac{1}{3}bqv$ schreiben: $(ap + \frac{1}{3}bq)v$ oder uv. Dann heisst diese Gleichung:

$$uv + arw - \varepsilon qt - 2\delta qu + \tfrac{1}{3}bsw = 0.$$

Dies (nämlich 0) zum Werth von m addirt gibt:

$$m = \varepsilon t^2 - \varepsilon qt + 2\delta tu - 2\delta qu + kuw + arw + \tfrac{1}{3}bsw,$$

oder, wenn wir statt t das gleiche q einsetzen:

$$m = \varepsilon q^2 - \varepsilon q^2 + 2\delta qu - 2\delta qu + kuw + arw + \tfrac{1}{3}bsw$$

$$= (ku + ar + \tfrac{1}{3}bs)w,$$

wovon also w ein Factor ist. Als neuen Coefficienten von $P + Q$ erhält man $m' = ku + ar + \frac{1}{3}bs$, welche Zahl entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch mit dem Nenner 3 sein muss.

§. 6. Jetzt ist auch noch für den aus der Formel folgenden Werth

$$n = -\alpha^2\delta^2 - \alpha\beta\varepsilon - \beta^2\delta + \gamma^2$$

zu beweisen, dass, nachdem er mit w dividirt ist, für n', ebenso wie es bei m' dargethan wurde, entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch mit dem Nenner 3 herauskommt. Wir wollen zunächst aus den Gleichungen II) und III) (§. 5), in denen $t = q$ und $u = aq + \frac{1}{3}bq$ eingesetzt wird, also aus

II) $$(ap + \tfrac{1}{3}bq)^2 - \delta q^2 - qv - sw = 0$$

und

III) $$-2\delta q(ap + \tfrac{1}{3}bq) - \varepsilon q^2 + (ap + \tfrac{1}{3}bq)v + (ar + \tfrac{1}{3}br)w = 0,$$

einen von w unabhängigen Werth von v berechnen. Zu diesem Zwecke multipliciren wir II) mit $ar + \frac{1}{3}bs$ und III) mit s:

$$[(ap+\tfrac{1}{3}bq)^2-\delta q^2][ar+\tfrac{1}{3}bs]+(-aqr-\tfrac{1}{3}bqs)v-(ar+\tfrac{1}{3}bs)sw=0$$
$$-2\delta q(ap+\tfrac{1}{3}bq)s-\varepsilon q^2 s+(aps+\tfrac{1}{3}bqs)v+(ar+\tfrac{1}{3}bs)sw=0$$

addirt: $$[(ap+\tfrac{1}{3}bq)^2-\delta q^2][ar+\tfrac{1}{3}bs]-2\delta q(ap+\tfrac{1}{3}bq)s-\varepsilon q^2 s+(aps-aqr)v=0.$$

Es ist (§. 2) $\delta=\frac{1}{9}b^2-\frac{1}{3}ac$ und $\varepsilon=-\frac{2}{27}b^3+\frac{1}{3}abc-a^2d$; folglich:

$$(ap+\tfrac{1}{3}bq)^2-\delta q^2=a^2p^2+\tfrac{2}{3}abpq+\tfrac{1}{3}acq^2$$

und

$$-2\delta q(ap+\tfrac{1}{3}bq)=(-\tfrac{2}{9}ab^2+\tfrac{2}{3}a^2c)pq+(-\tfrac{2}{27}b^3+\tfrac{2}{9}abc)q^2.$$

Wir haben demnach:

$$[(ap+\tfrac{1}{3}bq)^2-\delta q^2][ar+\tfrac{1}{3}bs]=(a^3p^2+\tfrac{2}{3}a^2bpq+\tfrac{1}{3}a^2cq^2)r+(\tfrac{1}{3}a^2bp^2+\tfrac{2}{9}ab^2pq+\tfrac{1}{9}abcq^2)s$$
$$-2\delta q(ap+\tfrac{1}{3}bq)s-\varepsilon q^2 s=((-\tfrac{2}{9}ab^2+\tfrac{2}{3}a^2c)pq+(-\tfrac{1}{9}abc+a^2d)q^2)s$$
$$(aps-aqr)v=-a(qr-ps)v$$

addirt: $$0=-a(qr-ps)v+(a^3p^2+\tfrac{2}{3}a^2bq+\tfrac{1}{3}a^2cq^2)r+(\tfrac{1}{3}a^2bp^2+\tfrac{2}{3}a^2cpq+a^2dq^2)s$$

also:

$$(qr-ps)v=a[(ap^2+\tfrac{2}{3}bpq+\tfrac{1}{3}cq^2)r+(\tfrac{1}{3}bp^2+\tfrac{2}{3}cpq+dq^2)s]$$
$$=a[(ar+\tfrac{1}{3}bs)p^2+(\tfrac{2}{3}br+\tfrac{2}{3}cs)pq+(\tfrac{1}{3}cr+ds)q^2].$$

Es ist bekanntlich $qr-ps=\mp 1$, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem der Näherungswerth $\frac{p}{q}$ in einer geraden oder ungeraden Stelle steht. Also ist die auf der rechten Seite stehende Grösse der Werth

von $\mp v$. Die 3 Gleichungen I), II) und III) in §. 5. gelten allgemein für zwei aufeinander folgende Näherungswerthe $\frac{r}{s}$ und $\frac{p}{q}$. Also müssen sie auch für die beiden Näherungswerthe $\frac{p}{q}$ und $\frac{kp+r}{kq+s}$ gelten, wenn durchgehends p statt r, q statt s, $kp+r$ statt p und $kq+s$ statt q, sowie auch T statt t, U statt u, V statt v und W statt w gesetzt wird, wobei T, U, V, W die Zahlen des neuen irrationalen Bruches bedeuten. Nach §. 5. ist $T = kq+s$ und $U = a(kp+r)+\frac{1}{3}b(kq+s)$. Für V erhalten wir, wenn in der Formel für v die genannten Substitutionen gemacht werden, indem jetzt

$$(kq+s)p-(kp+r)q = ps-qr = \pm 1$$

an der Stelle von $qr-ps$ steht:

$$(ps-qr)V = \pm V$$

$$= a[(ap+\tfrac{1}{3}bq)(kp+r)^2+(\tfrac{2}{3}bp+\tfrac{2}{3}cq)(kp+r)(kq+s)+(\tfrac{1}{3}cp+dq)(kq+s)^2].$$

Der so gefundene Werth von V ist der zu T und U in der Weise gehörige, dass der letzte irrationale Neuner von der Form

$$\alpha(P^2+Q^2)+\beta(P+Q)+\gamma \text{ mit } T(P^2+Q^2)+U(P+Q)+V$$

multiplicirt rational wird. Nach §. 5. ist $l' = kq+s$, also $T = l'$. Auch hatten wir dort $m' = ku+ar+\frac{1}{3}bs$. Da nun

$$U = a(kp+r)+\tfrac{1}{3}b(kq+s) = k(ap+\tfrac{1}{3}bq)+ar+\tfrac{1}{3}bs = ku+ar+\tfrac{1}{3}bs$$

ist, so haben wir $U = m'$. Auch muss $V = n'$ sein. Denn wäre $V = n' \pm D$, so würde das rationale Product

$$[\alpha(P^2+Q^2)+\beta(P+Q)+\gamma][T(P^2+Q^2)+U(P+Q)+V]$$

oder

$$[\alpha(P^2+Q^2)+\beta(P+Q)+\gamma][l'(P^2+Q^2)+m'(P+Q)+V]$$

um $D[\alpha(P^2+Q^2)+\beta(P+Q)+\gamma]$ grösser oder kleiner als das rationale Product

$$[\alpha(P^2+Q^2)+\beta(P+Q)+\gamma][l'(P^2+Q^2)+m'(P+Q)+n'],$$

folglich irrational sein. Es ist demnach unser Werth für V ganz der nämliche wie der, den man aus der Formel

$$n = -\alpha^2\delta^2-\alpha\beta\varepsilon-\beta^2\delta+\gamma^2,$$

indem man n noch mit w dividirt, berechnet. Da der obige Werth

von V, abgesehen vom Nenner 3, nur ganze Zahlen enthält, so muss, wenn mit w in den nach der Formel berechneten Werth von n dividirt wird, für n' entweder eine ganze Zahl oder eine Zahl mit dem Nenner 3 herauskommen.

Als Eigenthümlichkeit der mit v oder V bezeichneten Rationalzahl, die neben den Irrationalzahlen jedesmal mit ihnen durch Addition verbunden steht, ist, wie man aus den Formeln für v und V erkennt, noch anzuführen, dass a immer ein Factor derselben sein muss. Doch ist die erste Reihe hiervon noch ausgenommen.

§. 7. Es soll nun der Beweis für das Gesetz gegeben werden, welches in der Gleichung:

$$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = \pm\frac{w}{a}$$

ausgesprochen liegt und jedenfalls als das wichtigste von den cubischen Kettenbrüchen geltende anzusehen ist. Wir hatten in §.6. die Gleichungen:

$$\text{II)} \qquad (ap + \tfrac{1}{3}bq)^2 - \delta q^2 - qv - sw = 0,$$

$$\text{III)} \quad -2\delta q(ap + \tfrac{1}{3}bq) - \varepsilon q^2 + (ap + \tfrac{1}{3}bq)v + (ar + \tfrac{1}{3}bs)w = 0.$$

Wir multipliciren II) mit $ap + \frac{1}{3}bq$ und III) mit q:

$$\text{II)} \quad (ap + \tfrac{1}{3}bq)^3 - \delta q^2(ap + \tfrac{1}{3}bq) - qv(ap + \tfrac{1}{3}bq) + (-aps - \tfrac{1}{3}bqs)w = 0$$

$$\text{III)} \quad -\varepsilon q^3 \quad - 2\delta q^2(ap + \tfrac{1}{3}bq) + qv(ap + \tfrac{1}{3}bq) + \quad (aqr + \tfrac{1}{3}bqs)w = 0$$

$$\text{addirt:} \quad (ap + \tfrac{1}{3}bq)^3 - \varepsilon q^3 - 3\delta q^2(ap + \tfrac{1}{3}bq) + a(qr - ps)w = 0.$$

Nun haben wir, weil $\delta = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}ac$ und $\varepsilon = -\frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{3}abc - a^2d$ ist,

$$(ap+\tfrac{1}{3}bq)^3-\varepsilon q^3 \qquad = \qquad a^3p^3+a^2bp^2q+\tfrac{1}{3}ab^2pq^2+(\tfrac{1}{9}b^3-\tfrac{1}{3}abc+a^2d)q^3$$

$$-3\delta q^2(ap+\tfrac{1}{3}bq)+a(qr-ps)w=a(qr-ps)w \qquad +(-\tfrac{1}{3}ab^2+a^2c)pq^2+(-\tfrac{1}{9}b^3+\tfrac{1}{3}abc)q^3$$

addirt:

$$0=a(qr-ps)w+a^3p^3+a^2bp^2q+a^2cpq^2+a^2dq^3,$$

folglich:

$$(ps-qr)w=a(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3),$$

oder, da $ps-qr=\pm 1$ ist,

$$\pm\, w=a(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3)$$

und

$$ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=\pm\frac{w}{a}.$$

Da nun a hiernach immer in w aufgehen muss, so können wir $w=aN$ setzen, und wir haben:

$$ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=\pm N.$$

Setzen wir in der Gleichung

$$(ps-qr)w=a(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3)$$

p statt r, q statt s, $kp+r$ statt p, $kq+s$ statt q und W statt w, wie es schon in §. 6. geschah, so erhalten wir, indem jetzt

$$(kp+r)q-(kq+s)p=qr-ps=\mp 1$$

an die Stelle von $ps-qr$ tritt:

$$\mp\, W=a[a(kp+r)^3+b(kp+r)^2(kq+s)+c(kp+r)(kq+s)^2+d(kq+s)^3].$$

Es ist W der zu den im Zähler stehenden Zahlen T, U, V gehörige Nenner, welcher früher aus der Formel in §. 2:

$$(2\alpha\delta^2 + \beta\varepsilon)l' + (\alpha\varepsilon + 2\beta\delta)m' + \gamma n',$$

worin l', m', n' bereits mit w dividirt und nach §. 6. mit T, U, V gleichbedeutend sind, so berechnet wurde, dass wir die aus jener Formel hervorgehende Zahl auch noch mit w dividirten. Diese letztgenannte Division muss also, da W als ganze Zahl sich darstellt, jedesmal aufgehen.

§. 8. Die Entwickelung cubischer Kettenbrüche lässt sich nach Berechnung der Formeln für t, u, v, w auf kürzerem Wege bewirken, als der in §. 3. eingeschlagene ist, indem dort überall zuletzt eine Division mit w vorgenommen werden musste, im Allgemeinen also die Rechnung dort mit grösseren Zahlen zu thun hat als dies bei Anwendnng der folgenden Formeln der Fall ist:

$$t = q,$$

$$u = ap + \tfrac{1}{3}bq,$$

$$v = \mp a[(ar + \tfrac{1}{3}bs)p^2 + \tfrac{2}{3}(br + cs)pq + (\tfrac{1}{3}cr + ds)q^2],$$

$$w = \pm a(ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3).$$

Für v und w gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem $\frac{p}{q}$ in einer geraden oder ungeraden Stelle steht. Sowohl t als w sind immer ganze Zahlen, während u und v auch den Nenner 3, aber keinen anderen als diesen, haben können.

Um eine noch grössere Abkürzung als die zu erzielen, welche aus der unmittelbaren Anwendung der zuletzt genannten, für v und w immer noch etwas unbequemen Formeln hervorgeht, wollen wir den vor $\frac{r}{s}$ vorausgehenden Näherungswerth mit $\frac{r'}{s'}$, den zu $\frac{p}{q}$ gehörenden Theilnenner mit k', die vor v und w vorausgehenden, ihnen entsprechenden Zahlen mit v' und w' bezeichnen. Es ist $p = k'r + r'$ und $q = k's + s'$, folglich $r' = p - k'r$ und $s' = q - k's$. Dann haben wir:

$$w' = \mp a(ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3)$$

und

$$v' = \pm a[(ar' + \tfrac{1}{3}bs')r^2 + \tfrac{2}{3}(br' + cs')rs + (\tfrac{1}{3}cr' + ds')s^2],$$

oder, wenn wir die Werthe für r' und s' einsetzen:

$$v' = \pm a\left[\begin{matrix}[a(p-k'r) + \tfrac{1}{3}b(q-k's)]r^2 + \tfrac{2}{3}[b(p-k'r) + c(q-k's)]rs \\ + [\tfrac{1}{3}c(p-k'r) + d(q-k's)]s^2\end{matrix}\right],$$

oder:

$$v' = \pm a\left[\begin{matrix}(ap+\tfrac{1}{3}bq)r^2+\tfrac{2}{3}(bp+cq)rs+(\tfrac{1}{3}cp+dq)s^2\\ -k'(ar^3+br^2s+crs^2+ds^3)\end{matrix}\right].$$

Hieraus folgt, weil

$$\mp a(ar^3+br^2s+crs^2+ds^3) = w'$$

ist:

$$\pm a[(ap+\tfrac{1}{3}bq)r^2+\tfrac{2}{3}(bp+cq)rs+(\tfrac{1}{3}cp+dq)s^2] = v'-k'w'.$$

Wir haben nach §. 6.:

$$V =$$

$$\pm a[(ap+\tfrac{1}{3}bq)(kp+r)^2+\tfrac{2}{3}(bp+cq)(kp+r)(kq+s)+(\tfrac{1}{3}cp+dq)(kq+s)^2],$$

oder, wenn nach k geordnet wird:

$$V = \pm a\left[\begin{matrix}k^2(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3)\\ +2k[(ar+\tfrac{1}{3}bs)p^2+\tfrac{2}{3}(br+cs)pq+(\tfrac{1}{3}cr+ds)q^2]\\ +(ap+\tfrac{1}{3}bq)r^2+\tfrac{2}{3}(bp+cq)rs+(\tfrac{1}{3}cp+dq)s^2\end{matrix}\right],$$

oder:

$$V = k^2w-2kv+v'-k'w' = k(kw-2v)+v'-k'w'.$$

Auch haben wir nach §. 7.:

$$W = \mp a[a(kp+r)^3+b(kp+r)^2(kq+s)+c(kp+r)(kq+s)^2+d(kq+s)^3],$$

oder:

$$W = \mp a\left\{\begin{matrix}k^3(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3)\\ +3k^2[(ar+\tfrac{1}{3}bs)p^2+\tfrac{2}{3}(br+cs)pq+(\tfrac{1}{3}cr+ds)q^2]\\ +3k[(ap+\tfrac{1}{3}bq)r^2+\tfrac{2}{3}(bp+cq)rs+\tfrac{1}{3}(cp+dq)s^2]\\ +ar^3+br^2s+crs^2+ds^3\end{matrix}\right\},$$

oder:

$$W = -k^3w+3k^2v-3k(v'-k'w')+w'.$$

Auch ist $\quad 3kV = \;\; 3k^3w-6k^2v+3k(v'-k'w')$

addirt: $\quad W+3kV = 2k^3w-3k^2v+w'$,

folglich:

$$W = 2k^3w-3k^2v-3kV+w' = k[k(2kw-3v)-3V]+w'.$$

Die beiden Formeln:

$$V = k(kw-2v)+v'-k'w'$$

und

$$W = k[k(2kw - 3v) - 3V] + w'$$

geben eine bedeutende Abkürzung des Verfahrens. Sie sind jedoch, weil zu ihrer Entwickelung die drei früheren Reihen benutzt wurden, erst von der vierten Reihe an zu gebrauchen.

§. 9. Wir wollen, um ihre Anwendung zu zeigen, eine cubische Gleichung wählen, die drei reelle irrationale Wurzeln hat, deren Berechnung auf directem Wege bekanntlich nicht durch die cardanische Formel, sondern trigonometrisch ausgeführt wird. Die Verwandlung in einen Kettenbruch geschieht ganz so wie für die reelle Wurzel einer cubischen Gleichung, die auch zwei imaginäre Wurzeln hat, und zwar nicht bloss für die erste der drei Wurzeln in §. 1.:

I) $$\frac{-\frac{1}{3}b + P + Q}{a},$$

sondern auch für

II) $$\frac{-\frac{1}{3}b + fP + gQ}{a}$$

und

III) $$\frac{-\frac{1}{3}b + gP + fQ}{a}.$$

Denn überall, wo in der bisherigen Rechnung $P + Q$ stand, steht bei II): $fP + gQ$ und bei III): $gP + fQ$; überall aber, wo $P^2 + Q^2$ stand, steht bei II): $gP^2 + fQ^2$, und bei III): $fP^2 + gQ^2$, indem bekanntlich $f = g^2$, $g = f^2$ und $fg = 1$, also:

$$(fP + gQ)^2 = gP^2 + fQ^2 + 2PQ$$

und

$$(gP + fQ)^2 = fP^2 + gQ^2 + 2PQ$$

ist.

Wir wählen die Gleichung:

$$5x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Ihre trigonometrisch berechneten 3 Wurzeln sind:

I) $$\frac{P + Q - \frac{4}{3}}{5} = 0{,}87224,$$

wobei $P + Q = 5{,}69452$ und $P^2 + Q^2 = 12{,}2054$;

II) $$\frac{fP + gQ - \frac{4}{3}}{5} = -1{,}32653,$$

wobei $fP + gQ = -5{,}29933$ und $gP^2 + fQ^2 = 7{,}8606$;

$$\text{III)} \quad \frac{gP+fQ-\frac{4}{3}}{5} = -0{,}34571,$$

wobei $gP+fQ=-0{,}39520$ und $fP^2+gQ^2=-20{,}0660$ ist.

Für I) haben wir:

$$\frac{P+Q-\frac{4}{3}}{5} = 0 + \frac{1}{\varphi_1}.$$

Nach §. 2. ist

$$\varphi_1 = \frac{P^2+Q^2+(ah+\frac{1}{3}b)(P+Q)+ah^2+\frac{2}{3}abh+\frac{1}{3}ac}{-a(ah^3+bh^2+ch+d)},$$

worin $h=0$, $a=5$, $b=4$, $c=-5$, $d=-2$ ist, also:

$$\varphi_1 = \frac{P^2+Q^2+\frac{4}{3}(P+Q)-\frac{25}{3}}{10} = \frac{11{,}4648}{10} = 1 + \frac{1}{\varphi_2}.$$

Der zugehörige Näherungswerth ist $\frac{1}{1}$, der vorhergehende $\frac{0}{1}$, also $r=0$, $s=1$, $p=1$, $q=1$, $t=q=1$, $u=ap+\frac{1}{3}bq=\frac{19}{3}$;

$$v=-a[(ar+\tfrac{1}{3}bs)p^2+\tfrac{2}{3}(br+cs)pq+(\tfrac{1}{3}cr+ds)q^2]=-5\left(\frac{4}{3}-\frac{10}{3}-2\right)=20;$$

$$w= a(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3)=5(5+4-5-2)=10.$$

Demnach

$$\varphi_2 = \frac{P^2+Q^2+\frac{19}{3}(P+Q)+20}{10} = \frac{68{,}2707}{10} = 6 + \frac{1}{\varphi_3}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{6}{7}$, also $p=6$, $q=7$, $t=7$, $u=ap+\frac{1}{3}bq=\frac{118}{3}$.

Es ist $w=10$, $w'=10$, $v=20$ $v'=-\frac{25}{3}$, $k=6$, $k'=1$, also:

$$V=k(kw-2v)+v'-k'w' = 120-\frac{25}{3}-10=\frac{305}{3},$$

$$W=k[k(2kw-3v)-3V]+w'=6(360-305)+10=340.$$

Also:

$$\varphi_3 = \frac{7(P^2+Q^2)+\frac{118}{3}(P+Q)+\frac{305}{3}}{340} = \frac{411{,}089}{340} = 1 + \frac{1}{\varphi_4}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{7}{8}$; also $p=7$, $q=8$, $t=8$, $u=5.7+\frac{4}{3}.8 = \frac{137}{3}$.

Nun ist $w=340$, $w'=10$, $v=\frac{305}{3}$, $v'=20$, $k=1$, $k'=6$, also:

$$V=k(kw-2v)+v'-k'w'=340-\frac{610}{3}+20-60=\frac{290}{3},$$

$$W=k[k(2kw-3v)-3V]+w'=680-305-290+10=95,$$

$$\varphi_4 = \frac{8(P^2+Q^2)+\frac{137}{3}(P+Q)+\frac{290}{3}}{95} = \frac{974{,}4594}{95} = 10 + \frac{1}{\varphi_5}.$$

Die Entwickelung stellt sich also folgendermassen dar:

$$\frac{P+Q-\frac{4}{3}}{5} = 0 + \frac{1}{\varphi_1}, \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{0}{1};$$

$$\varphi_1 = \frac{P^2+Q^2+\frac{4}{3}(P+Q)-\frac{25}{3}}{10} = 1 + \frac{1}{\varphi_2}, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{1};$$

$$\varphi_2 = \frac{P^2+Q^2+\frac{19}{3}(P+Q)+20}{10} = 6 + \frac{1}{\varphi_3}, \quad \mathfrak{A}_3 = \frac{6}{7};$$

$$\varphi_3 = \frac{7(P^2+Q^2)+\frac{118}{3}(P+Q)+\frac{305}{3}}{340} = 1 + \frac{1}{\varphi_4}, \quad \mathfrak{A}_4 = \frac{7}{8};$$

$$\varphi_4 = \frac{8(P^2+Q^2)+\frac{137}{3}(P+Q)+\frac{290}{3}}{95} = 10 + \frac{1}{\varphi_5}, \quad \mathfrak{A}_5 = \frac{76}{87};$$

u. s. w.

Ebenso ist die Entwickelung der Wurzel II); nur muss, weil sie negativ ist, ihr Gegentheil genommen werden. Wir setzen daher $-y$ statt x in die Gleichung $5x^3+4x^2-5x-2=0$. Also:

$$5y^3-4y^2-5y+2=0.$$

Nun haben wir $a=5, b=-4, c=-5, d=2$. Die Cubikwurzeln P und Q haben jetzt den entgegengesetzten Werth von vorher, und wenn wir, der Vergleichung wegen, den vorigen Werth von P und Q beibehalten, so muss der Coefficient von $fP+gQ$ jetzt entgegengesetzt, also nicht $=ap+\frac{1}{3}bq$, sondern $=-ap-\frac{1}{3}bq$ genommen werden. Ausserdem verfahren wir wie vorher. Wir haben:

$$\frac{-(fP+gQ)+\frac{4}{3}}{5}=1{,}32653=1+\frac{1}{\varphi_1},$$

$$\varphi_1=\frac{gP^2+fQ^2-(ah+\frac{1}{3}b)(fP+gQ)+a^2h^2+\frac{2}{3}abh+\frac{1}{3}ac}{-a(ah^3+bh^2+ch+d)},$$

und, weil $h=1$,

$$\varphi_1=\frac{gP^2+fQ^2-\frac{11}{3}(fP+gQ)+\frac{10}{3}}{10}=\frac{30{,}6248}{10}=3+\frac{1}{\varphi_2}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{4}{3}$, der vorige $\frac{1}{1}$, also $p=4$, $q=3$, $r=1$, $s=1$, $t=3$, $u=-ap-\frac{1}{3}bq=-20+4=-16$;

$$v=-a[(ar+\tfrac{1}{3}bs)p^2+\tfrac{2}{3}(br+cs)pq+(\tfrac{1}{3}cr+ds)q^2]$$

$$=-5\left(\frac{176}{3}-72+3\right)=\frac{155}{3},$$

$$w=a(ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3)=5(320-192-180+54)=10.$$

Demnach

$$\varphi_2=\frac{3(gP^2+fQ^2)-16(fP+gQ)+\frac{155}{3}}{10}=\frac{160{,}0377}{10}=16+\frac{1}{\varphi_3}.$$

Der Näherungswerth ist $\frac{65}{49}$. Daher $p=65$, $q=49$, $t=49$, $u=-ap-\frac{1}{3}bq=-\frac{779}{3}$, $w=10$, $w'=10$, $v=\frac{155}{3}$, $v'=\frac{10}{3}$, $k=16$, $k'=3$,

also:

$$V=k(kw-2v)+v'-k'w'=16\left(\frac{480-310}{3}\right)+\frac{10}{3}-30=880,$$

$$W = k[k(2kw - 3v) - 3V] + w' = 16(2640 - 2640) + 10 = 10,$$

$$\varphi_3 = \frac{49(gP^2+fQ^2) - \frac{779}{3}(fP+gQ) + 880}{10} = \frac{2641,228}{10} = 264 + \frac{1}{\varphi_4}.$$

Der Näherungswerth ist: $\frac{17164}{12939}$. Also:

$$\frac{-(fP+gQ)+\frac{4}{3}}{5} = 1 + \frac{1}{\varphi_1}, \quad \mathfrak{N}_1 = \frac{1}{1};$$

$$\varphi_1 = \frac{gP^2+fQ^2 - \frac{11}{3}(fP+gQ) + \frac{10}{3}}{10} = 3 + \frac{1}{\varphi_2}, \quad \mathfrak{N}_2 = \frac{4}{3};$$

$$\varphi_2 = \frac{3(gP^2+fQ^2) - 16(fP+gQ) + \frac{155}{3}}{10} = 16 + \frac{1}{\varphi_3}, \quad \mathfrak{N}_3 = \frac{65}{49};$$

$$\varphi_3 = \frac{49(gP^2+fQ^2) - \frac{779}{3}(fP+gQ) + 880}{10} = 264 + \frac{1}{\varphi_4}, \quad \mathfrak{N}_4 = \frac{17164}{12939};$$

u. s. w.

Für die Wurzel III), deren ebenso auszuführende Entwickelung hier nicht speciell gegeben werden soll, hat man:

$$\frac{-(gP+fQ)+\frac{4}{3}}{5} = 0 + \frac{1}{\varphi_1}, \quad \mathfrak{N}_1 = \frac{0}{1};$$

$$\varphi_1 = \frac{fP^2+gQ^2 + \frac{4}{3}(gP+fQ) - \frac{25}{3}}{-10} = 2 + \frac{1}{\varphi_2}, \quad \mathfrak{N}_2 = \frac{1}{2};$$

$$\varphi_2 = \frac{2(fP^2+gQ^2) - \frac{7}{3}(gP+fQ)}{-35} = 1 + \frac{1}{\varphi_3}, \quad \mathfrak{N}_3 = \frac{1}{3};$$

$$\varphi_3 = \frac{3(fP^2+gQ^2) - (gP+fQ) - \frac{70}{3}}{-10} = 8 + \frac{1}{\varphi_4}, \quad \mathfrak{N}_4 = \frac{9}{26};$$

u. s. w.

Man erhält hier die Nenner vom zweiten an negativ, doch darf man nicht durch Multiplication von Zähler und Nenner mit — 1 beide positiv machen, weil sonst die in §. 6. und §. 7. bewiesenen Gesetze nicht mehr zutreffen würden.

§. 10. Die Betrachtung der cubischen Kettenbrüche liesse sich zwar noch bedeutend ausdehnen. Doch sind die Haupteigenschaften derselben in vorstehender Abhandlung hinreichend auseinander gesetzt worden. Ihre Anwendung auf die Lösung cubischer diophantischer Gleichungen, die sich hauptsächlich an die Formel

$$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = \pm \frac{w}{a}$$

knüpft, erfordert eine besondere Untersuchung. Jedenfalls verspricht ihr Einfluss auf die Lösung cubischer unbestimmter Gleichungen ebenso bedeutend zu werden, wie der Einfluss der qaudratischen Kettenbrüche auf die Lösung der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades.

V.

Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern.

Von

Herrn Dr. *Theodor Wittstein*,

Professor in Hannover.

---

§. 1.

Unter der Wahrscheinlichkeit einer *n*jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben, versteht man bekanntlich den Quotienten, welcher sich ergiebt, wenn man die aus einer gewissen Gruppe *n*jähriger Personen im Laufe eines Jahres Gestorbenen durch die Lebenden dieser Gruppe im Anfange des Jahrs dividirt. Es sei w diese Wahrscheinlichkeit. Ist dieselbe bekannt, so erhält man daraus für eine beliebige Anzahl *n*jähriger Personen, welche $= a$ sei, die Anzahl der binnen Jahresfrist Sterbenden $= aw$, und folglich die Anzahl der nach Ablauf eines Jahres noch Lebenden $= a(1-w)$. Die Differenz $1-w$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, nach Jahresfrist noch am Leben zu sein: man kann sie direct erhalten, wenn man die am Schlusse des Jahres noch Lebenden durch die Lebenden im Anfange des Jahres dividirt.

Die Ermittelung der Werthe von w für die verschiedenen ganzen Werthe von n, anfangend mit $n = 0$ und aufhörend mit dem höchsten erfahrungsmässig vorkommenden Lebensalter, bildet eine der Fundamental-Aufgaben der Bevölkerungsstatistik, und insbesondere beruhen auf ihr alle richtig construirten Mortalitätstafeln, wie dies noch neuerlich mit Recht Dr. Fischer in seinen trefflichen „Grundzügen des auf die menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens" (Oppenheim 1860) so nachdrucksvoll hervorgehoben hat. Indessen ist diese Ermittelung aus einem vorgelegten statistischen Material nicht immer ganz so einfach, wie es die obige Definition der Wahrscheinlichkeit anzuzeigen scheint. Eine geschlossene Gesellschaft — sei es die Bevölkerung eines Landes oder eine zu besonderen

Zwecken, z. B. einer Versicherung, zusammengetretene Gesellschaft — hat in der Regel im Laufe des Jahres successive Zugänge und Abgänge von Mitgliedern zu erleiden, welche resp. vor dem Zugange und nach dem Abgange sich der Beobachtung entziehen. Die innerhalb der Gesellschaft im Laufe eines Jahres beobachteten Todesfälle gehören nicht rein derjenigen Personengruppe an, welche im Anfange dieses Jahres die Gesellschaft bildete; theils sind deren durch die Ausscheidenden verloren gegangen, theils sind durch die Eintretenden neue hinzugekommen, und demnach kann die Division der beobachteten Todesfälle durch den Bestand der Gesellschaft im Anfange des Jahres im Allgemeinen nicht den wahren Werth der gesuchten Wahrscheinlichkeit liefern.

Wie nun dessen ungeachtet mit Rücksicht auf die successiv eintretenden und ausscheidenden Mitglieder der wahre Werth der Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben, aus beobachteten Zahlen sich bestimmen lasse, das ist die Aufgabe, welche wir hier einer kurzen Betrachtung unterwerfen wollen. Zwar hat diese Aufgabe schon anderweitige Behandlung gefunden, namentlich von Dr. Heym in der „Rundschau der Versicherungen (Jahrgang 1853) und von Dr. Fischer in den schon erwähnten „Grundzügen u. s. w.". Aber wir glauben nicht, dass dadurch eine neue Behandlung des Problems überflüssig gemacht werde, und geben unsere Lösung um so mehr, als wir damit Gelegenheit erhalten, auch einige verwandte, bisher nicht hinreichend erörterte Punkte einer Besprechung zu unterziehen.

§. 2.

Wenn man die Wahrscheinlichkeit einer $n$jährigen Person, in einem bevorstehenden Bruchtheile eines Jahres zu sterben, bestimmen will, so ist zunächst die Frage zu erledigen, nach welchem Gesetze in einer Personengruppe gleichen Alters, welche weder Zugang noch Abgang erfährt, die Sterbenden eines Jahres sich über dieses Jahr vertheilen. In dieser Beziehung vereinigen aber alle Gründe sich dahin, in einer allgemeinen Untersuchung, wie sie hier beabsichtigt wird, als die plausibelste aller möglichen Annahmen eine gleichmässige Vertheilung der Sterbenden über das Jahr erscheinen zu lassen, oder mit andern Worten, die Sterblichkeits-Curve für die Dauer dieses Jahres als gerade Linie vorauszusetzen.

Denn einerseits wird durch die Sterbefälle im Laufe des Jahres der Bestand der Gesellschaft successiv kleiner, und einer

kleineren Personenzahl entspricht ceteris paribus auch eine kleinere Anzahl Sterbefälle; aber zugleich wird mit zunehmendem Alter die Wahrscheinlichkeit, binnen einer gegebenen Zeit zu sterben, meistentheils grösser, mithin müssen aus diesem Grunde die Sterbefälle successive sich häufen, und beide Ursachen vereinigt haben deshalb im Allgemeinen den Erfolg, die Sterbefälle des Jahres einer gleichmässigen Vertheilung nahe zu bringen. Andererseits ist erfahrungsmässig die Sterblichkeit in den verschiedenen Monaten des Jahres merklich verschieden; eine allgemeine Untersuchung, welche kein bestimmtes Datum als Anfang des Jahres ansetzt, kann demnach nichts Anderes thun, als diese Verschiedenheiten als ausgeglichen anzunehmen, d. h. wiederum, sie muss die Sterbefälle gleichmässig über das Jahr vertheilen. Endlich ist die gleichmässige Vertheilung der Sterbefälle die einfachste Hypothese, welche man machen kann, ohne aus dem betreffenden Jahre herauszutreten; die Wirklichkeit wird von ihr abweichen, aber zuversichtlich nicht mehr, als von irgend welchen künstlicheren Hypothesen, zwischen denen sie wie eine Art Mittel sich halten wird.

Es bedeute nun x irgend einen zwischen 0 und 1 enthaltenen Bruch. Wenn, wie im vorigen Paragraphen, a eine Anzahl $n$jähriger Personen und w die Wahrscheinlichkeit einer $n$jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben, bedeutet, so sterben von dieser Anzahl im Laufe des Jahres aw Personen, und es erleben den Schluss des Jahres oder erreichen das $(n+1)$te Lebensjahr $a(1-w)$ Personen. Ferner sterben nach der Hypothese der gleichmässigen Vertheilung der Sterbefälle innerhalb des Bruchtheils x des Jahres awx Personen, und es durchleben diesen Bruchtheil oder erreichen $(n+x)$ Lebensjahre $a(1-wx)$ Personen.

Daraus ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, den Schluss des Jahres, d. h. das Alter $n+1$ zu erleben, der Werth:

$$(1) \quad \frac{1-w}{1-wx},$$

und für die Wahrscheinlichkeit derselben Person, vor dem Schlusse des $(n+1)$ten Lebensjahres zu sterben, der Werth:

$$(2) \quad 1-\frac{1-w}{1-wx}, \text{ d. i. } \frac{w(1-x)}{1-wx}.$$

Will man die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, noch ein Jahr zu durchleben, oder binnen Jahresfrist zu sterben, bestimmen, so greift dieselbe in das folgende

Lebensjahr über. Auch in diesem Jahre vertheilen wir wieder die Sterbefälle des Jahres nach der obigen Hypothese. Es sei w' die Wahrscheinlichkeit einer $(n+1)$jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben. Nach dem Obigen leben von a Personen, welche $n$jährig sind, im Alter $n+1$ noch $a(1-w)$, folglich im Alter $n+1+x$ noch $a(1-w)(1-w'x)$. Mithin hat die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, noch ein Jahr zu leben, den Werth:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \frac{(1-w)(1-w'x)}{1-wx},$$

und die Wahrscheinlichkeit derselben Person, binnen Jahresfrist zu sterben, den Werth:

$$1-\frac{(1-w)(1-w'x)}{1-wx},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(4) \ldots\ldots\ldots w+\frac{(1-w)(w'-w)}{1-wx}x.$$

Dieser Werth (4) reducirt sich für $x=0$ auf w und für $x=1$ auf w', wie es auch sein muss, und er stellt überhaupt die Art und Weise dar, wie mit wachsendem x allmälig w in w' übergeht. Doch muss man sich hüten, diesem Ausdrucke absolute Richtigkeit zuzuschreiben; denn er beruht auf einer Hypothese, obwohl auf der einfachsten und plausibelsten Hypothese, welche man treffen kann, nämlich auf der Gleichmässigkeit des Absterbens innerhalb des Jahres n bis $n+1$, so wie innerhalb des Jahres $n+1$ bis $n+2$.

§. 3.

Wenngleich die Hypothese der gleichmässigen Vertheilung der Sterbefälle innerhalb eines Jahres ohne Zweifel die naturgemässeste von allen ist, welche man machen kann, so wollen wir ihr dennoch zur Vergleichung noch eine zweite Hypothese zur Seite stellen, auf die man eben sowohl nicht ohne Grund verfallen könnte.

In der Hypothese des gleichmässigen Absterbens ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines bevorstehenden unendlich kleinen Zeittheils dx zu sterben, nicht zu allen Zeiten dieselbe. Es sei y die Anzahl der Lebenden zur Zeit x, so dass x und y, wie Coordinaten angesehen, die Sterblichkeits-Curve innerhalb

des zu betrachtenden Jahres festlegen. Der Sterbenden in der Zeit dx sind alsdann $-dy$; folglich hat die Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieser Zeit zu sterben, den Ausdruck

$$-\frac{dy}{y}.$$

Nun ist für die Hypothese des gleichmässigen Absterbens aus dem vorigen Paragraphen:

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = a(1 - wx),$$

oder die Sterblichkeits-Curve reducirt sich für diesen Fall, wie schon angezeigt worden, auf eine gerade Linie. Daraus folgt:

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad -\frac{dy}{y} = \frac{wdx}{1 - wx},$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, binnen der Zeit dx zu sterben, wird mit wachsendem x gleichfalls wachsen; oder genauer, sie ist umgekehrt proportional der Anzahl der im Anfange dieser Zeit dx noch Lebenden. Für $x = 0$ oder im Anfange des Jahres reducirt sich diese Wahrscheinlichkeit auf wdx, und für $x = 1$ oder am Schlusse des Jahres auf $\frac{wdx}{1 - w}$.

Wenn man dieselbe Betrachtung für das folgende Jahr wiederholt, so wird aus demselben Grunde dieselbe Wahrscheinlichkeit im Anfange des folgenden Jahres, wo w' für w eintritt, den Werth $w'dx$ annehmen, und mitbin würde die Hypothese des gleichmässigen Absterbens ihre vollkommene Berechtigung haben, wenn man allgemein setzen dürfte:

$$\frac{w}{1 - w} = w'.$$

Aber der Zusammenhang zwischen den Werthen w und w' zweier auf einander folgenden Jahre ist theoretisch gar nicht bekannt. Die Mortalitätstafeln lehren darüber nur das Eine, dass die Werthe der auf einander folgenden Wahrscheinlichkeiten, binnen Jahresfrist zu sterben, mit alleiniger Ausnahme der höchsten und niedrigsten Lebensalter, nur um geringe Grössen von einander differiren. Man vergleiche z. B. die angehängte Tabelle, wo die Werthe von w in der Columne 2. vom 23sten bis zum 45sten Lebensjahre von dem Werthe 0,012 beharrlich um weniger als eine halbe Einheit der dritten Decimalstelle verschieden sind.

Aus diesem letzten Grunde scheint nun eine andere Hypothese als naturgemäss sich darzubieten, um die Sterblichkeit im

Laufe eines Jahres darzustellen, nämlich die: die Wahrscheinlichkeit, binnen einer Zeit von gegebener Dauer zu sterben, innerhalb des Jahres als constant anzunehmen, d. h. als unabhängig von dem Anfangstermine dieser Zeit, für welchen die Wahrscheinlichkeit gilt. Damit wird allerdings die Gleichmässigkeit des Absterbens sofort gestört; denn aus dieser Annahme folgt unmittelbar, dass die in gleichen Zeittheilen Sterbenden den im Anfange dieser Zeittheile Lebenden proportional sind, oder mit anderen Worten, dass im Verlaufe des Jahres die Sterbefälle in gleichem Verhältnisse mit der abnehmenden Zahl der Lebenden successiv weniger dicht fallen.

Die Forderung, dass die Wahrscheinlichkeit, binnen einer Zeit von gegebener Dauer zu sterben, als constant angenommen werden soll, wird für eine beliebige Dauer dieser Zeit erfüllt sein, so bald ihr für einen unendlich kleinen Zeittheil dx Genüge geschieht. Hieraus lässt aber das Gesetz des Absterbens sich analytisch darstellen. Nennt man nämlich λ eine vorläufig unbekannte Constante, so muss man mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen haben:

$$-\frac{dy}{y} = \lambda dx,$$

woraus durch Integration folgt:

$$y = a \,.\, e^{-\lambda x},$$

indem die Integrations-Constante so bestimmt ist, dass wie oben $y = a$ für $x = 0$ wird. Hieraus wird, wenn man vorübergehend mit y_0 und y_1 die Lebenden resp. für $x = 0$ und $x = 1$ bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit einer $n$jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben,

$$\frac{y_0 - y_1}{y_0} = 1 - e^{-\lambda},$$

und da diese Wahrscheinlichkeit $= w$ ist, so folgt:

$$e^{-\lambda} = 1 - w.$$

Mithin ist endlich:

$$(7) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad y = a \,.\, (1 - w)^x,$$

d. h. die Lebenden bilden eine abnehmende geometrische Progression oder die Sterblichkeits-Curve ist eine logarithmische Linie; und die Wahrscheinlichkeit, binnen der Zeit dx zu sterben, nimmt den Werth an:

$$(8) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad -\frac{dy}{y} = -l(1 - w) \,.\, dx,$$

welche beiden Gleichungen den Gleichungen (5) und (6) der vorigen Hypothese correspondiren.

Daraus ergiebt sich ferner für die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, den Schluss des Jahres, d. h. das Alter $n+1$ zu erleben, der Werth:

$$(9) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{y_1}{y} = (1-w)^{1-x},$$

und für die Wahrscheinlichkeit derselben Person, vor dem Schlusse des $(n+1)$ten Lebensjahres zu sterben, der Werth:

$$(10) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{y-y_1}{y} = 1-(1-w)^{1-x}.$$

Was die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, noch ein Jahr zu durchleben, anbetrifft, so wird dieselbe hier:

$$(11) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1-w)^{1-x}(1-w')^{x},$$

und die Wahrscheinlichkeit derselben Person, binnen Jahresfrist zu sterben:

$$(12) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1-(1-w)^{1-x}(1-w')^{x},$$

was in ähnlicher Weise bewiesen wird, wie es nach der ersten Hypothese am Schlusse des vorigen Paragraphen geschehen ist.

§. 4.

Wenden wir uns nun zu der Betrachtung der im Laufe des Jahres successive eintretenden und ausscheidenden Personen. Da das Eintreten, sowie das Ausscheiden im Allgemeinen einem nachweisbaren Gesetze nicht unterliegt, so bleibt hier die einzige mögliche Annahme die, sowohl die Eintretenden, als auch die Ausscheidenden eines Jahres gleichmässig über dieses Jahr zu vertheilen. Was die im Laufe des Jahres eintretenden Sterbefälle aus einerlei Personengruppe anlangt, so werden wir hier zunächst der ersten Hypothese (§. 2.) folgen und dieselben gleichfalls gleichmässig über das Jahr vertheilt vorauszusetzen.

Aufgabe. Es seien a Personen vom Alter n zu einer Gesellschaft zusammengetreten. Im Laufe eines Jahres treten b Personen desselben Alters wie die Mitglieder der Gesellschaft successive ein und scheiden c Personen successive aus. Die Anzahl der innerhalb der Gesellschaft im Laufe des Jahres beobachteten Todesfälle sei $= m$, und der Bestand der Gesellschaft

am Schlusse des Jahres sei $= a'$. Man sucht aus diesen Daten die Wahrscheinlichkeit w einer $n$jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben.

Auflösung. Unter den gegebenen Grössen hat man sofort die Beziehung:

$$(13) \quad a + b - c - m = a',$$

denn es ist unmittelbar klar, dass wenn man von der Summe des anfänglichen Bestandes und der Eingetretenen die Summe der Ausgeschiedenen und der beobachteten Todesfälle subtrahirt, die Differenz den Bestand der Gesellschaft am Schlusse des Jahres ergeben muss. Derselbe Bestand am Schlusse des Jahres kann aber auch durch die Grösse w ausgedrückt werden, nämlich wie folgt:

1) Die a Personen für sich, abgesehen von jedem Zugange und Abgange, geben am Schlusse des Jahres einen Bestand

$$(14) \quad = a(1-w).$$

2) Werden die b Eintretenden gleichmässig über das Jahr vertheilt, so kommen auf den unendlich kleinen Zeittheil dx an Eintretenden bdx. Um hiervon die Ueberlebenden am Schlusse des Jahres zu finden, hat man diesen Betrag mit der Wahrscheinlichkeit (1), den Schluss des Jahres zu erleben, zu multipliciren. Dies giebt:

$$\frac{(1-w)bdx}{1-wx}.$$

Die Summe der Ueberlebenden aus allen b Eintretenden wird demnach durch das Integral dargestellt:

$$(15) \quad \int_0^1 \frac{(1-w)bdx}{1-wx} = -\frac{b}{w}(1-w)\,l(1-w).$$

3) Werden die c Ausscheidenden gleichmässig über das Jahr vertheilt, so erhält man daraus auf dieselbe Weise die Summe der Ueberlebenden am Schlusse des Jahres:

$$(16) \quad = -\frac{c}{w}(1-w)\,l(1-w).$$

Nun muss offenbar die Summe von (14) und (15), vermindert um (16), den Bestand der Gesellschaft am Schlusse des Jahres ergeben. Man hat also:

$$(17) \quad a(1-w) - \frac{b-c}{w}(1-w)\,l(1-w) = a',$$

und durch Elimination von a' aus (13) und (17) folgt:

$$(18) \ldots \quad aw + (b-c)\left[1 + \frac{1}{w}(1-w)\,l(1-w)\right] = m.$$

Diese Gleichung ist einer directen Auflösung für w nur in dem besonderen Falle fähig, wo man hat $b = c$, und giebt in diesem Falle $w = \frac{m}{a}$, wie auch an sich klar ist. Denn wenn jeder Ausscheidende sofort durch einen Eintretenden ersetzt wird, so liegt die Sache für die Rechnung genau ebenso, als ob gar kein Zugang und Abgang stattgefunden hätte.

Um in anderen Fällen die Gleichung (18) zur Bestimmung von w brauchbar zu machen, entwickele man den in Klammern [ ] enthaltenen Ausdruck nach Potenzen von w. Dann kommt:

$$(19) \ldots \quad aw + (b-c)\left(\frac{w}{1.2} + \frac{w^2}{2.3} + \ldots\right) = m,$$

woraus man erhält:

$$w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c) + \frac{1}{6}(b-c)w + \ldots},$$

und wenn man hierin die rechte Seite wieder nach Potenzen von w entwickelt:

$$(20) \ldots \quad w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c)}\left(1 - \frac{\frac{1}{6}(b-c)}{a + \frac{1}{2}(b-c)} \cdot w \ldots\right).$$

Diese Gleichung kann auf bekannte Weise zur approximativen Berechnung von w gebraucht werden. Man hat nämlich als erste Annäherung:

$$(21) \ldots \quad w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c)},$$

und wenn man diesen Werth auf der rechten Seite der Gleichung (20) substituirt, so erhält man als zweite Annäherung:

$$(22) \ldots \quad w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c)} - \frac{\frac{1}{6}(b-c)m^2}{[a + \frac{1}{2}(b-c)]^3}.$$

Um den Grad dieser Annäherung in Zahlen zu prüfen, nehmen wir aus den Mittheilungen über die Ergebnisse des 25jährigen Bestehens der Lebensversicherungs-Bank in Gotha (s. d. „Rundschau der Versicherungen", Jahrgang 1855) die Summen aus sämmtlichen Lebensaltern, wo

$$a = 240412, \quad b = 27210,$$
$$c = 4264, \quad m = 4521,$$

und finden als erste Annäherung aus (21):

$$w = 0{,}01794867,$$

und für das Ergänzungsglied in (22):

$$-0{,}00000489,$$

folglich als zweite Annäherung:

$$w = 0{,}01794378.$$

Man darf hieraus wohl allgemein schliessen, dass für die Zugänge und Abgänge in Lebensversicherungs-Anstalten schon die Formel (21) ein hinreichend genaues Resultat giebt. Denn es hat keinen Sinn, die Werthe der Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben, auf mehr als vier oder höchstens fünf Decimalstellen zu entwickeln, da die statistischen Data, auf denen diese Werthe beruhen, selbst kaum eine so grosse Genauigkeit beanspruchen können. Nur für sehr grosse Werthe von b oder c dürfte es nöthig werden, das Ergänzungsglied in (22) in Betracht zu ziehen.

§. 5.

Die vorstehende Auflösung erleidet einige Aenderung, wenn man in Betreff der Vertheilung der Sterbefälle über das Jahr der zweiten Hypothese (§. 3.) folgt, in welcher die Wahrscheinlichkeit, binnen einer bevorstehenden unendlich kleinen Zeit zu sterben, als constant angenommen wird.

Werden nämlich die b Eintretenden gleichmässig über das Jahr vertheilt, so dass auf den unendlich kleinen Zeittheil dx an Eintretenden bdx kommen, und will man von diesen letzteren die Ueberlebenden am Schlusse des Jahres finden, so hat man ihren Betrag mit der Wahrscheinlichkeit (9), den Schluss des Jahres zu erleben, zu multipliciren. Dies giebt:

$$(1-w)^{1-x}\, bdx.$$

Die Summe der Ueberlebenden aus allen b Eintretenden wird demnach hier durch das Integral dargestellt:

$$(23) \quad \ldots \quad \int_0^1 (1-w)^{1-x}\, bdx = -\frac{bw}{l(1-w)}.$$

Ebenso erhält man aus den c Ausscheidenden die Summe der Ueberlebenden am Schlusse des Jahres:

$$(24) \ldots\ldots\ldots = -\frac{cw}{l(1-w)}.$$

Diese beiden Ausdrücke (23) und (24) treten an die Stelle der beiden obigen (15) und (16). Folglich erhält man weiter statt (17):

$$(25) \ldots\ldots\ldots a(1-w) - \frac{(b-c)w}{l(1-w)} = a'$$

und statt (18):

$$(26) \ldots\ldots aw + (b-c)\left[1 + \frac{w}{l(1-w)}\right] = m,$$

und statt (19):

$$(27) \ldots\ldots aw + (b-c)\left(\frac{w}{2} + \frac{w^2}{12} + \ldots\right) = m,$$

woraus

$$w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c) + \frac{1}{12}(b-c)w + \ldots},$$

und durch weitere Entwickelung:

$$(28) \ldots w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c)}\left(1 - \frac{\frac{1}{12}(b-c)}{a + \frac{1}{2}(b-c)} w \ldots\right).$$

Diese Gleichung liefert als erste Annäherung für w genau denselben Werth wie (21); dagegen die zweite Annäherung giebt:

$$(29) \ldots\ldots w = \frac{m}{a + \frac{1}{2}(b-c)} - \frac{\frac{1}{12}(b-c)m^2}{[a + \frac{1}{2}(b-c)]^3},$$

wo das Ergänzungsglied die Hälfte des obigen in (22) beträgt.

Für die Praxis ist, wie aus dem Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgeht, der Unterschied der beiden Formeln (22) und (29) vollkommen unerheblich.

§. 6.

Die bis hieher aufgestellten beiden Hypothesen über die Vertheilung der Sterbefälle einer und derselben Personengruppe über das Jahr haben, in ihrer Anwendung auf das Problem des §. 4., das bemerkenswerthe Resultat geliefert, dass die erste Annäherung für die Unbekannte w in beiden vollkommen übereinstimmende Werthe giebt, welche durch die Gleichung (21) dargestellt werden. Erst die zweite Annäherung fügt Correctionen von ver-

schiedenen Werthen hinzu, deren Betrag jedoch so gering bleibt, dass er, wie sich gezeigt hat, für die Anwendungen in der Regel unberücksichtigt bleiben darf. Daraus folgt allerdings zunächst, dass es im vorliegenden Falle für die Praxis so gut wie gleichgültig ist, welche der beiden Hypothesen über die Vertheilung der Sterbefälle man als Grundlage der Rechnung ansehen will. Aber es ist theoretisch nicht ohne Interesse, auch die Frage zu erörtern: ob nicht eine Vertheilung der Sterbenden über das Jahr von solcher Beschaffenheit sich treffen lasse, dass der gesuchte Werth von w genau durch die Gleichung (21) dargestellt wird.

Diese Frage kann beantwortet werden wie folgt:

Aus den Entwickelungen der beiden vorigen Paragraphen ergiebt sich, dass die Hypothese über die Vertheilung der Sterbefälle für das in Rede stehende Problem zu nichts Anderem gebraucht wird, als zur Gewinnung eines Ausdrucks für die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, das Alter $n+1$ zu erleben, oder vor dem Ablaufe des $(n+1)$ten Lebensjahres zu sterben. Die betreffenden Ausdrücke nach der ersten und zweiten Hypothese finden sich unter (1), (2) und (9), (10). So lange daher über die Vertheilung der Sterbenden keine Bestimmung getroffen ist, bezeichne man die Wahrscheinlichkeit einer $(n+x)$jährigen Person, vor dem Ablaufe des $(n+1)$ten Lebensjahres zu sterben, allgemein mit $f(x)$; also die Wahrscheinlichkeit derselben Person, das Alter $n+1$ zu erleben, mit $1-f(x)$, wo über die Function $f(x)$ vorläufig nur das feststeht, dass man haben muss:

(30) . . . . $f(0)=w$.

Mit Hülfe dieses allgemeinen Ausdrucks wird nun, nach derselben Schlussweise, wie in den beiden vorigen Paragraphen, die Summe der Ueberlebenden am Schlusse des Jahres aus den b Eintretenden durch das Integral dargestellt:

$$b\int_0^1 [1-f(x)]\,dx,$$

und ebenso die Summe der Ueberlebenden aus den c Ausscheidenden durch das Integral:

$$c\int_0^1 [1-f(x)]\,dx.$$

Folglich muss man statt der Gleichung (17) haben:

$$(31) \;.\;.\;.\; a(1-w)+(b-c)\int_0^1 [1-f(x)]dx = a',$$

und statt der Gleichung (18):

$$(32) \;.\;.\;.\;.\;.\; aw+(b-c)\int_0^1 f(x)dx = m.$$

Soll nun hieraus, wie verlangt wird, für w der Werth (21) hervorgehen, so muss diese Gleichung sich reduciren auf

$$(33) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; aw+\tfrac{1}{2}(b-c)w = m,$$

mithin muss man haben:

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}w,$$

oder mit Rücksicht auf (30), die Function $f(x)$ ist an die Bedingung gebunden:

$$(34) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}f(0).$$

Wenn man diese Gleichung geometrisch als Quadratur deutet, so fordert sie die Herstellung einer Curve von solcher Beschaffenheit, dass die von ihr begrenzte Fläche, von $x=0$ bis $x=1$ genommen, inhaltsgleich dem halben Rechteck aus der Abscisse von 0 bis 1 und der Ordinate im Anfangspunkte wird. Dieser Forderung kann offenbar durch unzählig viele Curven Genüge geschehen, welche das genannte Rechteck halbiren. Wenn man aber auf die Natur der Aufgabe Rücksicht nimmt, nach welcher $f(x)$ mit wachsendem x abnehmen muss, und zugleich für diese Abnahme das möglichst einfachste Gesetz auswählt, so reducirt die gesuchte Curve sich auf eine gerade Linie, nämlich die Diagonale des Rechtecks; oder es wird:

$$(35) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; f(x) = w(1-x),$$

d. h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist proportional dem noch zu durchlebenden Theile des Jahres.

Nennt man ferner, wie im §. 3., y die Anzahl der Lebenden zur Zeit x, so dass x und y die Coordinaten der Sterblichkeits-Curve innerhalb des betrachteten Jahres ausdrücken, und berücksichtigt, dass $a(1-w)$ die Lebenden für $x=1$ bedeuten, so kann man statt dieser letzten Gleichung auch schreiben:

$$1 - \frac{a(1-w)}{y} = w(1-x),$$

woraus:

$$(36) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{a}{1 + \frac{w}{1-w}x},$$

welches die Gleichung der Sterblichkeits-Curve ist.

Daraus erhält man für die Sterbenden in der unendlich kleinen Zeit dx den Ausdruck:

$$-dy = \frac{a}{(1 + \frac{w}{1-w}x)^2} \cdot \frac{w}{1-w}dx,$$

oder:

$$(37) \quad \ldots\ldots \quad -dy = \frac{y^2}{a} \cdot \frac{w}{1-w}dx,$$

d. h. die Sterbenden in den unendlich kleinen Zeittheilen dx nehmen in demselben Verhältnisse ab, wie die Quadrate der Lebenden im Anfange dieser Zeittheile. Sie fallen mithin im Verlaufe des Jahres successive noch weniger dicht, als in der zweiten Hypothese, wo sie in gleichem Verhältnisse mit der Zahl der Lebenden selbst abnehmen, während sie in der ersten Hypothese constant bleiben.

Ferner erhält man aus der Gleichung (37) für die Wahrscheinlichkeit, binnen der unendlich kleinen Zeit dx zu sterben, den Ausdruck:

$$(38) \quad \ldots\ldots \quad -\frac{dy}{y} = \frac{y}{a} \cdot \frac{w}{1-w}dx,$$

d. h. diese Wahrscheinlichkeit nimmt ab in gleichem Verhältnisse mit der Zahl der Lebenden im Anfange dieser Zeit dx, während sie in der zweiten Hypothese constant bleibt und in der ersten Hypothese im umgekehrten Verhältnisse der Zahl der Lebenden wächst.

Man wird zugestehen, dass die hier durch die beiden Gleichungen (37) und (38) näher charakterisirte Vertheilung der Sterbenden eines Jahres über dieses Jahr weit davon entfernt ist, diejenige Plausibilität zu besitzen, welche ihr zukommen müsste, um als Hypothese dieser Vertheilung zu Grunde gelegt zu werden. Nichts destoweniger ist sie bemerkenswerth genug. Sie giebt in der hier vorliegenden Aufgabe für die Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben, genau den in der Gleichung (21)

enthaltenen Werth, und da dieser Werth, welcher unter anderen Hypothesen nur als Näherungswerth erscheint, in den Anwendungen meistentheils genau genug ist, so ist es gerade die hier gefundene Vertheilung der Sterbenden, der die Praxis folgt, ohne es eigentlich zu wollen.

§. 7.

Der gesuchte Werth von w kann noch in anderer Weise genau durch die Formel (21) dargestellt werden, wenn man nämlich in den Voraussetzungen der vorigen Paragraphen folgende Aenderung trifft.

Der bisherigen Behandlung der Aufgabe §. 4. lag die Annahme zum Grunde, dass die Eintretenden, so wie die Ausscheidenden in dem Augenblicke des Eintritts und Austritts genau dasselbe Lebensalter haben, wie die resp. schon vorhandenen oder zurückbleibenden Mitglieder. Man kann aber auch die Voraussetzung machen, dass die Eintretenden und die Ausscheidenden im Augenblicke des Ein- und Austritts dasjenige Lebensalter n besitzen sollen, welches der Stamm der Gesellschaft im Anfange des Jahres hatte. Allerdings ist diese Voraussetzung für die Ausscheidenden factisch unmöglich und kann höchstens wie eine Annäherung zugelassen werden. Für die Eintretenden dagegen ist sie nicht nur zulässig, sondern wir werden auch sogleich einen Fall anführen, in welchem gerade nach dieser und keiner anderen Voraussetzung gerechnet werden muss.

Wir behalten die bisherige Bezeichnung bei. Wenn zur Zeit x eine Person von n Jahren eintritt, so hat dieselbe am Schlusse des hier betrachteten Jahres das Alter $n+1-x$ erreicht. Nach der Hypothese des gleichmässigen Absterbens (§. 2.) hat demnach die Wahrscheinlichkeit der gedachten Person, vor dem Schlusse des Jahres zu sterben, den Werth:

$$(39) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad w(1-x),$$

d. h. sie ist proportional dem noch zu durchlebenden Theile des Jahres; und die Wahrscheinlichkeit derselben Person, den Schluss des Jahres zu erleben, wird:

$$(40) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1-w(1-x).$$

Werden nun die b Eintretenden gleichmässig über das Jahr vertheilt, so dass auf den unendlich kleinen Zeittheil dx an Eintretenden bdx kommen, und will man von diesen letzteren die Ueberlebenden am Schlusse des Jahres finden, so hat man ihren

Betrag mit der Wahrscheinlichkeit (40) zu multipliciren. Dies giebt:

$$[1-w(1-x)]\,b\,dx.$$

Die Summe der Ueberlebenden aus allen b Eintretenden wird demnach durch das Integral dargestellt:

$$(41)\ \ldots \quad \int_0^1 [1-w(1-x)]\,b\,dx = b\left(1-\frac{w}{2}\right).$$

Ebenso erhält man aus den c Ausscheidenden die Summe der Ueberlebenden am Schlusse des Jahres:

$$(42)\ \ldots\ldots\ldots \quad = c\left(1-\frac{w}{2}\right).$$

Diese beiden Ausdrücke (41) und (42) treten an die Stelle der beiden obigen (15) und (16). Folglich erhält man weiter statt (17):

$$(43)\ \ldots\ldots \quad a(1-w)+(b-c)\left(1-\frac{w}{2}\right)=a',$$

und statt (18):

$$(44)\ \ldots\ldots\ldots \quad aw+(b-c)\frac{w}{2}=m,$$

woraus für w genau derselbe Werth sich ergiebt wie (21).

Man wird leicht erkennen, dass der eigentliche Grund für diese Uebereinstimmung der Resultate darin zu suchen ist, dass die Wahrscheinlichkeit (39) denselben Werth hat wie (35).

§. 8.

Es giebt einen besonderen Fall, in welchem die Voraussetzung des vorigen Paragraphen immer erfüllt ist, nämlich wenn man als Eintretende die Neugeborenen ansieht, welche im Laufe des Jahres successive in's Leben kommen. Denn es ist an sich klar, dass die Neugeborenen jederzeit mit dem Lebensalter 0 in die Gesellschaft eintreten. Wird die vorige Entwickelung auf diesen besonderen Fall übertragen, so bedeutet a die Anzahl der Neugeborenen beim Anfange des Jahres, b die Anzahl der Neugeborenen im Laufe des Jahres, m die Anzahl der Gestorbenen im Laufe des Jahres und w die Wahrscheinlichkeit eines Neugeborenen, binnen Jahresfrist zu sterben. Man hat also, indem man $c=0$ setzt,

$$(45)\ \ldots\ldots\ldots \quad aw+\tfrac{1}{2}bw=m;$$

und da hier gewöhnlich auch $a=0$ sein wird,

(46) . . . . $\frac{1}{2}bw=m,$

woraus

(47) . . . . $w=2.\frac{m}{b}.$

Diese Formel beruhet jedoch auf der Hypothese des gleichmässigen Absterbens im Laufe des Jahres (§. 2.), einer Hypothese, welche für das erste Lebensjahr des Kindes keineswegs der Wirklichkeit entspricht. Nach den gründlichen Untersuchungen von Moser (die Gesetze der Lebensdauer, Berlin 1839), welche bis jetzt als erschöpfend angesehen werden müssen, ist vielmehr das Absterben der Kinder in dem ersten Lebensjahre (und noch darüber hinaus) einem Gesetze unterworfen, vermöge dessen man statt (39) zu setzen hat:

(48) . . . . $w\sqrt[4]{1-x},$

und dadurch verwandelt sich die Gleichung (46) in:

(49) . . . . $\frac{4}{5}b.w=m,$

woraus:

(50) . . . . $w=\frac{5}{4}.\frac{m}{b}.$

Dabei ist zu erinnern, dass die Formel Moser's voraussetzt, dass die Todtgeborenen angesehen werden wie Lebendiggeborene, welche kurz nach der Geburt sterben.

Nach den Mittheilungen des statistischen Büreau für das Königreich Hannover wurden z. B. im Jahre 1855 geboren:

lebendig	55454,
todt	2208,
zusammen	57662;

und am 3. December 1855, wofür wir ohne merklichen Fehler den Jahresschluss setzen können, lebten Kinder unter 1 Jahr:

48405.

Will man hieraus die Wahrscheinlichkeit eines Neugeborenen, binnen Jahresfrist zu sterben, bestimmen, so hat man zu setzen:

$b=57662, \quad m=9257,$

woraus nach (47) oder der Hypothese des gleichmässigen Absterbens folgt:

$w=0{,}32108,$

[illegible] Moser:

[illegible] 0,20067.

[illegible] stimmt mit Moser überein, welcher als [illegible] $w = 0,2$ annimmt. Dagegen das erste [illegible]

§. 9.

[illegible] Betrachtung des vorigen Paragraphen führt, wenn man [illegible] auf andere Lebensalter, als dasjenige der Neugeborenen [illegible], zu der nachstehenden bemerkenswerthen Folgerung.

Es sei b die Anzahl derjenigen Personen einer Gesellschaft, welche im Laufe des Jahres successive das $(n+1)$te Lebensjahr vollenden, und w' die Wahrscheinlichkeit einer $(n+1)$jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben. Aus demselben Grunde, wie wir oben die Neugeborenen eines Jahres gleichmässig über das Jahr vertheilt haben, müssen wir auch die hier in Betracht kommenden erlebten Geburtstage, gleichmässig über das Jahr vertheilt voraussetzen. Nehmen wir dazu die Hypothese des gleichmässigen Absterbens, so haben wir nach (46) aus diesen b Personen bis zum Ablaufe des Jahres $\frac{1}{2}bw'$ Todesfälle. Nennt man also a' die Lebenden der Gesellschaft am Schlusse des Jahres, welche zwischen $n+1$ und $n+2$ Jahre alt sind, so hat man:

$$(51) \ldots\ldots \quad a' = b(1-\tfrac{1}{2}w').$$

Nennt man ferner a die Lebenden der Gesellschaft im Anfange des Jahres, welche zwischen n und $n+1$ Jahren stehen, und w die Wahrscheinlichkeit einer $n$jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben, so lässt sich auch a durch b ausdrücken. Man hat nämlich, um a zu erhalten, jedes Element bdx durch die Wahrscheinlichkeit (1), in welcher $1-x$ statt x zu setzen ist, zu dividiren und von dem Quotienten das Integral von 0 bis 1 zu nehmen. Dies giebt:

$$(52) \ldots\ldots \quad a = b.\frac{1-\frac{1}{2}w}{1-w}.$$

Aus (51) und (52) folgt:

$$(53) \ldots\ldots \quad \frac{a'}{a} = \frac{(1-w)(1-\frac{1}{2}w')}{1-\frac{1}{2}w},$$

welcher Ausdruck genau mit dem der Wahrscheinlichkeit (3) für

$x = \frac{1}{2}$ übereinstimmt. Man hat also den allgemeinen Satz: Wenn man in einer Gesellschaft, welche weder Zugang noch Abgang erfährt, die Lebenden am Schlusse des Jahres, welche zwischen $n+1$ und $n+2$ Jahren stehen, durch die Lebenden im Anfange des Jahres, welche zwischen n und $n+1$ Jahr alt sind, dividirt, so ergieht der Quotient genau die Wahrscheinlichkeit einer $(n+\frac{1}{2})$jährigen Person, noch ein Jahr zu leben. Daraus folgt sodann von selbst die Wahrscheinlichkeit derselben Person, binnen Jahresfrist zu sterben.

Dieser Satz drückt eine Regel aus, nach welcher schon längst die Praxis verfährt, ohne nach dem Beweise gefragt zu haben. Indessen dürfte es nicht ohne Interesse sein, hier nachgewiesen zu sehen, auf welchen Voraussetzungen diese Regel beruht und unter welchen Bedingungen allein sie richtig ist.

§. 10.

Will man die Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben, für die Mitglieder einer ganzen Bevölkerung bestimmen, alle Lebensalter zusammen gerechnet, so würde, selbst wenn man von Ein- und Auswanderung während des Jahres ganz absehen wollte (welche nach §. 4. zu behandeln ist), dennoch die Division der beobachteten Todesfälle des Jahres durch den Bestand der Bevölkerung im Anfange des Jahres noch immer ein fehlerhaftes Resultat geben. Denn die beobachteten Todesfälle enthalten zu einem merklichen Theile auch diejenigen Todesfälle in sich, welche aus den erst im Laufe des Jahres Geborenen herrühren, und diese letzten Todesfälle müssen deshalb zuvor selbständig ermittelt und von der Gesammtzahl aller Todesfälle in Abzug gebracht werden. Diese Ermittelung kann entweder nach der Formel (49) geschehen, oder auch aus dem statistischen Material selbst, falls solches dazu ausreichend sein sollte.

Es bezeichne A die Bevölkerung im Anfange des Jahres, B die Geborenen und M die Gestorbenen im Laufe des Jahres, und Ω die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Dann hat man:

$$(54) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \frac{M-m}{A},$$

wo m wie im §. 8. die Todesfälle aus den Geburten des laufenden Jahres bezeichnet; oder mit Rücksicht auf (49):

$$(55) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \frac{M-\frac{4}{5}Bw}{A},$$

wo w die Wahrscheinlichkeit eines Neugeborenen, binnen Jahresfrist zu sterben, bedeutet; oder noch allgemeiner:

$$(56) \ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \frac{M - \mu B}{A},$$

wo μ ganz allgemein und ohne jede Hypothese den Factor bedeutet, mit welchem die Geborenen B des Jahres zu multipliciren sind, um die aus ihnen im Laufe des Jahres hervorgehenden Todesfälle zu erhalten.

Der umgekehrte Werth $\frac{1}{\Omega}$ zeigt offenbar an, auf wie viel Köpfe des anfänglichen Bestandes der Bevölkerung im Laufe des Jahres je ein Todesfall kommen wird, wenn die Bevölkerung, ohne Zugang durch Neugeborene, in sich ausstirbt.

Um die Rechnung durch ein Beispiel zu erläutern, hat man aus der Volkszählung vom 3. December 1855, welche wir wieder an den Jahresschluss uns verlegt denken, die Bevölkerung des Königreichs Hannover:

$$A = 1819777,$$

und ferner an Geborenen im Jahre 1856:

lebendig	56659,
todt	2167,
zusammen	58826,

und an Gestorbenen im Jahre 1856:

39199.

Man hat also zu setzen, mit Einschluss der Todtgeborenen:

$$B = 58826, \quad M = 41366.$$

Um zunächst m zu bestimmen, kann man den aus dem Vorjahre 1855 im §. 8. gefundenen Werth $w = 0{,}20067$ benutzen, wodurch man erhält:

$$m = \tfrac{4}{5} B w = 9444.$$

Man kann aber auch aus den Zahlen des Vorjahrs im §. 8. unmittelbar den Werth von μ bestimmen, nämlich:

$$\mu = \frac{9257}{57662} = 0{,}160537,$$

woraus für $m = \mu B$ sich derselbe Werth ergiebt, wie vorhin.

Diese Rechnungen setzen voraus, dass die Sterblichkeit der Neugeborenen in zwei auf einander folgenden Jahren nahe dieselbe bleibt. Wenn eine Zählung der Kinder unter 1 Jahr für den Jahresschluss 1856 existirte, so würde man daraus unmittelbar und ohne Hypothese den Werth von m entnehmen können.

Mit den so erhaltenen Zahlen wird endlich für die Bevölkerung des Königreichs Hannover beim Jahresschluss 1855 die Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben:

$$\Omega = \frac{31922}{1819777} = 0{,}017542.$$

Wenn man dieselbe Rechnung mit Ausschluss der Todtgeborenen führt, wo also zu setzen ist:

$$B = 56659, \quad M = 39199,$$

so erhält man zunächst aus dem Vorjahr:

$$\mu = \frac{7049}{55454} = 0.127114,$$

und daraus:

$$\Omega = \frac{31997}{1819777} = 0{,}017583.$$

Offenbar würden diese beiden Werthe von Ω genau übereinstimmen, wenn das Verhältniss der Todtgeborenen zu den Lebendiggeborenen in den beiden auf einander folgenden Jahren constant gewesen wäre. Man kann deshalb füglich das Mittel nehmen und setzen:

$$\Omega = 0{,}017562, \quad \frac{1}{\Omega} = 56{,}940.$$

Der hier gefundene Werth von Ω ist übrigens, wie aus dem Obigen hervorgeht, noch nicht vollkommen richtig, sondern bedarf noch nach §. 4. einer Verbesserung durch die Ein- und Auswanderung des Jahres 1856, worüber jedoch statistisches Material nicht vorliegt.

§. 11.

Wenngleich nach dem vorigen Paragraphen das Verhältniss der beobachteten Todesfälle eines Jahres zu dem Bestande der Bevölkerung im Anfange dieses Jahres keineswegs den richtigen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben, für diese Bevölkerung abgiebt, so ist das genannte Verhältniss

dennoch in anderer Rücksicht für die Statistik nicht ohne Bedeutung. Wir wollen es das Sterblichkeits-Verhältniss der Bevölkerung nennen, und ebenso das Verhältniss der Geburten des Jahres zu dem Bestande im Anfange des Jahres das Geburtsverhältniss der Bevölkerung. Bezeichnet man diese beiden Grössen, welche unmittelbar aus den statistischen Daten entnommen werden können, mit p und q, so hat man:

$$p=\frac{M}{A}, \quad q=\frac{B}{A},$$

und für die Formel (56) erhält man den einfacheren Ausdruck:

$$(57) \ldots\ldots\ldots \quad \Omega=p-\mu q.$$

Die umgekehrten Werthe $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ haben offenbar die Bedeutung, dass sie anzeigen, auf wie viel Köpfe des anfänglichen Bestandes im Laufe des Jahres resp. je ein Todesfall oder eine Geburt gekommen ist.

Die Werthe von p und q sind im Allgemeinen nicht gleich gross; in der Regel wird $q>p$ sein, obwohl auch das Umgekehrte stattfinden kann. Sie werden nur dann gleich gross sein, wenn die Bevölkerung sich im Beharrungszustande befindet, d. h. wenn durch das ganze Jahr jeder Todesfall sofort durch eine Geburt ersetzt wird. Daraus folgt aber, dass diese beiden Grössen zusammengenommen nicht nur den Stand, sondern auch die Bewegung der Bevölkerung charakterisiren, und zwar beides in untrennbarer Verbindung. Man kann nun die Frage aufwerfen, ob nicht die beiden Grössen p und q sich auf einen gemeinschaftlichen Werth P reduciren lassen, welcher das Sterblichkeits- und Geburtsverhältniss derselben Bevölkerung unter der Voraussetzung ausdrückt, dass diese Bevölkerung durch den Lauf des Jahres im Beharrungszustande geblieben wäre. Ein solcher Werth wird sodann von der Bewegung der Bevölkerung unabhängig sein und allein für den Stand derselben einen charakteristischen Ausdruck abgeben.

Zur Beantwortung dieser Frage kann man verfahren wie folgt:

Um bestimmter uns ausdrücken zu können, nehmen wir an, es sei wie gewöhnlich die Anzahl der Geburten überwiegend über die der Todesfälle, oder $B>M$. Soll die Bevölkerung durch den Lauf des Jahres auf dem Bestande seines Anfangs erhalten bleiben, so muss die Anzahl B der Geburten um einen gewissen Betrag u vermindert werden, so dass man durch schickliche Annahme von u haben wird:

(58) . . . . $P=\frac{B-u}{A}$.

Aber die Verminderung der Geburten um u hat, wenn man dieselbe gleichmässig über das Jahr vertheilt, eine gleichzeitige Verminderung der Sterbefälle um μu zur Folge, und man wird also auch haben:

(59) . . . . $P=\frac{M-\mu u}{A}$.

Die Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen giebt:

(60) . . . . . . $P=\frac{M-\mu B}{A(1-\mu)}=\frac{p-\mu q}{1-\mu}$,

oder mit Rücksicht auf (57):

(61) . . . . $P=\frac{\Omega}{1-\mu}$,

welches der gesuchte Werth ist.

Der umgekehrte Werth $\frac{1}{P}$ zeigt an, auf wie viel Köpfe des anfänglichen Bestandes der Bevölkerung im Laufe des Jahres je ein Todesfall und eine Geburt gekommen sein würde, wenn die Bevölkerung für das Jahr im Beharrungszustande geblieben wäre.

Hiermit dürfte dasjenige auf sein richtiges Maass zurückgeführt werden, was die Statistiker über die sogenannte Sterblichkeitsziffer lehren. Denn die Ausdrücke (58) und (59) zeigen unmittelbar, dass P niemals zwischen p und q fallen kann; vielmehr wird für eine zunehmende Bevölkerung P kleiner und für eine abnehmende Bevölkerung P grösser als beide. Auch ist P niemals einerlei mit Ω, sondern stets grösser.

So geben z. B. die obigen Data für die Bevölkerung des Königreichs Hannover, wenn man die Todtgeborenen einschliesst:

$$p=0{,}022732,\quad \frac{1}{p}=43{,}992;$$

$$q=0{,}032326,\quad \frac{1}{q}=30{,}935;$$

$$P=0{,}020896,\quad \frac{1}{P}=47{,}855.$$

Dieselben Data geben, wenn man die Todtgeborenen ausschliesst:

$$p = 0{,}021541, \quad \frac{1}{p} = 46{,}423;$$

$$q = 0{,}031135, \quad \frac{1}{q} = 32{,}118;$$

$$P = 0{,}020144, \quad \frac{1}{P} = 49{,}643.$$

§. 12.

Die Entwickelung, durch welche oben die Aufgabe des §. 4. ihre Lösung gefunden hat, kann offenbar auch gebraucht werden, wenn die Wahrscheinlichkeit w bekannt ist und dagegen eine andere der in der Aufgabe enthaltenen Grössen als Unbekannte angesehen wird. Insbesondere kommt im Versicherungswesen der Fall öfter vor, wo der Bestand einer Gesellschaft am Schlusse des Jahres gesucht wird. Wir führen die folgenden beiden Beispiele dieser Art an.

Erstes Beispiel. Aus einer Gesellschaft von dienenden Personen scheidet im Laufe des Jahres eine Anzahl als Invalide aus. Es sei für irgend ein Alter der Bestand a im Anfange des Jahres, die Wahrscheinlichkeit w, im Laufe des Jahres zu sterben, und die Wahrscheinlichkeit γ, im Laufe des Jahres invalide zu werden, gegeben. Man sucht den Bestand $= a'$ der dienenden Mitglieder am Schlusse des Jahres.

Hier muss zunächst auf eine Gefahr aufmerksam gemacht werden, welche in der Behandlung dieser Aufgabe schon zu Fehlschlüssen geführt hat. Die Wahrscheinlichkeit, am Schlusse des Jahres noch zu leben, ist $= 1 - w$, und die Wahrscheinlichkeit, am Schlusse des Jahres noch zu dienen, $= 1 - \gamma$; folglich — so hat man geschlossen — ist die Wahrscheinlichkeit, am Schlusse des Jahres noch zu leben und zu dienen, $= (1 - w)(1 - \gamma)$, oder man hat

$$a' = a(1 - w)(1 - \gamma).$$

Dieser Schluss ist aber unrichtig. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Ereignisse zugleich eintreten, ist nur dann gleich dem Producte der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, wenn diese Ereignisse vollkommen unabhängig von einander sind. Eine solche Unabhängigkeit findet jedoch im vorliegenden Falle nicht statt; denn es kann zwar wohl Jemand zuerst invalide werden und dann sterben, aber nicht zuerst sterben und dann invalide werden. Die Zahl derjenigen Personen, welche, wenn sie nicht gestorben wären, invalide geworden sein würden, ist wegen der Kleinheit der Brüche w und γ allerdings nur klein; nichts desto weniger hat sie zur Folge, dass die vorstehende Rechnung nur zu einer oberflächlichen Annäherung führt.

Die richtige Auflösung ist in der Gleichung (17) enthalten, in welcher man $b = 0$ und $c = a\gamma$ zu setzen hat. Dies giebt:

$$(62) \;.\;.\;.\;.\;.\quad a' = a(1-w)(1+\frac{\gamma}{w}l[1-w]),$$

oder mit demselben Grade von Annäherung, welcher sich oben als ausreichend gezeigt hat,

$$(63) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad a' = a(1-w)(1-\gamma[1+\frac{w}{2}]).$$

Zweites Beispiel. Von unverheiratheten Mädchen scheidet durch Heirath im Laufe des Jahres eine Anzahl aus. Es sei für irgend ein Alter der Bestand a im Anfange des Jahres, die Wahrscheinlichkeit w, im Laufe des Jahres zu sterben, und die Wahrscheinlichkeit γ, im Laufe des Jahres zu heirathen, gegeben. Man sucht den Bestand $= a'$ der Unverheiratheten am Schlusse des Jahres.

Dieser Fall liegt ebenso wie der vorige und ist gleichfalls nach der Gleichung (63) zu behandeln. Auf Grund dieser Gleichung ist die hier folgende Tabelle berechnet.

In dieser Tabelle sind die Columnen 2. und 6. aus Brune's Mortalitätstafel des weiblichen Geschlechts (Bearbeitung von 1847) und die Columne 3. aus der Berliner Börsenzeitung vom 17. April 1862, Abendausgabe, entnommen. Die Columne 4. stellt die successiven Werthe von a und a' dar, nach der obigen Formel berechnet, und sie zeigt demnach, wie eine Zahl von 10000 unverheiratheten 16jährigen Mädchen durch Heirathen und Todesfälle von Jahr zu Jahr sich vermindert. Die Columne 5. enthält die Differenzen der Zahlen in 6. und 4. In Columne 7. finden sich für jedes Jahr die Werthe von $c = a\gamma$. Endlich sind die Zahlen der Columne 8. dadurch entstanden, dass, für jedes Alter, die Summe der Heirathenden in 7., von diesem bis zum höchsten Alter, durch die Unverheiratheten in 4. dividirt wurde. Die Gestorbenen sind des Raumes wegen weggelassen; sie können in 4. und 5. leicht mit Rücksicht auf 7. nachgetragen werden.

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass die grösste Zahl Heirathen von Mädchen im 24sten Lebensjahre geschlossen wird, und die grösste Zahl verheiratheter Frauen im 40sten Lebensjahre steht. Die grösste Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu heirathen, findet im 27sten Lebensjahre statt und beträgt etwas über 10 Procent, während merkwürdiger Weise zugleich die Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben, ihren kleinsten Werth erreicht; dagegen die grösste Wahrscheinlichkeit, überhaupt zu heirathen, findet sich schon im Alter von 20 Jahren und beträgt 76 Procent.

Diese letzte Wahrscheinlichkeit sinkt mit dem Alter von 32 Jahren unter den Werth $\frac{1}{2}$, d. h. von hier an ist die Wahrscheinlichkeit, nicht zu heirathen, grösser als die, zu heirathen. Hier fängt also die „alte Jungfer“ an, die auf diese Weise mathematisch streng zu definiren ist.

Heiraths-Tabelle des weiblichen Geschlechts.

1. Alter. Jahre.	2. Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu sterben.	3. Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu heirathen.	4. Lebende. Unverheirathete.	5. Lebende. Verheirathete.	6. Lebende. Zusammen.	7. Heirathende im Laufe des Jahrs.	8. Wahrscheinlichkeit, überhaupt zu heirathen.
16	0,0162	0,013	10000	0	10000	130	0,737
17	0,0159	0,019	9709	129	9838	184	0,746
18	0,0154	0,026	9372	310	9682	244	0,753
19	0,0148	0,037	8986	547	9533	332	0,758
20	0,0141	0,051	8523	869	9392	435	0,761
21	0,0134	0,066	7972	1288	9260	526	0,759
22	0,0128	0,080	7342	1794	9136	587	0,752
23	0,0123	0,090	6665	2354	9019	600	0,740
24	0,0119	0,095	5987	2921	8908	569	0,724
25	0,0116	0,099	5350	3452	8802	530	0,704
26	0,0115	0,103	4762	3938	8700	490	0,680
27	0,0115	0,103	4219	4381	8600	435	0,651
28	0,0116	0,102	3739	4762	8501	381	0,618
29	0,0117	0,095	3316	5086	8402	315	0,582
30	0,0117	0,082	2964	5340	8304	243	0,545
31	0,0118	0,068	2688	5519	8207	183	0,510
32	0,0118	0,061	2474	5636	8110	151	0,480
33	0,0120	0,058	2295	5719	8014	133	0,452
34	0,0120	0,057	2135	5783	7918	122	0,424
35	0,0120	0,053	1989	5834	7823	105	0,394
36	0,0120	0,050	1860	5869	7729	93	0,364
37	0,0122	0,049	1745	5891	7636	86	0,335
38	0,0122	0,048	1639	5904	7543	79	0,304
39	0,0121	0,046	1541	5910	7451	71	0,272
40	0,0120	0,046	1452	5909	7361	67	0,241
41	0,0118	0,047	1368	5905	7273	64	0,207
42	0,0118	0,043	1288	5899	7187	55	0,170
43	0,0118	0,035	1218	5884	7102	43	0,134
44	0,0120	0,026	1161	5857	7018	30	0,104
45	0,0123	0,020	1117	5817	6934	22	0,081
46	0,0127	0,016	1081	5768	6849	17	0,063
47	0,0130	0,014	1050	5712	6762	15	0,048
48	0,0135	0,013	1022	5652	6674	13	0,035
49	0,0140	0,011	995	5589	6584	11	0,023
50	0,0146	0,012	970	5522	6492	12	0,012
51	0,0153	0	944	5453	6397	0	0

VI.

Ueber das Prismatoid.

Von

Herrn Doctor *E. W. Grebe*,
Rector der Realschule zu Cassel.

Wittstein erklärt das von ihm in die elementare Stereometrie eingeführte Prismatoid als ein von zwei parallelen Polygonen als Grundflächen und von Dreiecken oder Vierecken, welche allemal eine Seite der einen Grundfläche mit einer Ecke oder parallelen Seite der andern Grundfläche verbinden, als Seitenflächen begrenztes Polyeder. Anhangsweise rechnet er zu den Prismatoiden auch diejenigen Polyeder, bei welchen aus einer Grundfläche oder aus beiden eine blosse Kante geworden ist. Eine Pyramide ist somit auch ein dem Prismatoid sehr nahe verwandter Körper, indem sie aus demselben entsteht, sobald eine der beiden Grundflächen zu einem Punkt wird. Es möchte sich daher in mancher Beziehung empfehlen, die Pyramide ebenfalls zu den Prismatoiden zu rechnen. Thun wir dieses, so ergibt sich nachstehende Definition. Ein Prismatoid ist ein von lauter ebenen Figuren begrenzter zwischen zwei, seine sämmtlichen Ecken aufnehmenden parallelen Ebenen liegender Körper. Der Abstand dieser parallelen Ebenen heisst immer die Höhe des Prismatoids. Liegt in einer Ebene nur eine Ecke, so haben wir die Pyramide. Liegen in beiden Ebenen zwei Ecken, so haben wir ein Tetraeder, welches in der Stellung, die es hier hat, wo nämlich seine Höhe der kleinste Abstand zweier Kanten ist, und wegen der Wichtigkeit, die ein so aufgefasster Körper in der Lehre von dem Prismatoid besitzt, einen besondern Namen zu erhalten verdient. Ich

schlage den Namen Disphenium (Doppelkeil) vor. Liegen ferner in einer Ebene zwei Ecken, in der andern aber drei oder mehr, so entsteht ein Körper, der wohl nicht unpassend Sphenoid (keilförmiges Prismatoid) genannt werden mag. Das von Wittstein vorzugsweise berücksichtigte Prismatoid begreift als besondere Fälle in sich das Prisma, die abgekürzte Pyramide, den Obelisk, das Antiprisma, den Antiobelisk.

Nach dieser Voransschickung stellen wir den Satz auf, dass alle Prismatoide Körper seien, die man durch Addition und Subtraction aus Prismen und Pyramiden von derselben Höhe ableiten kann. Die Pyramiden dürfen hierbei sowohl in aufrechter als in verkehrter Stellung in Betracht kommen. Bei dem Beweise unseres Satzes betrachten wir zuerst ein Prismatoid mit vollständigen Grundflächen. Wir erweitern die von den Seiten einer Grundfläche auslaufenden Seitenflächen bis zum Durchschnitte je zweier benachbarten. Haben die Grundflächen ungleiche Seitenzahl, so wählen wir die von der geringeren Seitenzahl. Der entstehende Körper ist ein Obelisk von dieser Seitenzahl. Denken wir die gewählte Grundfläche als die obere, so sind die zu dem ursprünglichen Prismatoid hinzukommenden Körpertheile aufrecht stehende Pyramiden. Von unserem Obelisk schneiden wir nun so oft es angeht verkehrt stehende Pyramiden weg, indem wir Schnitte machen von einer Diagonale der oberen Grundfläche nach einer der wegfallenden Ecke dieser gegenüberliegenden Ecke der unteren Grundfläche. Wir erhalten dann ein Prismatoid, dessen obere Grundfläche beiläufig nur halb so viele Seiten hat als die des ursprünglichen. Indem wir nun das beschriebene Verfahren so oft als möglich fortsetzen, langen wir zuletzt bei einer abgekürzten dreiseitigen Pyramide an. Nehmen wir von dieser die verkehrt stehende Pyramide zwischen der oberen Grundfläche und einer Ecke der unteren weg, so bleibt uns ein Sphenoid mit dreiseitiger Grundfläche. Wir fahren daher in unserer Beweisführung mit der Betrachtung des Sphenoids im Allgemeinen fort. Bei einem solchen Körper endigen die von der die obere Grundfläche vertretenden Kante auslaufenden Seitenflächen in der untern Grundfläche entweder mit einem Punkte oder einer Seitenlinie. Wie dem auch sei, jedesfalls nehmen wir in jeder der genannten beiden Seitenflächen einen mit der untern Grundfläche gemeinschaftlichen Punkt an und verbinden diese Punkte durch eine gerade Linie, von welcher wir denn nach den beiden Endpunkten der oberen Kante Schnitte führen. Das Spenoid wird hierdurch in zwei aufrecht stehende Pyramiden und ein Disphenium zerlegt. Ist jedoch die untere Kante des Disphenlums eine Seitenlinie der früheren untern Grundfläche, so erhalten wir ausser dem Disphe-

nium nur eine aufrecht stehende Pyramide. Unser Beweis wird beendigt sein, wenn noch gezeigt ist, dass alle Disphenien als Summen und Differenzen von Prismen und Pyramiden derselben Höhe gelten dürfen. Um dieses zu zeigen, fassen wir irgend eine Kante des Dispheniums, welche eine obere Ecke desselben mit einer unteren verbindet, ins Auge und legen mit ihr durch die beiden noch übrigen Ecken des Körpers Parallelen. Werden Ebenen durch je zwei dieser Parallelen gelegt, so begrenzen dieselben in Verbindung mit den die Höhe des Dispheniums zwischen sich fassenden parallelen Ebenen ein Prisma, welches ausser dem Disphenium noch aus einer aufrechten und einer verkehrten Pyramide besteht.

Nachdem so der über die Prismatoide aufgestellte Satz vollständig erwiesen ist, wird weiter klar, dass, wenn es gelingt die Inhaltsberechnung eines Prismas und einer Pyramide durch dieselbe Formel zu bewirken, in welcher die Höhe ein Factor ist, Summen und Differenzen der mit gewissen Coefficienten zu versehenden Grundflächen und diesen parallelen Durchschnitte aber der andere Factor, wobei eine Grundfläche der Pyramiden $=0$ zu nehmen sein würde, und wobei es ausserdem noch einerlei sein müsste, ob man die Pyramiden als aufrecht oder als verkehrt stehend denkt, eine solche Formel sofort auch zur Inhaltsberechnung eines Prismatoids geschickt sein müsse. Formeln dieser Art giebt es aber, wie alsbald erhellen wird, unzählig viele; es handelt sich nur darum die einfachsten auszulesen. Da drängt sich nun natürlich zunächst die Frage auf, ob nicht etwa ein einziger Schnitt in der richtigen Höhe gemacht schon ohne die Grundflächen ausreichend sein könne. Ein solcher Schnitt muss wegen des Prismas den Coefficienten 1 haben. Nun lässt sich allerdings auch bei der Pyramide ein Schnitt finden, der einfach mit der Höhe multiplicirt den Inhalt der Pyramide gibt; es ist der, welcher die Höhe in dem Verhältniss $1+\sqrt{3}:2$, das kleinere Stück nach unten genommen, theilt. Da ein solcher indessen nicht durch die Mitte der Höhe geht, so passt er nicht zugleich auf verkehrt stehende Pyramiden. Weiss man daher von Prismatoiden, dass sie sich aus Prismen und nur aufrecht stehenden Pyramiden durch Addition und Subtraction bilden lassen, so kann man ihren Körperinhalt allerdings dadurch finden, dass man die Höhe derselben mit der bezeichneten Durchschnittsfläche multiplicirt. Prismatoide dieser Art gibt es auch; man erhält solche zum Beispiel, wenn man bei einem gewöhnlichen Prisma Schnitte von Ecken der oberen Grundfläche nach passenden Diagonalen oder anderen Linien der unteren Grundfläche führt. Umgekehrt kann man aber daraus, dass eine Durchschnittsfläche, welche die Höhe eines

Prismatoids in dem oben angegebenen Verhältniss theilt, mit letzterer multiplicirt, den anderweitig bekannten Körperinhalt nicht liefert, den Schluss ziehen, dass sich das vorliegende Prismatoid auf keinerlei Weise aus Prismen und bloss aufrecht stehenden Pyramiden durch Addition und Subtraction bilden lasse, dass vielmehr auch verkehrt stehende Pyramiden mitwirken müssen.

Zwei Schnitte in gleichen Abständen von der Mitte der Höhe genügen jedoch nebst letzterer auch ohne die Grundflächen zur Berechnung eines jeden Prismatoides. Die Coefficienten derselben müssen gleich sein, damit die Umdrehung des Körpers keine Störung verursache, und folglich des Prismas wegen jeder $= \frac{1}{2}$. Nehmen wir nun an, die Schnitte durch die Pyramiden seien in den Höhen $h(\frac{1}{2}-x)$ und $h(\frac{1}{2}+x)$ gemacht, so haben wir die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+x)^2+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-x)^2=\tfrac{1}{3},$$

aus welcher sich $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ ergibt. Dass die beiden Grundflächen neben der in allen Fällen als Factor beizubehaltenden Höhe nicht genügen, folgt daraus, dass der Werth $x=\frac{1}{2}$ mit der eben aufgestellten Gleichung unverträglich ist.

Will man aber, um das Prismatoid P zu berechnen, die beiden Grundflächen A und B nebst dem Durchschnitte C in der Mitte der Höhe anwenden und

$$P=h(\alpha A+\beta C+\alpha B)$$

setzen, so hat man wegen des Prismas $2\alpha+\beta=1$ und wegen der Pyramiden $\alpha+\frac{1}{4}\beta=\frac{1}{3}$. Hieraus ergibt sich $\alpha=\frac{1}{6}$, $\beta=\frac{2}{3}$, wie bereits von Wittstein auf anderem Wege gefunden worden ist.

Berücksichtigt man ausser den beiden Grundflächen A und B noch zwei Schnitte C und D, so dass jede dieser vier Figuren von der nächsten um $\frac{1}{3}$ der Höhe entfernt ist, so hat man

$$P=h(\alpha A+\beta C+\beta D+\alpha B),$$

ferner des Prismas wegen $2\alpha+2\beta=1$ und der Pyramiden wegen $\alpha+\frac{4}{9}\beta+\frac{1}{9}\beta=\frac{1}{3}$, woraus $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=\frac{3}{8}$ folgt.

Wollte man in der Gleichung

$$P=h(\alpha A+\beta C+\beta D+\alpha B)$$

C und D Schnitte in den Höhen $h(\frac{1}{2}-x)$ und $h(\frac{1}{2}+x)$ bedeuten lassen und zugleich $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$ setzen, so hätte man:

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}+x)^2+\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}-x)^2=\tfrac{1}{3},$$

woraus sich $x = \sqrt{-\frac{1}{12}}$ ergeben würde. Eine solche Bedingung ist demnach nicht zu befriedigen.

Setzt man aber

$$P = h(\alpha C + \beta E + \alpha D),$$

wo E einen Schnitt durch die Mitte der Höhe bedeuten soll, und nimmt $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, so ist

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2} + x)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2} - x)^2 = \tfrac{1}{3},$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{8}}.$$

Soll die Berechnung des Prismatoids durch Benutzung von vier Schnitten mit gleichen Coefficienten in den Höhen $h(\frac{1}{2} \mp x)$ und $h(\frac{1}{2} \mp y)$ erfolgen, so hat man

$$\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} + 2x^2) + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} + 2y^2) = \tfrac{1}{3},$$

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{6}.$$

Bei fünf Schnitten mit gleichen Coefficienten erhält man die Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 = \tfrac{5}{24}.$$

Die Annahme von sechs Schnitten mit gleichen Coefficienten würde die Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}$$

liefern.

Man übersieht leicht, dass je grösser man die Anzahl der Schnitte, die Grundflächen auch als solche betrachtend, nimmt, desto mehr willkührlich aufgestellte Bedingungen hinsichtlich der Coefficienten und der Abstände der Schnitte befriedigt werden können, und dass unser Gegenstand geeignet ist, eine Menge interessanter Aufgaben zur Lehre von den unbestimmten Gleichungen des ersten und zweiten Grades zu liefern.

VII.

Ueber die Zerlegung der Function
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$
in zwei lineare Factoren.

Von

dem Herausgeber.

Die Zerlegung der Function

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$

in zwei Factoren des ersten Grades oder zwei sogenannte lineare Factoren, welche für viele Untersuchungen von grosser Wichtigkeit ist, ist nach meiner Meinung noch nicht mit solcher Allgemeinheit und Schärfe, namentlich noch nicht mit so vollständiger Berücksichtigung aller möglichen Fälle behandelt worden, wie es wünschenswerth ist, weshalb ich im Folgenden eine genügendere Behandlung dieses Gegenstandes zu geben versuchen werde.

I.

Wenn die Gleichung

1)

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=(px+qy+r)(p'x+q'y+r'),$$

also die Gleichung

2) . . . . . . $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$

$$=pp'x^2+(qp'+pq')xy+qq'y^2+(rp'+pr')x+(rq'+qr')y+rr',$$

identisch erfüllt sein soll, so müssen die Gleichungen

$$3)\ldots\quad \begin{cases} a=pp', & b=qp'+pq', & c=qq'; \\ d=rp'+pr', & e=rq'+qr', & f=rr' \end{cases}$$

erfüllt sein. Nimmt man aber diese sechs Gleichungen als erfüllt an, so lassen sich daraus gewisse Gleichungen zwischen den Coefficienten a, b, c, d, e, f ableiten, welche also als Bedingungsgleichungen zu betrachten sein werden, denen die Coefficienten a, b, c, d, e, f nothwendig genügen müssen, wenn es überhaupt möglich sein soll, die Grössen p, q, r; p', q', r' so zu bestimmen, dass die Gleichungen 3) erfüllt werden; die Gleichung 1) oder 2) sich also identisch erfüllt zeigt. Diese Bedingungsgleichungen wollen wir daher jetzt zunächst aus den Gleichungen 3) ableiten.

Aus den beiden Gleichungen

$$d=rp'+pr',$$
$$e=rq'+qr'$$

ergiebt sich sogleich:

$$dq-ep=r(qp'-pq'),$$
$$ep'-dq'=r'(qp'-pq');$$

also durch Multiplication:

$$(dq-ep)(ep'-dq')=rr'(qp'-pq')^2,$$

und folglich durch Auflösung des Products auf der linken Seite:

$$de(qp'+pq')-e^2pp'-d^2qq'=rr'(qp'-pq')^2,$$

woraus sich wegen der Gleichungen

$$a=pp',\quad b=qp'+pq',\quad c=qq',\quad f=rr'$$

die Gleichung

$$bde-ae^2-cd^2=f(qp'-pq')^2$$

ergiebt. Nun ist aber:

$$(qp'-pq')^2=(qp'+pq')^2-4pp'qq',$$

also wegen der vorstehenden Gleichungen:

$$(qp'-pq')^2=b^2-4ac,$$

folglich nach dem Obigen:

$$4)\ldots\ldots\quad bde-ae^2-cd^2=(b^2-4ac)f$$

oder:

5) . . . . . . $bde = ae^2 + (b^2 - 4ac)f + cd^2$.

Aus dieser Gleichung lassen sich andere ableiten.

Es ist nämlich, wie man durch einfache Multiplication sogleich übersieht:

$$(b^2-4ac)(d^2-4af) = b^2d^2-4acd^2-4af(b^2-4ac),$$
$$(b^2-4ac)(e^2-4cf) = b^2e^2-4ace^2-4cf(b^2-4ac);$$

also nach 4):

$$(b^2-4ac)(d^2-4af) = b^2d^2-4abde+4a^2e^2,$$
$$(b^2-4ac)(e^2-4cf) = b^2e^2-4bcde+4c^2d^2;$$

folglich offenbar:

$$6) \ldots \left\{ \begin{array}{l} (b^2-4ac)(d^2-4af) = (bd-2ae)^2, \\ (b^2-4ac)(e^2-4cf) = (be-2cd)^2. \end{array} \right.$$

Hieraus folgt:

$$(b^2-4ac)(d^2-4af)(e^2-4cf) = (e^2-4cf)(bd-2ae)^2,$$
$$(b^2-4ac)(d^2-4af)(e^2-4cf) = (d^2-4af)(be-2cd)^2;$$

also:

7) . . . $(d^2-4af)(be-2cd)^2 = (e^2-4cf)(bd-2ae)^2$.

Alle diese Gleichungen zwischen den Coefficienten a, b, c, d, e, f werden wir nun im Folgenden als erfüllt voraussetzen.

Wenn die Gleichung

$$(b^2-4ac)(d^2-4af) = (bd-2ae)^2$$

erfüllt ist oder als erfüllt vorausgesetzt wird, so ist, weil

$$(b^2-4ac)(d^2-4af) = b^2d^2-4acd^2-4af(b^2-4ac),$$
$$(bd-2ae)^2 = b^2d^2-4abde+4a^2e^2$$

ist, offenbar:

$$acd^2+af(b^2-4ac) = abde-a^2e^2,$$

also:

$$abde = a\{ae^2+(b^2-4ac)f+cd^2\},$$

und folglich, wenn a nicht verschwindet, unter der gemachten Voraussetzung:

$$bde = ae^2 + (b^2-4ac)f + cd^2.$$

Wenn die Gleichung

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf) = (be-2cd)^2$$

erfüllt ist, oder als erfüllt vorausgesetzt wird; so ist, weil

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf) = b^2e^2-4ace^2-4cf(b^2-4ac),$$

$$(be-2cd)^2 = b^2e^2-4bcde+4c^2d^2$$

ist, offenbar:

$$ace^2+cf(b^2-4ac) = bcde-c^2d^2,$$

also:

$$bcde = c\{ae^2+(b^2-4ac)f+cd^2\},$$

und folglich, wenn c nicht verschwindet, unter der gemachten Voraussetzung:

$$bde = ae^2+(b^2-4ac)f+cd^2.$$

Wenn also a nicht verschwindet, so kann man, wenn die Gleichung

$$(b^2-4ac)(d^2-4af) = (bd-2ae)^2$$

erfüllt ist, immer schliessen, dass auch die Gleichung

$$bde = ae^2+(b^2-4ac)f+cd^2$$

erfüllt ist.

Wenn c nicht verschwindet, so kann man, wenn die Gleichung

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf) = (be-2cd)^2$$

erfüllt ist, immer schliessen, dass auch die Gleichung

$$bde = ae^2+(b^2-4ac)f+cd^2$$

erfüllt ist.

Für $a=0$ geht die Gleichung

$$(b^2-4ac)(d^2-4af) = (bd-2ae)^2$$

in die identische Gleichung

$$b^2d^2 = b^2d^2$$

über; und für $c=0$ geht die Gleichung

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf) = (be-2cd)^2$$

in die identische Gleichung

$$b^2e^2=b^2e^2$$

über.

II.

Aus den drei Gleichungen

$$a=pp',\quad b=qp'+pq',\quad c=qq'$$

folgt:

$$cp^2-bpq+aq^2=p^2qq'-pq(qp'+pq')+q^2pp',$$
$$cp'^2-bp'q'+aq'^2=p'^2qq'-p'q'(qp'+pq')+q'^2pp';$$

also:

$$8)\ \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} cp^2-bpq+aq^2=0,\\ cp'^2-bp'q'+aq'^2=0.\end{array}\right.$$

Aus den drei Gleichungen

$$a=pp',\quad d=rp'+pr',\quad f=rr'$$

folgt:

$$ar^2-dpr+fp^2=r^2pp'-pr(rp'+pr')+p^2rr',$$
$$ar'^2-dp'r'+fp'^2=r'^2pp'-p'r'(rp'+pr')+p'^2rr';$$

also:

$$9)\ \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} ar^2-dpr+fp^2=0,\\ ar'^2-dp'r'+fp'^2=0.\end{array}\right.$$

Aus den drei Gleichungen

$$c=qq',\quad e=rq'+qr',\quad f=rr'$$

folgt:

$$cr^2-eqr+fq^2=r^2qq'-qr(rq'+qr')+q^2rr',$$
$$cr'^2-eq'r'+fq'^2=r'^2qq'-q'r'(rq'+qr')+q'^2rr';$$

also:

$$10)\ \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} cr^2-eqr+fq^2=0,\\ cr'^2-eq'r'+fq'^2=0.\end{array}\right.$$

III.

Wenn nun a nicht verschwindet, so haben wir zur Bestimmung von

$$\frac{q}{p},\ \frac{q'}{p'} \text{ und } \frac{r}{p},\ \frac{r'}{p'}$$

nach 8) und 9) die folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2-\frac{b}{a}\cdot\frac{q}{p}+\frac{c}{a}=0,$$

$$\left(\frac{q'}{p'}\right)^2-\frac{b}{a}\cdot\frac{q'}{p'}+\frac{c}{a}=0$$

und:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2-\frac{d}{a}\cdot\frac{r}{p}+\frac{f}{a}=0,$$

$$\left(\frac{r'}{p'}\right)^2-\frac{d}{a}\cdot\frac{r'}{p'}+\frac{f}{a}=0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

weil nun aber nach dem Obigen

$$\frac{q}{p}\cdot\frac{q'}{p'}=\frac{qq'}{pp'}=\frac{c}{a}$$

sein muss, so muss man offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

$$11)\quad .\ .\quad \frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Aus den beiden letzten der vier obigen Gleichungen folgt:

$$\frac{r}{p}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a};$$

weil aber bekanntlich

$$\frac{r}{p}\cdot\frac{r'}{p'}=\frac{rr'}{pp'}=\frac{f}{a}$$

sein muss, so muss man offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

$$12)\quad .\ .\quad \frac{r}{p}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2a}.$$

In I. haben wir die Gleichungen

$$dq-ep=r(qp'-pq'),\quad ep'-dq'=r'(qp'-pq')$$



gefunden, aus denen sich sogleich

$$d\frac{q}{p}-e=pp'\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=a\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right),$$

$$e-d\frac{q'}{p'}=pp'\frac{r'}{p'}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=a\frac{r'}{p'}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)$$

ergiebt.

Setzt man nun mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den vier folgenden Gleichungen auf einander:

$$\frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$\frac{r}{p}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

so ist:

$$\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a},$$

folglich:

$$a\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=\pm\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2}\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

oder:

$$2a^2\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{d^2-4af}\pm d\sqrt{b^2-4ac};$$

ferner ist:

$$d\frac{q}{p}-e=\frac{bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

oder:

$$2a(d\frac{q}{p}-e)=bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$2a(d\frac{q}{p}-e)=2a^2\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)$$

ist:

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{d^2-4af}\pm d\sqrt{b^2-4ac}=bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac},$$

also:

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{d^2-4af}=bd-2ae.$$

Nach 6) ist bekanntlich:

$$(b^2-4ac)(d^2-4af)=(bd-2ae)^2$$

oder

$$(4ac-b^2)(4af-d^2)=(bd-2ae)^2,$$

und wenn also $bd-2ae$ nicht verschwindet, so haben b^2-4ac und d^2-4af gleiche Vorzeichen. Sind nun b^2-4ac und d^2-4af beide positiv, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}=bd-2ae$$

nur dann existiren, wenn $bd-2ae$ positiv ist. Sind dagegen b^2-4ac und d^2-4af beide negativ, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}=bd-2ae,$$

nämlich die Gleichung

$$\sqrt{4ac-b^2}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{4af-d^2}\,.\sqrt{-1}=bd-2ae,$$

oder

$$-\sqrt{4ac-b^2}\,.\sqrt{4af-d^2}=bd-2ae,$$

oder

$$\sqrt{4ac-b^2}\,.\sqrt{4af-d^2}=-(bd-2ae),$$

nur dann existiren, wenn $bd-2ae$ negativ ist. Die vier Gleichungen, von denen wir ausgingen, sind also, unter der Voraussetzung, dass $bd-2ae$ nicht verschwindet, nur dann zulässig, wenn die Grössen

$$bd-2ae,\quad b^2-4ac,\quad d^2-4af$$

gleiche Vorzeichen haben.

Setzt man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den **vier** folgenden Gleichungen auf einander:

$$\frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$\frac{r}{p}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a};$$

so ist:

$$\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a},$$

folglich:

$$a\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=\pm\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2}\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

oder:

$$2a^2\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=-\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}\pm d\sqrt{b^2-4ac};$$

ferner ist:

$$d\frac{q}{p}-e=\frac{bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

oder:

$$2a(d\frac{q}{p}-e)=bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$2a(d\frac{q}{p}-e)=2a^2\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)$$

ist:

$$-\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}\pm d\sqrt{b^2-4ac}=bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac},$$

also:

$$\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}=-(bd-2ae).$$

Nach 6) ist bekanntlich:

$$(b^2-4ac)(d^2-4af)=(bd-2ae)^2$$

oder

$$(4ac-b^2)(4af-d^2)=(bd-2ae)^2,$$

und wenn also $bd-2ae$ nicht verschwindet, so haben b^2-4ac und d^2-4af gleiche Vorzeichen. Sind nun b^2-4ac und d^2-4af beide positiv, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}=-(bd-2ae)$$

nur dann existiren, wenn $bd-2ae$ negativ ist. Sind dagegen b^2-4ac und d^2-4af beide negativ, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}\,.\sqrt{d^2-4af}=-(bd-2ae),$$

nämlich die Gleichung

$$\sqrt{4ac-b^2}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{4af-d^2}\,.\sqrt{-1}=-(bd-2ae),$$

oder

$$-\sqrt{4ac-b^2}\,.\sqrt{4af-d^2}=-(bd-2ae),$$

oder

$$\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{4af-d^2}=bd-2ae$$

nur dann existiren, wenn $bd-2ae$ positiv ist. Die vier Gleichungen, von denen wir ausgingen, sind also, unter der Voraussetzung, dass $bd-2ae$ nicht verschwindet, nur dann zulässig, wenn die Grössen

$$bd-2ae,\quad b^2-4ac,\quad d^2-4af$$

nicht sämmtlich gleiche Vorzeichen haben.

Wenn also $bd-2ae$ nicht verschwindet, so muss man mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander

$$13)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\\ \frac{r}{p}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2a}\end{array}\right.$$

oder

$$13^*)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\\ \frac{r}{p}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a}\end{array}\right.$$

setzen, jenachdem die Grössen

$$bd-2ae,\quad b^2-4ac,\quad d^2-4af$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen oder nicht sämmtlich gleiche Vorzeichen haben.

Wenn $bd-2ae=0$ ist, so muss wegen der bekannten Gleichung

$$(b^2-4ac)(d^2-4af)=(bd-2ae)^2$$

immer mindestens eine der beiden Grössen

$$b^2-4ac \text{ und } d^2-4af$$

verschwinden. Wenn nun $b^2-4ac=0$ ist, so ist nach dem Obigen:

$$14)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{q}{p}=\frac{b}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b}{2a};\\ \frac{r}{p}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2a};\end{array}\right.$$



und wenn $d^2-4af=0$ ist, so ist:

$$15)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} \dfrac{q}{p}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \dfrac{q'}{p'}=\dfrac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\\[2ex] \qquad \dfrac{r}{p}=\dfrac{d}{2a},\quad \dfrac{r'}{p'}=\dfrac{d}{2a}; \end{array}\right.$$

also in keinem dieser beiden Fälle noch eine Zweideutigkeit vorhanden.

Der Fall, wenn $b^2-4ac\doteq 0$ und $d^2-4af=0$ ist, erledigt sich hiermit von selbst.

Man kann noch andere Ausdrücke für

$$\frac{r}{p},\quad \frac{r'}{p'}$$

finden. Nach dem Obigen ist nämlich:

$$d\frac{q}{p}-e=a\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right),$$

$$e-d\frac{q'}{p'}=a\frac{r'}{p'}\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right);$$

weil nun, wie wir schon wissen:

$$\frac{q}{p}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{q'}{p'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ist, so ist:

$$d\frac{q}{p}-e=\frac{bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$e-d\frac{q'}{p'}=-\frac{bd-2ae\mp d\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und

$$a\left(\frac{q}{p}-\frac{q'}{p'}\right)=\pm\sqrt{b^2-4ac};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{r}{p}\sqrt{b^2-4ac}=\pm\frac{bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\frac{r'}{p'}\sqrt{b^2-4ac}=\mp\frac{bd-2ae\mp d\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

folglich, wenn

$$b^2-4ac \gtrless 0$$

ist:

$$\frac{r}{p}=\pm\frac{bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac}}{2a\sqrt{b^2-4ac}},$$

$$\frac{r'}{p'}=\mp\frac{bd-2ae\mp d\sqrt{b^2-4ac}}{2a\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Man hat also die vier Formeln:

$$16)\ldots\begin{cases}\dfrac{q}{p}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \dfrac{q'}{p'}=\dfrac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\\[2ex] \dfrac{r}{p}=\pm\dfrac{bd-2ae\pm d\sqrt{b^2-4ac}}{2a\sqrt{b^2-4ac}},\\[2ex] \dfrac{r'}{p'}=\mp\dfrac{bd-2ae\mp d\sqrt{b^2-4ac}}{2a\sqrt{b^2-4ac}};\end{cases}$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, die aber nur unter der Voraussetzung

$$b^2-4ac \gtrless 0$$

gültig sind.

Wenn $b^2-4ac=0$ ist, hat man die keine Zweideutigkeit lassenden Formeln 14) anzuwenden.

IV.

Wenn c nicht verschwindet, so haben wir zur Bestimmung von

$$\frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'} \text{ und } \frac{r}{q},\ \frac{r'}{q'}$$

nach 8) und 10) die folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-\frac{b}{c}\cdot\frac{p}{q}+\frac{a}{c}=0,$$

$$\left(\frac{p'}{q'}\right)^2-\frac{b}{c}\cdot\frac{p'}{q'}+\frac{a}{c}=0$$

und:

$$\left(\frac{r}{q}\right)^2-\frac{e}{c}\cdot\frac{r}{q}+\frac{f}{c}=0,$$

$$\left(\frac{r'}{q'}\right)^2-\frac{e}{c}\cdot\frac{r'}{q'}+\frac{f}{c}=0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{p}{q}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad \frac{p'}{q'}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c};$$

weil nun aber nach dem Obigen

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}=\frac{pp'}{qq'}=\frac{a}{c}$$

sein muss, so muss man offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

$$17)\ \ldots\ \frac{p}{q}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad \frac{p'}{q'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}.$$

Aus den beiden letzten der vier obigen Gleichungen folgt:

$$\frac{r}{q}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c},\quad \frac{r'}{q'}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c};$$

weil aber bekanntlich

$$\frac{r}{q}\cdot\frac{r'}{q'}=\frac{rr'}{qq'}=\frac{f}{c}$$

sein muss, so muss man offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

$$18)\ \ldots\ \frac{r}{q}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c},\quad \frac{r'}{q'}=\frac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c}.$$

In I. haben wir die Gleichungen

$$dq-ep=r(qp'-pq'),$$
$$ep'-dq'=r'(qp'-pq')$$

gefunden, aus denen sich sogleich

$$d-e\frac{p}{q}=qq'\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=c\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right),$$
$$e\frac{p'}{q'}-d=qq'\frac{r'}{q'}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=c\frac{r'}{q'}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)$$

ergiebt.

Setzt man nun mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den vier folgenden Gleichungen auf einander:

$$\frac{p}{q}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad \frac{p'}{q'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c};$$

$$\frac{r}{q}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c},\quad \frac{r'}{q'}=\frac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c};$$

so ist:

$$\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{c},$$

folglich:

$$c\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=\mp\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2}.\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{c}$$

oder:

$$2c^2\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=-\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}\mp e\sqrt{b^2-4ac};$$

ferner ist:

$$d-e\frac{p}{q}=\frac{-(be-2cd)\mp e\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

oder:

$$2c(d-e\frac{p}{q})=-(be-2cd)\mp e\sqrt{b^2-4ac},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$2c(d-e\frac{p}{q})=2c^2\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)$$

ist:

$$-\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}\mp e\sqrt{b^2-4ac}=-(be-2cd)\mp e\sqrt{b^2-4ac},$$

also:

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}=be-2cd.$$

Nach 6) ist bekanntlich:

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf)=(be-2cd)^2$$

oder

$$(4ac-b^2)(4cf-e^2)=(be-2cd)^2,$$

und wenn also $be-2cd$ nicht verschwindet, so haben b^2-4ac und e^2-4cf gleiche Vorzeichen. Sind nun b^2-4ac und e^2-4cf beide positiv, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}=be-2cd$$

nur dann existiren, wenn $be-2cd$ positiv ist. Sind dagegen b^2-4ac und e^2-4cf beide negativ, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}=be-2cd,$$

nämlich die Gleichung

$$\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{-1}.\sqrt{4cf-e^2}.\sqrt{-1}=be-2cd,$$

oder

$$-\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{4cf-e^2}=be-2cd,$$

oder

$$\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{4cf-e^2}=-(be-2cd),$$

nur dann existiren, wenn $be-2cd$ negativ ist. Die vier Gleichungen, von denen wir ausgingen, sind also, unter der Voraussetzung, dass $be-2cd$ nicht verschwindet, nur dann zulässig, wenn die Grössen

$$be-2cd,\quad b^2-4ac,\quad e^2-4cf$$

gleiche Vorzeichen haben.

Setzt man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den vier folgenden Gleichungen auf einander:

$$\frac{p}{q}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad \frac{p'}{q'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c};$$

$$\frac{r}{q}=\frac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c},\quad \frac{r'}{q'}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c};$$

so ist:

$$\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{c},$$

folglich:

$$c\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=\mp\frac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2}.\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{c}$$

oder:

$$2c^2\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}\mp e\sqrt{b^2-4ac};$$

ferner ist:

$$d-e\frac{p}{q}=\frac{-(be-2cd)\mp e\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

oder:

$$2c(d-e\frac{p}{q})=-(be-2cd)\mp e\sqrt{b^2-4ac},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$2c(d-e\frac{p}{q})=2c^2\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)$$

ist:

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}\mp e\sqrt{b^2-4ac}=-(be-2cd)\mp e\sqrt{b^2-4ac},$$

also:

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}=-(be-2cd).$$

Nach 6) ist bekanntlich

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf)=(be-2cd)^2$$

oder

$$(4ac-b^2)(4cf-e^2)=(be-2cd)^2,$$

und wenn also $be-2cd$ nicht verschwindet, so haben b^2-4ac und e^2-4cf gleiche Vorzeichen. Sind nun b^2-4ac und e^2-4cf beide positiv, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}=-(be-2cd)$$

nur dann existiren, wenn $be-2cd$ negativ ist. Sind dagegen b^2-4ac und e^2-4cf beide negativ, so kann die Gleichung

$$\sqrt{b^2-4ac}.\sqrt{e^2-4cf}=-(be-2cd),$$

nämlich die Gleichung

$$\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{-1}.\sqrt{4cf-e^2}.\sqrt{-1}=-(be-2cd),$$

oder

$$-\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{4cf-e^2}=-(be-2cd),$$

oder

$$\sqrt{4ac-b^2}.\sqrt{4cf-e^2}=be-2cd,$$

nur dann existiren, wenn $be-2cd$ positiv ist. Die vier Gleichungen, von denen wir ausgingen, sind also, unter der Voraussetzung, dass $be-2cd$ nicht verschwindet, nur dann zulässig, wenn die Grössen

$$be-2cd,\quad b^2-4ac,\quad e^2-4cf$$

nicht sämmtlich gleiche Vorzeichen haben.

Wenn also $be-2cd$ nicht verschwindet, so muss man mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander

$$19)\ .\ .\ \begin{cases} \dfrac{p}{q}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, & \dfrac{p'}{q'}=\dfrac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}; \\ \dfrac{r}{q}=\dfrac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c}, & \dfrac{r'}{q'}=\dfrac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c} \end{cases}$$

oder

$$19^*)\ .\ .\ \begin{cases} \dfrac{p}{q}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, & \dfrac{p'}{q'}=\dfrac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}; \\ \dfrac{r}{q}=\dfrac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c}, & \dfrac{r'}{q'}=\dfrac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c} \end{cases}$$

setzen, jenachdem die Grössen

$$be-2cd,\quad b^2-4ac,\quad e^2-4cf$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen oder nicht sämmtlich gleiche Vorzeichen haben.

Wenn $be-2cd=0$ ist, so muss wegen der bekannten Gleichung

$$(b^2-4ac)(e^2-4cf)=(be-2cd)^2$$

immer mindestens eine der beiden Grössen

$$b^2-4ac \text{ und } e^2-4cf$$

verschwinden. Wenn nun $b^2-4ac=0$ ist, so ist nach dem Obigen:

$$20)\ .\ .\ \begin{cases} \dfrac{p}{q}=\dfrac{b}{2c}, & \dfrac{p'}{q'}=\dfrac{b}{2c}; \\ \dfrac{r}{q}=\dfrac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c}, & \dfrac{r'}{q'}=\dfrac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c}; \end{cases}$$

und wenn $e^2-4cf=0$ ist, so ist:

$$21)\ .\ .\ \begin{cases} \dfrac{p}{q}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, & \dfrac{p'}{q'}=\dfrac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}; \\ \dfrac{r}{q}=\dfrac{e}{2c}, & \dfrac{r'}{q'}=\dfrac{e}{2c}; \end{cases}$$

also in keinem dieser beiden Fälle noch eine Zweideutigkeit vorhanden.

Der Fall, wenn $b^2-4ac=0$ und $e^2-4cf=0$ ist, erledigt sich hiemit von selbst.

Man kann noch andere Ausdrücke für

$$\frac{r}{q},\quad \frac{r'}{q'}$$

finden. Nach dem Obigen ist nämlich:

$$d-e\frac{p}{q}=c\frac{r}{q}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right),$$

$$e\frac{p'}{q'}-d=c\frac{r'}{q'}\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right);$$

weil nun, wie wir schon wissen:

$$\frac{p}{q}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad \frac{p'}{q'}=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

ist, so ist:

$$d-e\frac{p}{q}=-\frac{be-2cd\pm e\sqrt{b^2-4ac}}{2c},$$

$$e\frac{p'}{q'}-d=\frac{be-2cd\mp e\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

und

$$c\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)=\mp\sqrt{b^2-4ac};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{r}{q}\sqrt{b^2-4ac}=\pm\frac{be-2cd\pm e\sqrt{b^2-4ac}}{2c},$$

$$\frac{r'}{q'}\sqrt{b^2-4ac}=\mp\frac{be-2cd\mp e\sqrt{b^2-4ac}}{2c};$$

folglich, wenn

$$b^2-4ac \gtrless 0$$

ist:

$$\frac{r}{q}=\pm\frac{be-2cd\pm e\sqrt{b^2-4ac}}{2c\sqrt{b^2-4ac}},$$

$$\frac{r'}{q'}=\mp\frac{be-2cd\mp e\sqrt{b^2-4ac}}{2c\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Man hat also die vier Formeln:

$$22) \ldots \begin{cases} \dfrac{p}{q}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, \quad \dfrac{p'}{q'}=\dfrac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, \\ \dfrac{r}{q}=\pm\dfrac{be-2cd\pm e\sqrt{b^2-4ac}}{2c\sqrt{b^2-4ac}}, \\ \dfrac{r'}{q'}=\mp\dfrac{be-2cd\mp e\sqrt{b^2-4ac}}{2c\sqrt{b^2-4ac}}; \end{cases}$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, die aber nur unter der Voraussetzung

$$b^2-4ac \gtrless 0$$

gültig sind.

Wenn $b^2-4ac=0$ ist, hat man die keine Zweideutigkeit lassenden Formeln 20) anzuwenden.

V.

Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln reichen völlig aus, wenn a und c nicht zugleich verschwinden. Verschwinden aber a und c beide, und hat also die Grösse

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$

die Form

$$bxy+dx+ey+f,$$

so wollen wir zuerst annehmen, dass b nicht verschwinde. Da wir nun, weil a und c beide verschwinden, die Gleichungen

$$pp'=0, \quad qq'=0$$

haben, so kann rücksichtlich der Grössen p, p'; q, q' nur eine der vier folgenden Combinationen Statt finden:

$$p=0,\ q=0;\quad p=0,\ q'=0;\quad p'=0,\ q=0;\quad p'=0,\ q'=0.$$

Wegen der Gleichung

$$b=qp'+pq'$$

würden aber die Combinationen $p=0$, $q=0$ und $p'=0$, $q'=0$ auf $b=0$ führen, was der Voraussetzung widerstreitet. Also bleiben nur die Combinationen

$$p=0,\ q'=0 \ \text{ oder } \ p'=0,\ q=0.$$

Im ersten Falle hat man die Gleichungen:

$$b=qp',\quad d=rp',\quad e=qr',\quad f=rr';$$

aus denen sich

23) . . . . $\frac{r}{q}=\frac{d}{b},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{e}{b}$

ergiebt. Hieraus folgt durch Multiplication, wie es sein muss:

$$\frac{rr'}{qp'}=\frac{de}{b^2}=\frac{bf}{b^2}=\frac{f}{b},$$

weil nämlich wegen der vorausgesetzten Gleichung

$$bde=ae^2+(b^2-4ac)f+cd^2$$

im vorliegenden Falle $bde=b^2f$, also $de=bf$ ist.

Im zweiten Falle hat man die Gleichungen:

$$b=pq',\quad d=pr',\quad e=rq',\quad f=rr';$$

aus denen sich

24) . . . . $\frac{r}{p}=\frac{e}{b},\quad \frac{r'}{q'}=\frac{d}{b}$

ergiebt. Hieraus folgt durch Multiplication, wie es sein muss:

$$\frac{rr'}{pq'}=\frac{de}{b^2}=\frac{bf}{b^2}=\frac{f}{b},$$

weil nämlich, wie oben, im vorliegenden Falle $de=bf$ ist.

Wäre endlich zugleich

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0;$$

so hätte die Grösse

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$

die Form

$$dx+ey+f,$$

und wäre also selbst eine lineare Function, weshalb also natürlich von einer Zerlegung dieser Function in zwei lineare Functionen nicht die Rede sein kann, und daher über diesen Fall nichts weiter zu sagen ist.

VI.

Man kann noch verschiedene andere Formeln und Relationen finden, worüber das Folgende bemerkt werden mag.

Aus den in 16) gefundenen Formeln:

$$\frac{r}{p} = \pm \frac{bd - 2ae \pm d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\frac{r'}{p'} = \mp \frac{bd - 2ae \mp d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}};$$

in denen $b^2 - 4ac$ als nicht verschwindend vorausgesetzt worden ist, folgt:

$$(bd - 2ae)\frac{r}{p} = \pm \frac{(bd - 2ae)^2 \pm d(bd - 2ae)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$(bd - 2ae)\frac{r'}{p'} = \mp \frac{(bd - 2ae)^2 \mp d(bd - 2ae)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}};$$

also, weil

$$(bd - 2ae)^2 = (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)$$
$$= (d^2 - 4af)\sqrt{b^2 - 4ac}.\sqrt{b^2 - 4ac}$$

ist:

$$25)\quad \begin{cases} (bd - 2ae)\dfrac{r}{p} = \dfrac{d(bd - 2ae) \pm (d^2 - 4af)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\[2ex] (bd - 2ae)\dfrac{r'}{p'} = \dfrac{d(bd - 2ae) \mp (d^2 - 4af)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{cases}$$

Aus den in 22) gefundenen Formeln:

$$\frac{r}{q} = \pm \frac{be - 2cd \pm e\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\frac{r'}{q'} = \mp \frac{be - 2cd \mp e\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}};$$

in denen gleichfalls $b^2 - 4ac$ als nicht verschwindend vorausgesetzt worden ist, folgt:

$$(be - 2cd)\frac{r}{q} = \pm \frac{(be - 2cd)^2 \pm e(be - 2cd)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$(be - 2cd)\frac{r'}{q'} = \mp \frac{(be - 2cd)^2 \mp e(be - 2cd)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}};$$

also, weil

$$(be - 2cd)^2 = (b^2 - 4ac)(e^2 - 4cf)$$
$$= (e^2 - 4cf)\sqrt{b^2 - 4ac}.\sqrt{b^2 - 4ac}$$

ist:

$$26)\quad \begin{cases} (be-2cd)\dfrac{r}{q}=\dfrac{e(be-2cd)\pm(e^2-4cf)\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, \\ (be-2cd)\dfrac{r'}{q'}=\dfrac{e(be-2cd)\mp(e^2-4cf)\sqrt{b^2-4ac}}{2c}. \end{cases}$$

Aus den aus 12) bekannten Formeln:

$$\frac{r}{p}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a},\quad \frac{r'}{p'}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2a}$$

folgt durch Umkehrung:

$$\frac{p}{r}=\frac{2a}{d\pm\sqrt{d^2-4af}},\quad \frac{p'}{r'}=\frac{2a}{d\mp\sqrt{d^2-4af}};$$

also, wenn man Zähler und Nenner respective mit

$$d\mp\sqrt{d^2-4af} \text{ und } d\pm\sqrt{d^2-4af}$$

multiplicirt:

$$\frac{p}{r}=\frac{2a(d\mp\sqrt{d^2-4af})}{4af},\quad \frac{p'}{r'}=\frac{2a(d\pm\sqrt{d^2-4af})}{4af};$$

folglich:

$$27)\ \ldots\ \frac{p}{r}=\frac{d\mp\sqrt{d^2-4af}}{2f},\quad \frac{p'}{r'}=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2f}.$$

Aus den aus 18) bekannten Formeln:

$$\frac{r}{q}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c},\quad \frac{r'}{q'}=\frac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2c}$$

folgt durch Umkehrung:

$$\frac{q}{r}=\frac{2c}{e\pm\sqrt{e^2-4cf}},\quad \frac{q'}{r'}=\frac{2c}{e\mp\sqrt{e^2-4cf}};$$

also, wenn man im Zähler und Nenner respective mit

$$e\mp\sqrt{e^2-4cf},\quad e\pm\sqrt{e^2-4cf}$$

multiplicirt:

$$\frac{q}{r}=\frac{2c(e\mp\sqrt{e^2-4cf})}{4cf},\quad \frac{q'}{r'}=\frac{2c(e\pm\sqrt{e^2-4cf})}{4cf};$$

folglich:

$$28)\ \ldots\ \frac{q}{r}=\frac{e\mp\sqrt{e^2-4cf}}{2f},\quad \frac{q'}{r'}=\frac{e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2f}.$$

Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes ist nicht nöthig.

VIII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Wenn

$$A = aa' - bb' - cc', \quad D = bc' + cb',$$
$$B = bb' - cc' - aa', \quad E = ca' + ac',$$
$$C = cc' - aa' - bb'; \quad F = ab' + ba'$$

ist, so ist:

$$ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)(aa' + bb' + cc')$$

und

$$(A+B)(B+C)(C+A) - 2DEF = (A+B)F^2 + (B+C)D^2 + (C+A)E^2.$$

(Cambridge and Dublin mathematical Journal. Nos. V. et VI. (November 1846.) p. 286.)

Druckfehler.

In der Abhandlung Thl. XXXII. Nr. XXV. ist §. 11. (S. 274. und S. 280.) zweimal gezählt. Man muss S. 280. und S. 281. etwa §. 11. und §. 12. respective in §. 12. und §. 13. umwandeln.

Thl. XXXVI. S. 205. Z. 1. v. o. ist zu lesen „finden" statt „fanden."

Thl. XXXVIII. S. 474. Z. 11. u. Z. 15. muss es 15) statt 14) heissen.

In den in diesem Hefte enthaltenen beiden Aufsätzen von Herrn Professor Dr. Wittstein in Hannover, No. I. und No. II., sind folgende Fehler zu berichtigen: Auf S. 1. Z. 5. v. u. ist in dem Worte „Cylinder" das n hinzuzufügen. — S. 2. Z. 15. v. u., S. 3. Z. 4. v. u. und Z. 9. v. u. ist statt „Durchnittsfläche" zu setzen: „Durchschnittsfläche." — S. 12. Z. 6. v. u. ist zu les. „dass" statt „das." — S. 13. Z. 16. v. o. statt „hann" zu les. „kann."

Berichtigung. In der Abhandl. des Herrn Dr. Meyer Thl. XXXVIII. Nr. XX. S. 244. Z. 14. u. 15. v. u. muss es nach mir gemachter Anzeige statt: „wenn auch $2p+1$ eine Primzahl bedeutet" heissen: „wenn p eine Primzahl $2t+1$ bedeutet." G.

Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln, 2. Ausgabe von 1861.

No. 6. Taf. I. S. 9. unter P. P. zu 366. Z. 8. statt 222,8 lies: 292,8. — In der ersten und in der ungarischen Ausgabe befindet sich die richtige Zahl 292,8.

IX.

Ueber bestimmte Integrale.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

I.

§. 1.

Die Ausdrücke $\lg x$ und $\lg(1+x)$ erzeugen durch ihre Verbindung mit anderen Functionen von x eine besondere Gruppe von Integralen zwischen den Grenzen 0 und 1, die eine besondere Beachtung verdienen. Schon Euler hat sich mit denen der ersten Art in mehreren Abhandlungen beschäftigt, die in seiner Integral-Rechnung (aus d. Lat. übersetzt von Salomon, vierter Thl.) zusammengestellt sind. Er bearbeitete sie mit dem ihm eigenen Scharfsinn bis zu der Grenze, welche durch den Stand der damaligen Wissenschaft gezogen war, denn er wiederholt an mehreren Orten die Bemerkung, dass die hierher gehörigen Integrale auf „unentwickelbare Formeln" führen.

Später wurden sie von anderen bearbeitet, wie aus den Integraltafeln von Bierens de Haan, Amsterdam 1858. Tab. 152 u. ff. zu ersehen ist. Ferner beschäftigte sich mit ihnen Legendre in seinem Traité des fonct. ellipt. T. II. P. 365 u. ff., wo sie unter dem Namen der Euler'schen Integrale aufgeführt sind. Der Fortschritt der Wissenschaft hat unterdessen manche Grenze entfernt, die früher bestand. Es dürfte daher wohl gerechtfertigt erscheinen, diese Untersuchungen wiederholt aufzugreifen und weiter fortzuführen, und hiemit die aus dem Ausdruck $\lg(1+x)$ sich ergebenden zu verbinden, welche bisher weniger beachtet worden. Zu dem Ende nehmen wir zuerst die letzteren auf und gehen dann zu den ersteren über. Hierbei wird es sachgemäss

sein, zuerst die Darstellung einiger Integrale vorauszuschicken, welche die Grundlage der ganzen Untersuchung bilden, und im Spätern hauptsächlich zur Anwendung kommen. Hierdurch wird die folgende Untersuchung wesentlich erleichtert und gefördert.

§. 2.

Entwickelt man den Ausdruck $\frac{1}{1+z}$ in eine Reihe und berücksichtigt den dabei entstehenden Rest, so erhält man:

1)

$$\frac{1}{1+z}=z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}-z^{-4}\ldots.(-)^{r-1}z^{-r}(-)^{r}\frac{z^{-r}}{1+z}.$$

Diese Darstellung führt auf die Unterscheidung zwischen einer geraden und ungeraden Zahl. Man hat daher

2)

$$\frac{1}{1+z}=z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}-z^{-4}\ldots.-z^{-2m}+\frac{z^{-2m}}{1+z},$$

3)

$$\frac{1}{1+z}=z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}-z^{-4}\ldots.+z^{-2m-1}-\frac{z^{-2m-1}}{1+z}.$$

Diese Formen lassen sich leicht verallgemeinern und es entsteht für $\frac{1}{a+bx}=\frac{1}{a(1+\frac{b}{a}x)}$:

4)

$$\frac{1}{a+bx}=\frac{x^{-1}}{b}-\frac{ax^{-2}}{b^2}+\frac{a^2x^{-3}}{b^3}\ldots.-\frac{a^{2m-1}x^{-2m}}{b^{2m}}+\frac{a^{2m}x^{-2m}}{b^{2m}(a+bx)},$$

5)

$$\frac{1}{a+bx}=\frac{x^{-1}}{b}-\frac{ax^{-2}}{b^2}+\frac{a^2x^{-3}}{b^3}\ldots.+\frac{a^{2m}x^{-2m-1}}{b^{2m+1}}-\frac{a^{2m+1}x^{-2m+1}}{b^{2m+1}(a+bx)}.$$

Hierin kann a und b willkürlich gewählt werden.

Setzt man $-z$ statt z in Nr. 1), so entsteht

6)

$$\frac{1}{1-z}=-(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\ldots.z^{-r})+\frac{z^{-r}}{1-z}$$

und die Unterscheidung zwischen einer geraden und ungeraden Zahl fällt weg.

Im Folgenden werden vorzugsweise die Gleichungen Nr. 2), 3) und 6) benutzt werden, weil diese die einfachern sind und die Uebertragung ins Allgemeine nach Nr. 4) und 5) leicht ist.

Schreibt man nun x statt z in Nr. 2) und 3), verbindet erstere mit $\int x^{2m}\partial x$, letztere mit $\int x^{2m+1}\partial x$, integrirt zwischen den Grenzen 0 und x und ordnet nach den steigenden Potenzen von x, so erhält man:

7)

$$\int_0^x \frac{x^{2m}\partial x}{1+x} = \lg(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^{2m}}{2m}\right),$$

8)

$$\int_0^x \frac{x^{2m+1}\partial x}{1+x} = -\lg(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Hieraus ergibt sich für die Grenzen zwischen 0 und 1:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}\partial x}{1+x} = \lg 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2m}\right) = \lg 2 - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u},$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\partial x}{1+x} = -\lg 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2m+1}$$
$$= -\lg 2 + \Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u}.$$

Aus Nr. 6) entsteht auf diese Weise:

11)

$$\int_0^x \frac{x^m\partial x}{1-x} = -\lg(1-x) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \frac{x^m}{m}\right) = -\lg(1-x) - \Sigma_1^m \frac{x^u}{u}.$$

In den Darstellungen 9)—11) hat man für u allmälig die Werthe zwischen den angezeigten Grenzen zu setzen.

Aus Nr. 9) und 10) leiten sich folgende Integrale ab:

12)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x} = \lg 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x} = -\lg 2+1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x} = \lg 2-\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1+x} = -\lg 2+\frac{5}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{1+x} = \lg 2-\frac{7}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\partial x}{1+x} = -\lg 2+\frac{47}{60},$$

u. s. w.

Die Werthe sämmtlicher Integrale sind positiv, wie sich leicht folgert. Der Werth von $\lg 2$ ist zwischen zwei auf einander folgende Brüche eingeschlossen.

Aus Nr. 4) und 5) ergeben sich folgende Formen:

13)

$$\int_0^x \frac{x^{2m}\partial x}{a+bx} = \frac{a^{2m}\lg(a+bx)}{b^{2m+1}} + \frac{x^{2m}}{2mb} - \frac{ax^{2m-1}}{(2m-1)b^2} + \ldots - \frac{a^{2m-1}x}{b^{2m}},$$

14)

$$\int_0^x \frac{x^{2m+1}\partial x}{a+bx} = -\frac{a^{2m+1}\lg(a+bx)}{b^{2m+2}} + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)b} - \frac{ax^{2m}}{2mb} + \ldots + \frac{a^{2m}x}{b^{2m+1}}.$$

§. 3.

Bringt man nun mit den in §. 2. erhaltenen Resultaten den Ausdruck $\lg(1+x)$ in Verbindung, so erhält man nach der gewöhnlichen Methode:

1)

$$\int_0^x x^{2m-1}\lg(1+x)\partial x = \frac{x^{2m}}{2m}\lg(1+x) - \frac{1}{2m}\int_0^x \frac{x^{2m}\partial x}{1+x},$$

und hieraus durch Einführung aus Nr. 7) §. 2.:

2)

$$\int_0^x x^{2m-1}\lg(1+x)\partial x = \frac{x^{2m}-1}{2m}\lg(1+x) + \frac{1}{2m}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots - \frac{x^{2m}}{2m}\right).$$

Auf gleiche Weise entsteht durch Integration und Einführung aus Nr. 8) §. 2.:

3)

$$\int_0^x x^{2m}\lg(1+x)\partial x = \frac{x^{2m+1}\lg(1+x)}{2m+1} - \frac{1}{2m+1}\int_0^x \frac{x^{2m+1}\partial x}{1+x}$$

$$= \frac{x^{2m+1}+1}{2m+1}\lg(1+x) - \frac{1}{2m+1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right).$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 ergeben sich folgende Formen:

4)

$$\int_0^1 x^{2m-1}\lg(1+x)\partial x = \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2m}\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u},$$

5)

$$\int_0^1 x^{2m}\lg(1+x)\partial x = \frac{2\lg 2}{2m+1} - \frac{1}{2m+1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{2m+1}\right)$$

$$= \frac{2\lg 2}{2m+1} - \frac{1}{2m+1}\Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u}.$$

Hieraus erhält man folgende Integrale:

6)

$$\int_0^1 \lg(1+x)\partial x = 2\lg 2 - 1,$$
$$\int_0^1 x\lg(1+x)\partial x = \frac{1}{4},$$
$$\int_0^1 x^2\lg(1+x)\partial x = \frac{2}{3}\lg 2 - \frac{5}{18},$$
$$\int_0^1 x^3\lg(1+x)\partial x = \frac{7}{48},$$
$$\int_0^1 x^4\lg(1+x)\partial x = \frac{2}{5}\lg 2 - \frac{47}{300},$$
$$\int_0^1 x^5\lg(1+x)\partial x = \frac{37}{300},$$
$$\int_0^1 x^6\lg(1+x)\partial x = \frac{2}{7}\lg 2 - \frac{319}{2940},$$
$$\int_0^1 x^7\lg(1+x)\partial x = \frac{533}{6720},$$

u. s. w.

Verbindet man mit den aus Nr 4) und 5) sich ableitenden und in Nr. 6) angegebenen Ausdrücken der Reihe nach die Werthe a_1, a_2, $a_3 \ldots$, so erhält man folgende Darstellungen:

7)

$$\int_0^1 \Sigma_0^{2m-1} a_u x^u \lg(1+x)\partial x = \Sigma_0^{m-1}\frac{a_{2u}}{2u+1}2\lg 2$$
$$+ \Sigma_1^{2m}(-)^u \frac{a_{u-1}}{u}\left(\Sigma_1^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right),$$

8)

$$\int_0^1 \Sigma_0^{2m} a_u x^u \lg(1+x)\partial x = \Sigma_0^{m}\frac{a_{2u}}{2u+1}2\lg 2$$
$$+ \Sigma_1^{2m+1}(-)^u \frac{a_{u-1}}{u}\left(\Sigma_1^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right).$$

Hierin hat man in dem Gliede links und dem ersten Gliede rechts statt u allmälig die Werthe zwischen den angegebenen

Grenzen zu setzen. In dem zweiten Gliede rechts hat man für jeden bestimmten Werth von u in dem eingeklammerten Ausdrucke $\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}$ allmälig die Werthe 1, 2, 3...u zu schreiben.

Setzt man $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 1$, so geht Nr. 7) u. 8) über in

9)

$$\int_0^1 \frac{1-x^{2m}}{1-x}\lg(1+x)\partial x = \Sigma_0{}^{m-1}\frac{2}{2u+1}\lg 2 + \Sigma_1{}^{2m}(-)^u\frac{1}{u}(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}),$$

10)

$$\int_0^1 \frac{1-x^{2m+1}}{1-x}\lg(1+x)\partial x = \Sigma_0{}^m\frac{2}{2u+1}\lg 2 + \Sigma_1{}^{2m+1}(-)^u\frac{1}{u}(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}).$$

Werden aber die mit ungeraden Stellenzahlen versehenen a negativ genommen und die a der Einheit gleich gesetzt, so erhält man:

11)

$$\int_0^1 \frac{1-x^{2m}}{1+x}\lg(1+x)\partial x = \Sigma_0{}^{m-1}\frac{2\lg 2}{2u+1} - \Sigma_1{}^{2m}\frac{1}{u}(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}),$$

12)

$$\int_0^1 \frac{1+x^{2m+1}}{1+x}\lg(1+x)\partial x = \Sigma_0{}^m\frac{2\lg 2}{2u+1} - \Sigma_1{}^{2m+1}\frac{1}{u}(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u}).$$

Setzt man in 7) und 8) statt der a die Vorzahlen der Potenzen des Binomiums $(1-x)$ oder, was dasselbe ist, vervielfacht man der Reihe nach die Integrale in Nr. 6) mit diesen Vorzahlen und vereinigt man die erhaltenen Resultate nach Angabe der Zeichen, so leiten sich hieraus folgende Integrale ab:

13)

$$\int_0^1 (1-x)\lg(1+x)\partial x = 2\lg 2 - \frac{5}{4},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2\lg(1+x)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{16}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3\lg(1+x)\partial x = 4\lg 2 - \frac{131}{48},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1+x)\partial x = \frac{32}{5}\lg 2 - \frac{661}{150},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1+x)\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{1327}{180},$$

u. s. w.

Aus den Darstellungen Nr. 9) bis 12) leiten sich folgende Integrale ab:

14)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x}\lg(1+x)\partial x = 2\lg 2 - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x}\lg(1+x)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{37}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1-x}\lg(1+x)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{127}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^5}{1-x}\lg(1+x)\partial x = \frac{46}{15}\lg 2 - \frac{3739}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x}\lg(1+x)\partial x = \frac{46}{15}\lg 2 - \frac{1123}{1200},$$

u. s. w.

15)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x}\lg(1+x)\partial x = 2\lg 2 - \frac{5}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^3}{1+x}\lg(1+x)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{55}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x}\lg(1+x)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{241}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^5}{1+x}\lg(1+x)\partial x = \frac{46}{45}\lg 2 - \frac{6589}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1+x}\lg(1+x)\partial x = \frac{46}{45}\lg 2 - \frac{6959}{3600},$$

u. s. w.

§. 4.

Behandelt man auf gleiche Weise das Integral $\int x^{m-1}\lg(1-x)\partial x$, so ist

1)

$$\int_0^x x^{m-1}\lg(1-x)\partial x = \frac{x^m}{m}\lg(1-x) + \frac{1}{m}\int_0^x \frac{x^m}{1-x}\partial x.$$

Durch Einführung des Werthes aus Nr. 11) §. 2. entsteht

2)

$$\int_0^x x^{m-1}\lg(1-x)\partial x = \frac{x^m-1}{m}\lg(1-x) - \frac{1}{m}(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \frac{x^m}{m})$$

und für die Grenzen zwischen 0 und 1

3)

$$\int_0^x x^{m-1}\lg(1-x)\partial x = -\frac{1}{m}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{m}) = -\frac{1}{m}\frac{C(1,2\dots m)^{m-1}}{1.2.3\dots m}.$$

Hierin bedeutet $C(1,2,3\dots m)^{m-1}$ die Summe der Producte der Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen $1,2,3\dots m$ zur $m-1$ Classe. Hieraus erhält man folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \lg(1-x)\partial x = -1,$$

$$\int_0^1 x\lg(1-x)\partial x = -\frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1-x)\partial x = -\frac{11}{18},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1-x)\partial x = -\frac{25}{48},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1-x)\partial x = -\frac{137}{300},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1-x)\partial x = -\frac{49}{120},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1-x)\partial x = -\frac{363}{980},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1-x)\partial x = -\frac{761}{2240},$$

u. s. w.

Verbindet man auch hier die aus Nr. 3) fliessenden Ausdrücke der Reihe nach mit a_0, a_1, a_2.... und verfährt wie in §. 3. geschah, so erhält man folgende Darstellungen:

5)

$$\int_0^1 \Sigma_1{}^m a_{u-1} x^{u-1} \lg(1-x)\partial x = -\Sigma_1{}^m \frac{a_{u-1}}{u}(\Sigma_1{}^u \frac{1}{u}),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x} \lg(1-x)\partial x = -\Sigma_1{}^m \frac{1}{u}(\Sigma_1{}^u \frac{1}{u}),$$

7)

$$\int_0^1 \frac{1(-)^{m-1} x^m}{1+x} \lg(1-x)\partial x = -\Sigma_1{}^m (-)^{u-1} \frac{1}{u}(\Sigma_1{}^u \frac{1}{u}).$$

Werden die Vorzahlen der Potenzen des Binomiums $(1+x)$ statt der a eingeführt, so erhält man folgende Integrale, die zu weiteren Anwendungen dienen:

8)

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1-x)\partial x = -\frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1-x)\partial x = -\frac{28}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1-x)\partial x = -\frac{269}{48},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1-x)\partial x = -\frac{1531}{150},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1-x)\partial x = -\frac{3377}{180},$$

u. s. w.

Aus Nr. 7) und 8) leiten sich folgende Integrale ab:

9)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{85}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1-x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{415}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^5}{1-x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{12019}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{13489}{3600},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^3}{1+x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{31}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{49}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^5}{1+x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{2869}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{1+x}\lg(1-x)\partial x = -\frac{1399}{3600},$$

u. s. w.

Nachdem in diesem Paragraphen gezeigt ist, wie die in Nr. 9) und 10) aufgestellten Integrale gefunden werden, und dasselbe auch von den in §. 3. Nr. 14) und 15) aufgestellten gilt, so wird im Folgenden auf Integrale dieser Form nicht weiter Rücksicht genommen werden. Die Darstellung der Integrale dieser

Art unterliegt auch in den späteren Fällen keiner weitern Schwierigkeit.

§. 5.

Andere hierhergehörige Resultate, die zu weiteren Anwendungen dienen, gewinnt man auf folgende Art. Es ist, wie sich leicht rechtfertigt:

1)

$$\int x^{q-1}(a+bx^q)^r \partial x = \frac{(a+bx^q)^{r+1}}{bq(r+1)}.$$

Setzt man der Kürze wegen $(a+bx^q)^r = X^r$ und differenzirt diese Gleichung wiederholt nach r und dividirt durch ∂r, so entsteht:

$$\int x^{q-1} X^r \lg X \partial x = \frac{X^{r+1} \lg X}{bq(r+1)} - \frac{X^{r+1}}{bq(r+1)^2},$$

$$\int x^{q-1} X^r (\lg X)^2 \partial x = \frac{X^{r+1}(\lg X)^2}{bq(r+1)} - \frac{2X^{r+1}\lg X}{bq(r+1)^2} + \frac{2.1X^{r+1}}{bq(r+1)^3},$$

$$\int x^{q-1} X^r (\lg X)^3 \partial x$$

$$= \frac{X^{r+1}(\lg X)^3}{bq(r+1)} - \frac{3X^{r+1}(\lg X)^2}{bq(r+1)^2} + \frac{3.2X^{r+1}\lg X}{bq(r+1)^3} - \frac{3.2.1X^{r+1}}{bq(r+1)^4},$$

u. s. w.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird man zu folgender Darstellung geführt, wenn der ursprüngliche Werth für X^r geschrieben wird:

2)

$$\int x^{q-1}(a+bx^q)^r [\lg(a+bx)^q]^p \partial x$$

$$= \frac{(a+bx^q)^{r+1}}{bq}\left[\frac{[\lg(a+bx^q)]^p}{r+1} - \frac{p[\lg(a+bx^q)]^{p-1}}{(r+1)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{p^{2|-1}[\lg(a+bx^q)]^{p-2}}{(r+1)^3} \ldots - \frac{p^{p|-1}}{(r+1)^{p+1}}\right].$$

Für die Grenzen zwischen 0 und x entsteht:

3)

$$\int_0^z x^{q-1}(a+bx^q)^r[\lg(a+bx^q)]^p\partial x$$

$$=\frac{(a+bx^q)^{r+1}}{bq}\left[\frac{[\lg(a+bx^q)]^r}{r+1}-\frac{p[\lg(a+bx^q)]^{p-1}}{(r+1)^2}\dots(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}\right]$$

$$-\frac{a^{r+1}}{bq}\left[\frac{(\lg a)^p}{r+1}-\frac{p(\lg a)^{p-1}}{(r+1)^2}+\frac{p^{2|-1}(\lg a)^{p-2}}{(r+1)^3}\dots(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}\right].$$

Setzt man $a=1$, $b=1$, so entsteht hieraus für die Grenzen zwischen 0 und 1, da alle Glieder der zweiten Reihe mit Ausnahme des letzten verschwinden:

4)

$$\int_0^1 x^{q-1}(1+x^q)^r[\lg(1+x^q)]^p\partial x$$

$$=\frac{2^{r+1}}{q}\left[\frac{(\lg 2)^p}{r+1}-\frac{p(\lg 2)^{p-1}}{(r+1)^2}+\dots(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}\right](-)^{p+1}\frac{1^{p|1}}{q(r+1)^{p+1}}.$$

Wird $-b$ statt b geschrieben, so folgt aus Nr. 3):

5)

$$\int_0^z x^{q-1}(a-bx^q)^r[\lg(a-bx^q)]^p\partial x$$

$$=-\frac{(a-bx^q)^{r+1}}{bq}\left[\frac{[\lg(a-bx^q)]^p}{r+1}-\frac{p[\lg(a-bx^q)]^{p-1}}{(r+1)^2}\dots\right.$$

$$\left.\dots(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}\right]$$

$$+\frac{a^{r+1}}{bq}\left[\frac{(\lg a)^p}{r+1}-\frac{p(\lg a)^{p-1}}{(r+1)^2}+\frac{p^{2|-1}(\lg a)^{p-2}}{(r+1)^3}\dots(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}\right].$$

Wird in Nr. 5) $a=1$, $b=1$ gesetzt und zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt, so ergibt sich hieraus:

6)

$$\int_0^1 x^{q-1}(1-x^q)^r[\lg(1-x^q)]^p\partial x=(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{q(r+1)^{p+1}}.$$

Wird $a=0$, $b=1$ in Nr. 2) gesetzt und zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt, so folgt:

7)

$$\int_0^1 x^{qr+q-1}(\lg x^q)^p\partial x=(-)^p\cdot\frac{1^{p|1}}{q(r+1)^{p+1}}.$$

Hieraus und aus Nr. 6) erhält man folgende Beziehung:

8)

$$\int_0^1 x^{q-1}(1-x^q)^r[\lg(1-x^q)]^p \partial x = \int_0^1 x^{qr+q-1}(\lg x^q)^p \partial x.$$

Wird $q = 1$ gesetzt, so erhält man hieraus:

9)

$$\int_0^1 x^r(\lg x)^p \partial x = (-)^p \cdot \frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}.$$

10)

$$\int_0^1 (1-x)^r[\lg(1-x)]^p \partial x = (-)^p \cdot \frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}},$$

11)

$$\int_0^1 x^r(\lg x)^p \partial x = \int_0^1 (1-x)^r[\lg(1-x)]^p \partial x.$$

Von diesen Gleichungen ist Nr. 9) bekannt. Diese Gleichungen lassen sich auch aus $\int_0^1 y^r(\lg y)^p \partial y = (-)^p \cdot \frac{1^{p|1}}{(r+1)^{p+1}}$ ableiten, wenn man $y = x^q$, und $y = 1 - x$ setzt und die nöthigen Umformungen macht.

Da die Gleichung Nr. 1) bekanntlich für ein ganzes und gebrochenes, positives und negatives r gilt, so gelten auch die daraus abgeleiteten Gleichungen Nr. 2)—5) unter dieser Bedingung. p bedeutet eine ganze Zahl.

Ist aber $a = 0$ und r negativ, so führt das sich ergehende Resultat auf einen unendlich grossen Werth. Dasselbe ist der Fall in Nr. 5) unter dieser Voraussetzung. Die Gleichungen Nr. 6)—11) beziehen sich daher nur auf positive ganze und gebrochene r.

§. 6.

Die im vorigen Paragraphen aufgefundenen Resultate geben nicht nur für sich, sondern auch in Verbindung mit den frühern Stoff zu mancherlei Anwendungen.

Setzt man $q = 1$, $p = 1$, $m - 1$ statt r in Nr. 4) §. 5., so erhält man:

1)

$$\int_0^1 (1+x)^{m-1} \lg(1+x)\partial x = \frac{2^m \lg 2}{m} - \frac{2^m - 1}{m^2},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

2)

$$\int_0^1 \lg(1+x)\partial x = 2\lg 2 - 1,$$

$$\int_0^1 (1+x)\ \lg(1+x)\partial x = 2\lg 2 - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1+x)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{7}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1+x)\partial x = 4\lg 2 - \frac{15}{16};$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1+x)\partial x = \frac{32}{5}\lg 2 - \frac{31}{25},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1+x)\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{7}{4},$$

u. s. w.

Aus Nr. 6) §. 5. erhält man für $q=1$, $p=1$ und $m-1$ statt r:

3)

$$\int_0^1 (1-x)^{m-1} \lg(1-x)\partial x = -\frac{1}{m^2},$$

und man erkennt, dass die hieraus sich ableitenden Integrale die Glieder der zweiten reciproken Potenzreihe bilden. Setzt man $-m-1$ statt r, $q=1$, $p=1$ in Nr. 4) §. 5., so erhält man:

4)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^{m+1}} = -\frac{\lg 2}{m.2^m} + \frac{2^m - 1}{m^2.2^m}.$$

Diess führt zu folgenden Integralen:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^2} = -\frac{\lg 2}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^3} = -\frac{\lg 2}{2.4} + \frac{3}{4.4},$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^4} = -\frac{\lg 2}{3.8} + \frac{7}{9.8},$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^5} = -\frac{\lg 2}{4.16} + \frac{15}{16.16},$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^6} = -\frac{\lg 2}{5.32} + \frac{31}{25.32},$$

u. s. w.

Setzt man die eben angegebenen Wertbe in Nr. 5) §. 5, so entstehen für die Grenzen zwischen 0 und 1 unendlich grosse Werthe. Nimmt man aber die Grenzen zwischen 0 und -1, so erhält man:

6)

$$\int_0^{-1} \frac{\lg(1-x)\partial x}{(1-x)^{m+1}} = \frac{\lg 2}{m.2^m} - \frac{2^m-1}{m^2.2^m}.$$

Diess führt zu den entgegengesetzten Werthen von den eben angegebenen. Setzt man $q = 1$ und $m + \frac{1}{2}$ statt r in Nr. 4) §. 5, so erhält man:

7)

$$\int_0^1 (1+x)^{m+\frac{1}{2}} \lg(1+x)\partial x = \frac{2^{m+2}\sqrt{2}.\lg 2}{2m+3} - \frac{4}{(2m+3)^2}(2^{m+1}\sqrt{2}-1),$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

8)

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\lg(1+x)\partial x = \frac{4\sqrt{2}\lg 2}{3} - \frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1),$$

$$\int_0^1 (1+x)^{\frac{3}{2}}\lg(1+x)\partial x = \frac{8\sqrt{2}\lg 2}{5} - \frac{4}{25}(4\sqrt{2}-1),$$

$$\int_0^1 (1+x)^{\frac{5}{2}}\lg(1+x)\partial x = \frac{16\sqrt{2}.\lg 2}{7} - \frac{4}{49}(8\sqrt{2}-1),$$

$$\int_0^1 (1+x)^{\frac{7}{2}}\lg(1+x)\partial x = \frac{32\sqrt{2}.\lg 2}{9} - \frac{4}{81}(16\sqrt{2}-1),$$

u. s. w.

Setzt mau aber $-m-\frac{1}{2}$ statt r, so erhält man:

9)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\,\partial x}{(1+x)^{m+\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}\lg 2}{(2m-1)2^{m-1}} + \frac{2^m-\sqrt{2}}{(2m-1)^2.2^{m-2}}$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{2}\lg 2 + 4(1-\sqrt{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{2}\lg 2 + 2(2-\sqrt{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}\lg 2}{3.2} + \frac{1}{9}(4-\sqrt{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^{\frac{7}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}\lg 2}{5.4} + \frac{8-\sqrt{2}}{25.2},$$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)\partial x}{(1+x)^{\frac{9}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}\lg 2}{7.8} + \frac{16-\sqrt{2}}{49.4},$$

u. s. w.

Auf gleiche Weise erhält man aus Nr. 5) §. 5.:

11)

$$\int_0^1 (1-x)^{m+\frac{1}{2}}\lg(1-x)\partial x = -\frac{4}{(2m+3)^2},$$

woraus sich die besonderen Fälle leicht ableiten.

§. 7.

Weitere Resultate lassen sich gewinnen, wenn man die in §. 3. und §. 4. gefundenen unter einander verbindet, letztere von erstern abzieht, oder sie ihnen zuzählt. Zieht man Nr. 2) §. 4. nach der nöthigen Umformung von Nr. 2) und 3) §. 3. ab, so erhält man:

1)

$$\int_0^x x^{2m-1}\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{x^{2m}-1}{2m}\lg\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{m}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right),$$

2)

$$\int_0^1 x^{2m}\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{x^{2m+1}+1}{2m+1}\lg(1+x) - \frac{x^{2m+1}-1}{2m+1}\lg(1-x)$$

$$+\frac{1}{2m+1}(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots.\frac{x^{2m}}{m}).$$

Hieraus erhält man für die Grenzen zwischen 0 und 1:

3)

$$\int_0^1 x^{2m-1}\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{1}{m}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{2m-1}),$$

4)

$$\int_0^1 x^{2m}\lg\frac{1-x}{1-x}\partial x = \frac{2\lg 2}{2m+1}+\frac{1}{2m+1}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.\frac{1}{m}).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale;

5)

$$\int_0^1 \lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 2\lg 2,$$

$$\int_0^1 x\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 1,$$

$$\int_0^1 x^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{5\lg 2}{3}+\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 x^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{2\lg 2}{5}+\frac{3}{10},$$

$$\int_0^1 x^5\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{23}{25},$$

$$\int_0^1 x^6\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{2\lg 2}{7}+\frac{11}{12},$$

$$\int_0^1 x^7\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{44}{105},$$

u. s. w.

Man kann nun die in 3)—5) enthaltenen Darstellungen in

derselben Weise behandeln, wie diess in §. 4. Nr. 7)—12) oder §. 4. Nr. 5)—7) gezeigt wurde. Diess bietet keine weitere Schwierigkeit dar. Wir übergehen daher die Aufstellung allgemeiner Formen und theilen folgende hieraus abgeleitete Integrale mit:

6)

$$\int_0^1 (1+x)\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 2\lg 2 + 1,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 + \frac{7}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 4\lg 2 + \frac{14}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{32}{5}\lg 2 + \frac{269}{30},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 + \frac{1531}{90},$$

u. s. w.

7)

$$\int_0^1 (1-x)\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 2\lg 2 - 1,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{5}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = 4\lg 2 - \frac{8}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{32}{5}\lg 2 - \frac{131}{30},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{661}{90},$$

u. s. w.

Ferner leiten sich durch schickliche Verbindung der Vorzahlen der Potenzen der Binomien $(1\pm x^2)$ mit den Darstellungen Nr. 5) folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 (1+x^2)\ \lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{5}{3}\lg 2+\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{56}{16}\lg 2+\frac{29}{30},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{192}{35}\lg 2+\frac{227}{105},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{2656}{315}\lg 2+\frac{16679}{3780},$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 (1-x^2)\ \lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{4}{3}\lg 2-\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{16}{15}\lg 2-\frac{11}{30},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{32}{35}\lg 2-\frac{38}{105},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{256}{315}\lg 2-\frac{1321}{3780},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 x(1+x^2)\ \lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{5}{3},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{128}{45},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{104}{21},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{13808}{1575},$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 x(1-x^2)\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{8}{45},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{4}{35},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4\lg\frac{1+x}{1-x}\partial x=\frac{128}{1575}$$

u. s. w.

Diese Darstellungen lassen sich, wie man sieht, beliebig weiter fortsetzen.

§. 8.

Zählt man die Gleichungen Nr. 2) §. 4. und Nr. 2) und 3) §. 3. zusammen, so erhält man nach den nöthigen Umformungen:

1)

$$\int_0^x x^{2m-1}\lg(1-x^2)\partial x=\frac{x^{2m}-1}{2m}\lg(1-x^2)-\frac{1}{2m}(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots\frac{x^{2m}}{m}),$$

2)

$$\int_0^x x^{2m}\lg(1-x^2)\partial x=\frac{x^{2m+1}+1}{2m+1}\lg(1+x)+\frac{x^{2m+1}-1}{2m+1}\lg(1-x)$$

$$-\frac{2}{2m+1}(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\frac{x^{2m+1}}{2m+1}).$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 folgt hieraus:

3)

$$\int_0^1 x^{2m-1}\lg(1-x^2)\partial x=-\frac{1}{2m}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m})=-\frac{1}{2m}\frac{C(1,2\ldots m)^{m-1}}{1.2.3\ldots m},$$

4)

$$\int_0^1 x^{2m}\lg(1-x^2)\partial x=\frac{2\lg 2}{2m+1}-\frac{2}{2m+1}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\frac{1}{2m+1}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \lg(1-x^2)\partial x = \quad 2\lg 2-2,$$

$$\int_0^1 x\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1-x^2)\partial x = \quad \frac{2}{3}\lg 2-\frac{8}{9},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{3}{8},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1-x^2)\partial x = \quad \frac{2}{5}\lg 2-\frac{46}{75},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{11}{36},$$

$$\int_0^1 x^6\lg(1-x^2)\partial x = \quad \frac{2}{7}\lg 2-\frac{352}{735},$$

$$\int_0^1 x^7\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{25}{96},$$

$$\int_0^1 x^8\lg(1-x^2)\partial x = \quad \frac{2}{9}\lg 2-\frac{1126}{2835},$$

$$\int_0^1 x^9\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{137}{600},$$

u. s. w.

Werden auch diese Integrale nach den früher gemachten Bemerkungen mit den Vorzahlen der Binomien $(1\pm x)$ verbunden, so erhält man:

6)

$$\int_0^1 (1+x)\lg(1-x^2)\partial x = 2\lg 2-\frac{5}{2},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2\lg(1-x^2)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2-\frac{35}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3\lg(1-x^2)\partial x = 4\lg 2-\frac{157}{24},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{32}{5}\lg 2 - \frac{1717}{150},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{923}{45},$$

u. s. w.

7)

$$\int_0^1 (1-x)\lg(1-x^2)\partial x = 2\lg 2 - \frac{3}{2},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{17}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg(1-x^2)\partial x = 4\lg 2 - \frac{67}{24},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{32}{5}\lg 2 - \frac{667}{150},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{37}{5},$$

u. s. w.

Bringt man die Integrale in Nr. 5) mit den Vorzahlen der Binomien $(1 \pm x^2)$ in Verbindung, so entsteht:

8)

$$\int_0^1 (1+x^2)\lg(1-x^2)\partial x = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{26}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^2 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{56}{15}\lg 2 - \frac{988}{225},$$

$$\int_0^1 (1+x^2)^3 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{192}{35}\lg 2 - \frac{25672}{3675},$$

. . . .

9)

$$\int_0^1 (1-x^2)\lg(1-x^2)\partial x = \frac{4}{3}\lg 2 - \frac{10}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{16}{15}\lg 2 - \frac{188}{225},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^3 \lg(1-x^2)\partial x = \frac{32}{35}\lg 2 - \frac{2552}{3675},$$

. . . .

10)

$$\int_0^1 x(1+x^2)\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{7}{8},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{16}{9},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{269}{96}$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1531}{300},$$

. . . .

11)

$$\int_0^1 x(1-x^2)\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{18},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{32},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{50},$$

. . . .

12)

$$\int_0^1 x(1-x^2)^m\lg(1-x^2)\partial x = -\frac{1}{2(m+1)^2}.$$

Dieses Integral ist ein besonderer Fall von dem in Nr. 6) §. 5. aufgestellten, wenn dort $q=r$, $r=m$ und $p=1$ geschrieben wird. Die Vergleichung der eben in Nr. 6)—10) aufgestellten Resultate mit den in §. 5. entwickelten allgemeinen Formen zeigt, dass man auf dem bisher befolgten Wege eine reichere Ausbeute von Integralen erhält, als diejenigen sind, welche sich aus allgemeinen Integralformeln ableiten lassen.

§. 9.

Kehrt man nun zu den Gleichungen in §. 2. zurück und setzt $z=x^2$ in Nr. 2) und 3), verbindet Nr. 2) mit $\int x^{4m}\partial x$ und $\int x^{4m+1}\partial x$, Nr. 3) mit $\int x^{4m+2}\partial x$ und $\int x^{4m+3}\partial x$, integrirt zwischen den Grenzen 0 und x, so entstehen folgende vier verschiedene Integralformen, die alle hierher gehörige Fälle umfassen:

1)
$$\int_0^x \frac{x^{4m}\partial x}{1+x^2}=\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^2}-(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots\frac{x^{4m-1}}{4m-1}),$$

2)
$$\int_0^x \frac{x^{4m+1}\partial x}{1+x^2}=\int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^2}-(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}\ldots-\frac{x^{4m}}{4m}),$$

3)
$$\int_0^x \frac{x^{4m+2}\partial x}{1+x^2}=-\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^2}+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots+\frac{x^{4m+1}}{4m+1},$$

4)
$$\int_0^x \frac{x^{4m+3}\partial x}{1+x^2}=-\int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}\ldots+\frac{x^{4m+2}}{4m+2},$$

Hierin ist:

5)
$$\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^2}=\mathrm{ArcTg}\,x;\quad \int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\lg(1+x^2).$$

Integrirt man zwischen den Grenzen 0 und 1, so entsteht:

6)
$$\int_0^1 \frac{x^{4m}\partial x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{4m-1}),$$
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}\partial x}{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\ldots-\frac{1}{2m}),$$
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}\partial x}{1+x^2}=-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1},$$
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}\partial x}{1+x^2}=-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots+\frac{1}{2m+1}).$$

Für die allgemeinen Formen erhält man:

7)

$$\int_0^x \frac{x^{4m}\partial x}{a+bx^2} = \frac{x^{4m-1}}{b(4m-1)} - \frac{ax^{4m-3}}{b^2(4m-3)} \cdots - \frac{a^{2m-1}x}{b^{2m}} + \frac{a^{2m}}{b^{2m}} \int_0^x \frac{\partial x}{a+bx^2},$$

8)

$$\int_0^x \frac{x^{4m+1}\partial x}{a+bx^2} = \frac{x^{4m}}{b.4m} - \frac{a.x^{4m-2}}{b^2.(4m-2)} \cdots - \frac{a^{2m-1}x}{b^{2m}.2} + \frac{a^{2m}}{b^{2m}} \int_0^x \frac{x\partial x}{a+bx^2},$$

9)

$$\int_0^x \frac{x^{4m+2}\partial x}{a+bx^2} = \frac{x^{4m+1}}{b(4m+1)} - \frac{ax^{4m-1}}{b^2.(4m-1)} \cdots + \frac{a^{2m}x}{b^{2m+1}} - \frac{a^{2m+1}}{b^{2m+1}} \int_0^x \frac{\partial x}{a+bx^2},$$

10)

$$\int_0^x \frac{x^{4m+3}\partial x}{a+bx^2} = \frac{x^{4m+2}}{b(4m+2)} - \frac{ax^{4m}}{b^2.4m} \cdots + \frac{a^{2m}x^2}{b^{2m+1}.2} - \frac{a^{2m+1}}{b^{2m+1}} \int_0^1 \frac{x\partial x}{a+bx^2}.$$

Hierin ist:

11)

$$\int_0^x \frac{\partial x}{x+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{ArcTg} x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

12)

$$\int_0^x \frac{x\partial x}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \lg \frac{a+bx^2}{a}.$$

Aus Nr. 6) leiten sich folgende Integrale ab:

13)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lg 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \partial x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lg 2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \partial x}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{13}{15},$$

u. s. w.

Setzt man $z^2 = x^2$ in Nr. 6) §. 2., $r = 2m$ und verbindet die hiedurch entstehende Reihe mit $\int x^{2m}\partial x$ und $\int x^{2m+1}\partial x$, integrirt zwischen den Grenzen 0 und x und bemerkt, dass

$$\int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x} \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{x\partial x}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg(1-x^2)$$

ist, so erhält man:

14)

$$\int_0^x \frac{x^{2m}\partial x}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x} - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right),$$

15)

$$\int_0^x \frac{x^{2m+1}\partial x}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg(1-x^2) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^{2m}}{2m}\right).$$

Diese Integrale führen für die Grenzen zwischen 0 und 1 auf unendlich grosse Werthe.

§. 10.

Geht man von der Gleichung

1)

$$\int x^{m-1}\lg(1+x^2)\partial x = \frac{x^m}{m}\lg(1+x^2) - \frac{2}{m}\int \frac{x^{m+1}\partial x}{1+x^2}$$

aus, setzt $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$, $4m+4$ statt m, und führt die im zweiten Gliede auf der rechten Seite angezeigten Integrale aus Nr. 1)—4) §. 9. ein, so erhält man folgende vier Integralformen:

2)

$$\int_0^x x^{4m}\lg(1+x^2)\partial x$$

$$= \frac{x^{4m+1}}{4m+1}\lg(1+x^2) + \frac{2\,\mathrm{ArcTg}x}{4m+1} - \frac{2}{4m+1}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + \frac{x^{4m+1}}{4m+1}\right),$$

3)

$$\int_0^x x^{4m+1} \lg(1+x^2)\partial x$$

$$= \frac{x^{4m+2}+1}{4m+2}\lg(1+x^2) - \frac{2}{4m+2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \ldots + \frac{x^{4m+2}}{4m+2}\right),$$

4)

$$\int_0^x x^{4m+3} \lg(1+x^2)\partial x$$

$$= \frac{x^{4m+3}}{4m+3}\lg(1+x^2) - \frac{2\mathrm{ArcTg}x}{4m+3} + \frac{2}{4m+3}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots - \frac{x^{4m+3}}{4m+3}\right),$$

5)

$$\int_0^x x^{4m+4} \lg(1+x^2)\partial x$$

$$= \frac{x^{4m+4}-1}{4m+4}\lg(1+x^2) + \frac{2}{4m+4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \ldots - \frac{x^{4m+4}}{4m+4}\right).$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 entsteht hieraus:

6)

$$\int_0^1 x^{4m}\lg(1+x^2)\partial x = \frac{\lg 2}{4m+1} + \frac{\pi}{2(4m+1)} - \frac{2}{4m+1}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} \ldots + \frac{1}{4m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{4m+1}\lg(1+x^2)\partial x = \frac{\lg 2}{2m+1} - \frac{1}{4m+2}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{4m+2}\lg(1+x^2)\partial x = \frac{\lg 2}{4m+3} - \frac{\pi}{2(4m+3)} + \frac{2}{4m+3}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} \ldots - \frac{1}{4m+3}\right),$$

$$\int_0^1 x^{4m+3}\lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{4m+4}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots - \frac{1}{2m+2}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

7)

$$\int_0^1 \lg(1+x^2)\partial x = \lg 2 + \frac{1}{2}\pi - 2,$$

$$\int_0^1 x \lg(1+x^2)\partial x = \lg 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{4}{9},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{5}\lg 2 + \frac{\pi}{10} - \frac{26}{75},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{7}\lg 2 - \frac{\pi}{14} + \frac{152}{735},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{7}{96},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{9}\lg 2 + \frac{\pi}{18} - \frac{526}{2835},$$

u. s. w.

Werden diese Darstellungen auf die früher angegebene Weise behandelt, so leiten sich hieraus folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 (1+x) \lg(1+x^2)\partial x = 2\lg 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2},$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{10}{3}\lg 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{23}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1+x^2)\partial x = 5\lg 2 - \frac{49}{24},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{36}{5}\lg 2 - \frac{2\pi}{5} - \frac{59}{60},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{32}{3}\lg 2 - \frac{2\pi}{3} - \frac{61}{90},$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 (1-x) \lg(1+x^2)\partial x = \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{2},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg(1+x^2)\partial x = -\frac{2}{3}\lg 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{5}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg(1+x^2)\partial x = -\lg 2 + \frac{17}{24},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1+x^2)\partial x = -\frac{4}{5}\lg 2 - \frac{2\pi}{5} + \frac{91}{50},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1+x^2)\partial x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{21}{10},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 x(1+x^2) \lg(1+x^2)\partial x = \lg 2 - \frac{3}{8},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{4}{3}\lg 2 - \frac{7}{18},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3 \lg(1+x^2)\partial x = 2\lg 2 - \frac{15}{32},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{16}{5}\lg 2 - \frac{31}{50},$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 x(1+x^2)^m \lg(1+x^2)\partial x = \frac{2^m \lg 2}{m+1} - \frac{2^{m+1}-1}{2(m+1)^2}.$$

12)

$$\int_0^1 x(1-x^2) \lg(1+x^2)\partial x = \lg 2 - \frac{5}{8},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{4}{3}\lg 2 - \frac{8}{9},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3 \lg(1+x^2)\partial x = 2\lg 2 - \frac{131}{96},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4 \lg(1+x^2)\partial x = \frac{16}{5}\lg 2 - \frac{661}{300},$$

u. s. w.

Das in Nr. 11) angegebene Integral ist ein besonderer Fall von dem in Nr. 4) §. 5. angegebenen, wenn dort $r = m$, $q = 2$ und $p = 1$ gesetzt wird. Die übrigen Integrale lassen sich nicht aus den in §. 5. angegebenen Gleichungen ableiten. Man sieht, wie die hier aufgefundenen Darstellungen ein reiches Feld der Anwendung haben.

§. 11.

Verbindet man die Darstellungen in Nr. 6) §. 10 mit denen in Nr. 3) und 4) §. 8., indem man in letztere die entsprechenden Werthe für m einführt, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 x^{4m} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = -\frac{\lg 2}{4m+1} + \frac{\pi}{2(4m+1)} + \frac{4}{4m+1}(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+ \ldots \frac{1}{4m-1}),$$

2)

$$\int_0^1 x^{4m+1} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = \frac{\lg 2}{2m+1} + \frac{1}{4m+2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+ \ldots \frac{1}{m}),$$

3)

$$\int_0^1 x^{4m+2} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = -\frac{\lg 2}{4m+3} - \frac{\pi}{2(4m+3)} + \frac{4}{4m+3}(1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}+ \ldots \frac{1}{4m+1}),$$

4)

$$\int_0^1 x^{4m+3} \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = \frac{1}{2m+2}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+ \ldots \frac{1}{2m+1}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = -\lg 2 + \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 x \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = \lg 2,$$

$$\int_0^1 x^2 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = -\frac{1}{3}\lg 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 x^3 \lg \frac{1+x^2}{1-x^2} \partial x = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{\lg 2}{5}+\frac{\pi}{10}+\frac{4}{15},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \quad \frac{1}{3}\lg 2+\frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{\lg 2}{7}-\frac{\pi}{14}+\frac{24}{35},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \quad \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{\lg 2}{9}+\frac{\pi}{18}+\frac{40}{189}.$$

u. s. w.

Werden diese Integrale mit den Vorzahlen der Potenzen des Binomiums $(1\pm x)$ verbunden, so entsteht:

6)

$$\int_0^1 (1+x) \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \frac{2}{3}\lg 2+\frac{1}{3}\pi+\frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \lg 2+\frac{9}{2},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \frac{4}{5}\lg 2-\frac{2\pi}{5}+\frac{154}{15},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{2\pi}{3}+\frac{119}{6},$$

u. s. w.

7)

$$\int_0^1 (1-x) \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -2\lg 2+\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{10}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -5\lg 2+\frac{7}{2},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{36}{5}\lg 2 - \frac{2\pi}{5} + \frac{94}{15},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = -\frac{32}{3}\lg 2 - \frac{2\pi}{3} + \frac{19}{2},$$

u. s. w.

8)

$$\int_0^1 x(1+x^2)\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \lg 2 + \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \frac{4\lg 2}{3} + \frac{7}{6},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = 2\lg 2 + \frac{7}{3},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \frac{16\lg 2}{5} + \frac{269}{60}.$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 x(1-x^2)\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \lg 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \frac{4}{3}\lg 2 - \frac{5}{6},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = 2\lg 2 - \frac{4}{3},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4\lg\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x = \frac{16\lg 2}{5} - \frac{131}{60},$$

u. s. w.

Diese Darstellungen lassen sich leicht weiter verfolgen.

§. 12.

Werden die Gleichungen Nr. 6) §. 10. und Nr. 3) und Nr. 4) §. 8. zusammengezählt, so erhält man folgende Formen:

1)

$$\int_0^1 x^{4m}\lg(1-x^4)\partial x = \frac{3\lg 2}{4m+1} + \frac{\pi}{2(4m+1)} - \frac{4}{4m+1}(1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}+\ldots\frac{1}{4m+1}),$$

2)

$$\int_0^1 x^{4m+1}\lg(1-x^4)\partial x=\frac{\lg 2}{2m+1}-\frac{1}{2m+1}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{2m+1}),$$

3)

$$\int_0^1 x^{4m+2}\lg(1-x^4)\partial x=\frac{3\lg 2}{4m+3}-\frac{\pi}{2(4m+3)}$$
$$-\frac{4}{4m+3}(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}+\ldots\frac{1}{4m+3}),$$

4)

$$\int_0^1 x^{4m+3}\lg(1-x^4)\partial x=-\frac{1}{4m+4}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m+1}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \lg(1-x^4)\partial x \quad =3\lg 2+\frac{\pi}{2}-4,$$
$$\int_0^1 x\lg(1-x^4)\partial x \;=\lg 2-1,$$
$$\int_0^1 x^2\lg(1-x^4)\partial x=\lg 2-\frac{\pi}{6}-\frac{4}{9},$$
$$\int_0^1 x^3\lg(1-x^4)\partial x=-\frac{1}{4},$$
$$\int_0^1 x^4\lg(1-x^4)\partial x=\frac{3\lg 2}{5}+\frac{\pi}{10}-\frac{24}{25},$$
$$\int_0^1 x^5\lg(1-x^4)\partial x=\frac{1}{3}\lg 2-\frac{4}{9},$$
$$\int_0^1 x^6\lg(1-x^4)\partial x=\frac{3\lg 2}{7}-\frac{\pi}{14}-\frac{40}{147},$$
$$\int_0^1 x^7\lg(1-x^4)\partial x=-\frac{3}{16},$$
$$\int_0^1 x^8\lg(1-x^4)\partial x=\frac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{18}-\frac{236}{405},$$

u. s. w.

Ebenso erhält man durch Anwendung der angezeigten Methode:

6)

$$\int_0^1 (1+x)\lg(1-x^4)\partial x \;=4\lg 2+\tfrac{1}{2}\pi-5,$$
$$\int_0^1 (1+x)^2\lg(1-x^4)\partial x=6\lg 2+\tfrac{1}{3}\pi-\frac{58}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3 \lg(1-x^4)\partial x = 9\lg 2 - \frac{103}{12},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4 \lg(1-x^4)\partial x = \frac{68\lg 2}{5} - \frac{2\pi}{5} - \frac{947}{75},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5 \lg(1-x^4)\partial x = \frac{64\lg 2}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1907}{90},$$

u. s. w.

7)

$$\int_0^1 (1-x)\lg(1-x^4)\partial x = 2\lg 2 + \tfrac{1}{2}\pi - 3,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg(1-x^4)\partial x = 2\lg 2 + \tfrac{1}{3}\pi - \frac{22}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg(1-x^4)\partial x = 3\lg 2 - \frac{25}{12},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg(1-x^4)\partial x = \frac{28\lg 2}{5} - \frac{2\pi}{5} - \frac{197}{75},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5 \lg(1-x^4)\partial x = \frac{32\lg 2}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{53}{10},$$

u. s. w.

8)

$$\int_0^1 x(1+x^2)\lg(1-x^4)\partial x = \lg 2 - \frac{5}{4},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^2 \lg(1-x^4)\partial x = \frac{4\lg 2}{3} - \frac{31}{18},$$

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3 \lg(1-x^4)\partial x = 2\lg 2 - \frac{471}{144},$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 x(1-x^2)\lg(1-x^4)\partial x = \lg 2 - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2 \lg(1-x^4)\partial x = \frac{4\lg 2}{3} - \frac{13}{18},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3 \lg(1-x^4)\partial x = 2\lg 2 - \frac{67}{48},$$

u. s. w.

Ferner erhält man aus Nr. 6) §. 5.:

10)

$$\int_0^1 x^3(1-x^4)\lg(1-x^4)\partial x = -\frac{1}{4.4},$$

$$\int_0^1 x^3(1-x^4)^2\lg(1-x^4)\partial x = -\frac{1}{4.9},$$

$$\int_0^1 x^3(1-x^4)^3\lg(1-x^4)\partial x = -\frac{1}{4.16},$$

. . . .

$$\int_0^1 x^3(1-x^4)^m\lg(1-x^4)\partial x = -\frac{1}{4(m+1)^2}.$$

§. 13.

Wird $z=x^3$ in den Gleichungen Nr. 2) und 3) §. 2. gesetzt, wird die erste der hiedurch entstehenden Reihen mit $\int x^{6m}\partial x$, $\int x^{6m+1}\partial x$, $\int x^{6m+2}\partial x$; die zweite mit $\int x^{6m+3}\partial x$, $\int x^{6m+4}\partial x$, $\int x^{6m+5}\partial x$ verbunden, und werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und x genommen, so erhält man folgende sechs Formen:

1)

$$\int_0^x \frac{x^{6m}\partial x}{1+x^3} = \int_0^x \frac{\partial x}{1+x^3} - (x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} \ldots - \frac{x^{6m-2}}{6m-2}),$$

2)

$$\int_0^x \frac{x^{6m+1}\partial x}{1+x^3} = \int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^3} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} \ldots - \frac{x^{6m-1}}{6m-1}\right),$$

3)

$$\int_0^x \frac{x^{6m+2}\partial x}{1+x^3} = \int_0^x \frac{x^2\partial x}{1+x^3} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} \ldots - \frac{x^{6m}}{6m}\right),$$

4)

$$\int_0^x \frac{x^{6m+3}\partial x}{1+x^3} = -\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^3} + x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \ldots + \frac{x^{6m+1}}{6m+1},$$

5)

$$\int_0^x \frac{x^{6m+4}\partial x}{1+x^3} = -\int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} - \ldots + \frac{x^{6m+2}}{6m+2},$$

6)

$$\int_0^x \frac{x^{6m+5}\partial x}{1+x^3} = -\int_0^x \frac{x^2\partial x}{1+x^3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} - \ldots + \frac{x^{6m+3}}{6m+3}.$$

Hierin ist:

7)

$$\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right),$$

$$\int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^3} = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1} - \sqrt{3}\,\mathrm{Arc\,Tg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right),$$

$$\int_0^x \frac{x^2\partial x}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\lg(1+x^3).$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 gehen diese Integrale in folgende über:

8)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\left(\lg 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x^3} = -\tfrac{1}{3}\left(\lg 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\lg 2.$$

Durch Einführung dieser Werthe in Nr. 1)—6) erhält man folgende Integralformeln:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\partial x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\lg 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots - \frac{1}{6m-2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\partial x}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\left(\lg 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{6m-1}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}\partial x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2m}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}\partial x}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\left(\lg 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{6m+1}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}\partial x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\lg 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{6m+2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}\partial x}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\lg 2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2m+1}\right).$$

Die speciellen Fälle hieraus leiten sich leicht ab. Benutzt man nun die Gleichung

10)

$$\int x^{m-1}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{x^m}{m}\lg(1+x^3) - \frac{3}{m}\int\frac{x^{m+2}\partial x}{1+x^3},$$

führt allmälig die Werthe $6m+1$, $6m+2$, ... $6m+6$ ein, so ergibt sich aus Nr. 1)—6) und Nr. 7):

11)

$$\int_0^x x^{6m}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{x^{6m+1}\lg(1+x^3)}{6m+1}$$

$$+\frac{1}{6m+1}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}+\sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)-\frac{3}{6m+1}\left\{x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\ldots+\frac{x^{6m+1}}{6m+1}\right\},$$

$$\int_0^x x^{6m+1}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{x^{6m+2}\lg(1+x^3)}{6m+2}$$

$$-\frac{1}{6m+2}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}-\sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)-\frac{3}{6m+2}\left\{\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}-\ldots+\frac{x^{6m+2}}{6m+2}\right\},$$

$$\int_0^1 x^{6m+2}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{(x^{6m+3}+1)\lg(1+x^3)}{6m+3}$$

$$-\frac{3}{6m+3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}-\ldots+\frac{x^{6m+3}}{6m+3}\right),$$

$$\int_0^x x^{6m+3}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{x^{6m+4}\lg(1+x^3)}{6m+4}$$

$$-\frac{1}{6m+4}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(1+x^2)}{x^2-x+1}+\sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)+\frac{3}{6m+4}\left(x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\ldots-\frac{x^{6m+4}}{6m+4}\right),$$

$$\int_0^x x^{6m+4}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{x^{6m+5}\lg(1+x^3)}{6m+5}$$

$$+\frac{1}{6m+5}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}-\sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)+\frac{3}{6m+5}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}-\ldots-\frac{x^{6m+5}}{6m+5}\right),$$

$$\int_0^x x^{6m+5}\log(1+x^3)\partial x = \frac{(x^{6m+6}-1)\lg(1+x^3)}{6m+6}$$

$$+\frac{3}{6m+6}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}\ldots-\frac{x^{6m+6}}{6m+6}\right).$$

Hieraus erhält man für die Grenzen zwischen 0 und 1:

12)

$$\int_0^1 x^{6m}\lg(1+x^3) \quad = \frac{2\lg 2}{6m+1} + \frac{\pi}{(6m+1)\sqrt{3}}$$
$$- \frac{3}{6m+1}\left(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \ldots + \frac{1}{6m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+1}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{\pi}{(6m+2)\sqrt{3}} - \frac{3}{6m+2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} - \ldots + \frac{1}{6m+2}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+2}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{2\lg 2}{6m+3} - \frac{1}{6m+3}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+3}\lg(1+x^3)\partial x = -\frac{\pi}{(6m+4)\sqrt{3}} + \frac{3}{6m+4}\left(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \ldots - \frac{1}{6m+4}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+4}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{2\lg 2}{6m+5} - \frac{\pi}{(6m+5)\sqrt{3}}$$
$$+ \frac{3}{6m+5}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{6m+5}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+5}\lg(1+x^3)\partial x = \frac{1}{6m+6}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2m+2}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

$$\int_0^1 \lg(1+x^3)\partial x \quad = \quad 2\lg 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 x\lg(1+x^3)\partial x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1+x^3)\partial x = \frac{2\lg 2}{3} - \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1+x^3)\partial x = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{9}{16},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1+x^3)\partial x = \frac{2\lg 2}{5} - \frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{9}{50},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1+x^3)\partial x = \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 x^6\lg(1+x^3)\partial x = \frac{2\lg 2}{7} + \frac{\pi}{7\sqrt{3}} - \frac{75}{196},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1+x^3)\partial x = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{51}{320},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg(1+x^3)\partial x = \frac{2\lg 2}{9} - \frac{5}{54},$$

$$\int_0^1 x^9 \lg(1+x^3)\partial x = -\frac{\pi}{10\sqrt{3}} + \frac{111}{140},$$

u. s. w.

Mit Hülfe dieser Darstellungen lassen sich nun auch die Integrale von folgender Form:

$$\int_0^1 (1 \pm x)^m \lg(1+x^3)\partial x, \quad \int_0^1 (1 \pm x^2)^m \lg(1+x^3)\partial x \text{ u. s. w.}$$

finden.

§. 14.

Setzt man in der Gleichung Nr. 6) §. 2. $z = x^3$, verbindet das hiedurch entstehende Resultat der Reihe nach mit $\int x^{3m}\partial x$, $\int x^{3m+1}\partial x$, $\int x^{3m+2}\partial x$ und integrirt, so erhält man:

1)

$$\int_0^z \frac{x^{3m}\partial x}{1-x^3} = \int_0^z \frac{\partial x}{1-x^3} - \left(x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + \ldots \frac{x^{3m-2}}{3m-2}\right),$$

$$\int_0^z \frac{x^{3m+1}\partial x}{1-x^3} = \int_0^z \frac{x\partial x}{1-x^3} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} + \ldots \frac{x^{3m-1}}{3m-1}\right),$$

$$\int_0^z \frac{x^{3m+2}\partial x}{1-x^3} = \int_0^z \frac{x^2\partial x}{1-x^3} - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \ldots \frac{x^{3m}}{3m}\right).$$

Hierin ist:

2)

$$\int_0^z \frac{\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \sqrt{3}\,\text{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2+x}\right),$$

$$\int_0^z \frac{x\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \sqrt{3}\,\text{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2+x}\right),$$

$$\int_0^z \frac{x^2\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}\lg(1-x^3).$$

Durch Einführung dieser Werthe in Nr. 1) entsteht:

3)

$$\int_0^x \frac{x^{3m}\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2+x})$$
$$-(x+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}+\ldots\frac{x^{3m-2}}{3m-2}),$$

$$\int_0^x \frac{x^{3m+1}\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2+x})$$
$$-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}+\ldots\frac{x^{3m-1}}{3m-1}\right),$$

$$\int_0^x \frac{x^{3m+2}\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}\lg(1-x^3) - \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\ldots\frac{x^{3m}}{3m}\right).$$

Diese Integrale haben für die Grenzen von 0 und 1 unendlich grosse Werthe. Benutzt man die Gleichung

4)

$$\int x^{m-1}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{x^m}{m}\lg(1-x^3) + \frac{3}{m}\int\frac{x^{m+2}\partial x}{1-x^3}$$

und schreibt hierin $3m+1$, $3m+2$, $3m+3$ statt m und führt die angezeigten Werthe aus Nr. 3) ein, so entsteht:

5)

$$\int_0^x x^{3m}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{x^{3m+1}\lg(1-x^3)}{3m+1}$$
$$-\frac{1}{3m+1}(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2+x}) - \frac{3}{3m+1}(x+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}+\ldots\frac{x^{3m+1}}{3m+1}),$$

$$\int_0^x x^{3m+1}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{x^{3m+2}\lg(1-x^3)}{3m+2}$$
$$-\frac{1}{3m+2}(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{ArcTg}\frac{x\sqrt{3}}{2+x}) - \frac{3}{3m+2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}+\ldots\frac{x^{3m+2}}{3m+2}\right),$$

$$\int_0^x x^{3m+2}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{(x^{3m+3}-1)\lg(1-x^3)}{3m+3}$$
$$-\frac{3}{3m+3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\ldots\frac{x^{3m+3}}{3m+3}\right).$$

Wird nun zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt, so entsteht aus Nr. 2):

6)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}(\lg(x-1) - \tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}),$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}(\lg(x-1) - \tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}).$$

Hierin wurde $\lg(x-1)$ vorerst belassen. Bemerkt man, dass

$$\lg(x-1) = \int \frac{\partial x}{x-1} = -\int \frac{\partial x}{1-x} = \lg(1-x),$$

so fallen die unendlich gross werdenden Werthe aus den Darstellungen weg und die Gleichungen Nr. 5) gehen in folgende über:

7)

$$\int_0^1 x^{3m}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{1}{2(3m+1)}(\lg 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}) - \frac{3}{3m+1}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \ldots \frac{1}{3m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{3m+1}\lg(1-x^3)\partial x = \frac{1}{2(3m+2)}(\lg 3 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}) - \frac{3}{3m+2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{3m+2}),$$

$$\int_0^1 x^{3m+2}\lg(1-x^3)\partial x = -\frac{1}{3m+3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{m+1}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \lg(1-x^3)\partial x = \frac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 x\lg(1-x^3)\partial x = \frac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1-x^3)\partial x = -\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1-x^3)\partial x = \frac{\lg 3}{8} + \frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{15}{16},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1-x^3)\partial x = \frac{\lg 3}{10} - \frac{\pi}{10\sqrt{3}} - \frac{21}{50},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1-x^3)\partial x = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1-x^3)\partial x = \frac{\lg 3}{14} + \frac{\pi}{14\sqrt{3}} - \frac{117}{196},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1-x^3)\partial x = \frac{\lg 3}{16} - \frac{\pi}{16\sqrt{3}} - \frac{99}{320},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg(1-x^3)\partial x = -\frac{11}{54},$$

u. s. w.

Auch hieraus lassen sich nun leicht nach der angezeigten Weise Integrale von der Form

$$\int_0^1 (1\pm x)^m \lg(1-x^3)\partial x,\quad \int_0^1 (1\pm x^2)^m \lg(1-x^3)\partial x \text{ u. s. w.}$$

ableiten. Eine der hieher gehörigen Formen leitet sich aus Nr. 6) §. 5. ab. Sie ist folgende:

9)

$$\int_0^1 x^2(1-x^3)^m \lg(1-x^3)\partial x = -\frac{1}{3(m+1)^2}.$$

Eben so kann man die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate mit einander verbinden und dann Integrale von folgender Form:

$$\int_0^1 x^{m-1} \lg\frac{1+x^3}{1-x^3}\partial x,\quad \int_0^1 (1\pm x)^m \lg\frac{1+x^3}{1-x^3}\partial x \text{ u. s. w.}$$

und

$$\int_0^1 x^{m-1} \lg(1-x^6)\partial x,\quad \int_0^1 (1\pm x)^m \lg(1-x^6) \text{ u. s. w.}$$

ableiten und diese Darstellungen beliebig fortsetzen.

§. 15.

Setzt man $z = x^4$ in Nr. 2) und Nr. 3) §. 2., vervielfacht mit $\int x^{8m}\partial x$, $\int x^{8m+1}\partial x$, ... und integrirt zwischen den Grenzen 0 und x, so erhält man folgende acht Integralformen, die wir in abgekürzter Gestalt angeben:

1)

$$\int_0^x \frac{x^{8m}\partial x}{1+x^4} = \int_0^x \frac{\partial x}{1+x^4} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{4u-3}}{4u-3},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+1}\partial x}{1+x^4} = \int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^4} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{4u-2}}{4u-2},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+2}\partial x}{1+x^4} = \int_0^x \frac{x^2\partial x}{1+x^4} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{4u-1}}{4u-1},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+3}\partial x}{1+x^4} = \int_0^x \frac{x^3\partial x}{1+x^4} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{4u},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+4}\partial x}{1+x^4} = -\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^4} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{4u+1}}{4u+1},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+5}\partial x}{1+x^4} = -\int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^4} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{4u+2}}{4u+2},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+6}\partial x}{1+x^4} = -\int_0^x \frac{x^2\partial x}{1+x^4} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{4u+3}}{4u+3},$$

$$\int_0^x \frac{x^{8m+7}\partial x}{1+x^4} = -\int_0^x \frac{x^3\partial x}{1+x^4} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{4u+4}}{4u+4}.$$

Die hier erforderlichen Integrale sind:

2)

$$\int_0^x \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + 2\,\mathrm{ArcTg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x}\right),$$

$$\int_0^x \frac{x\partial x}{1+x^4} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{ArcTg}\,\frac{1}{x^2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^x \frac{x^2\partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + 2\,\mathrm{ArcTg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x}\right),$$

$$\int_0^x \frac{x^3\partial x}{1+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg(1+x^4).$$

Für die Grenzen zwischen 0 und 1 gehen diese Integrale in folgende über:

3)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi),$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x^4} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4}\lg 2.$$

Hieran reihen sich folgende als Fortsetzung der Integrale in Nr. 3), wenn die Integrale in Nr. 1) zwischen den Grenzen von 0 und 1 genommen werden:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{1+x^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)+1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\partial x}{1+x^4} = -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\partial x}{1+x^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)+\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7\partial x}{1+x^4} = -\frac{1}{4}\lg 2+\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8\partial x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)-\frac{4}{5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9\partial x}{1+x^4} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{3},$$

u. s. w.

Wird nun die Gleichung

5)

$$\int x^{m-1}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{x^m\lg(1+x^4)}{m} - \frac{4}{m}\int\frac{x^{m+3}}{1+x^4}\partial x$$

oder, um die Entwickelung abzukürzen,

6)

$$\int_0^1 x^{m-1}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{m} - \frac{4}{m}\int_0^1 \frac{x^{m+3}\partial x}{1+x^4}$$

benutzt, und zu dem Ende in dem zweiten Ausdruck auf der rechten Seite die angezeigte Substitution aus den Darstellungen Nr. 1) und Nr. 3) gemacht, so erhält man folgende Integralformen:

7)

$$\int_0^1 x^{8m}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{8m+1} + \frac{1}{(8m+1)\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \frac{4}{8m+1}\left(1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} - \ldots + \frac{1}{8m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+1}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{8m+2} + \frac{\pi}{2(8m+2)} - \frac{1}{4m+1}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{4m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+2}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{8m+3} + \frac{1}{(8m+3)\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \frac{4}{8m+3}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} \ldots + \frac{1}{8m+3}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+3}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{4m+2} - \frac{1}{8m+4}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+4}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{8m+5} - \frac{1}{(8m+5)\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) + \frac{4}{8m+5}\left(1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{8m+5}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+5}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{8m+6} - \frac{\pi}{2(8m+6)} + \frac{1}{4m+3}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{4m+3}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+6}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{8m+7} - \frac{1}{(8m+7)\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) + \frac{4}{8m+7}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} \ldots - \frac{1}{8m+7}\right),$$

$$\int_0^1 x^{8m+7}\lg(1+x^4)\partial x = \frac{1}{8m+8}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2m+2}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

8)

$$\int_0^1 \lg(1+x^4)\partial x = \lg 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - 4,$$

$$\int_0^1 x\lg(1+x^4)\partial x = \tfrac{1}{2}\lg 2+\frac{\pi}{4}-1,$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{3}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi\right)-\frac{4}{9},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1+x^4)\partial x = \frac{1}{2}\lg 2-\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{5}-\frac{1}{5\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi\right)+\frac{16}{25},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9},$$

$$\int_0^1 x^6\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{7}-\frac{1}{7\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi\right)+\frac{16}{147},$$

$$\int_0^1 x^7\lg(1+x^4)\partial x = \frac{1}{16},$$

$$\int_0^1 x^8\lg(1+x^4)\partial x = \frac{\lg 2}{9}+\frac{1}{9\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi\right)-\frac{164}{405},$$

u. s. w.

Hieraus lassen sich nun wie früher Integrale von folgender Form:

$$\int_0^1 (1\pm x)^m\lg(1+x^4)\partial x,\quad \int_0^1 (1\pm x^2)^m\lg(1+x^4)\partial x,\ \text{u. s. w.},$$

eben so durch Verbindung mit den in §. 12. aufgefundenen folgende:

$$\int_0^1 x^{m-1}\lg\frac{1+x^4}{1-x^4}\partial x,\quad \int_0^1 x^{m-1}\lg(1-x^8)\partial x,\ \text{u. s. w.}$$

ableiten.

§. 16.

Wir verfolgen jedoch diese Darstellungen nicht weiter, da die Methode zu ihrer Auffindung gezeigt ist, und wenden uns zur Darstellung noch anderer hierher gehöriger Integrale, deren Benutzung im Folgenden nöthig wird.

Durch Division erhält man:

$$\frac{1}{1+x+x^2}=x^{-2}-x^{-3}+\frac{x^{-3}}{1+x+x^2}.$$

Behandelt man den begleitenden Bruch wiederholt nach dem in dieser Gleichung liegenden Gesetze, so entsteht:

1)

$$\frac{1}{1+x+x^2}=x^{-2}+x^{-5}+x^{-8}\ldots.x^{-3m+1}$$
$$-(x^{-3}+x^{-6}+x^{-9}\ldots.x^{-3m})+\frac{x^{-3m}}{1+x+x^2}.$$

Verbindet man diese Darstellung der Reihe nach mit $\int x^{3m}\partial x$, $\int x^{3m+1}\partial x$, $\int x^{3m+2}\partial x$, so erhält man drei Formen, welche der Reihe nach mit den Integralen

$$\int\frac{\partial x}{1+x+x^2},\ \int\frac{x\partial x}{1+x+x^2},\ \int\frac{x^2\partial x}{1+x+x^2}$$

begleitet sind, von denen das letzte in folgendes:

$$\int\frac{x^2\partial x}{1+x+x^2}=\int\partial x-\int\frac{x+1}{1+x+x^2}\partial x$$

übergeht. Nun ist:

2)

$$\int\frac{\partial x}{1+x+x^2}\quad=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{x\partial x}{1+x+x^2}\quad=\tfrac{1}{2}\lg(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\int\frac{x+1}{1+x+x^2}\partial x=\tfrac{1}{2}\lg(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Werden nun die so aus Nr. 1) erhaltenen Reihen zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, so erhält man folgende drei Formen:

3)

$$\int_0^x\frac{x^{3m}\partial x}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}\ldots.+\frac{x^{3m-1}}{3m-1}$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{1}{\sqrt{3}}-(x+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}\ldots.+\frac{x^{3m-2}}{3m-2}),$$

$$\int_0^x\frac{x^{3m+1}\partial x}{1+x+x^2}=\tfrac{1}{2}\lg(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ArcTg}\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\ldots.\frac{x^{3m}}{3m}$$
$$-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^8}{8}+\ldots.\frac{x^{3m-1}}{3m-1}\right),$$

$$\int_0^x \frac{x^{3m+2}\partial x}{1+x+x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ArcTg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ArcTg}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+x+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}+\ldots\frac{x^{3m+1}}{3m+1}$$

$$-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\ldots\frac{x^{3m}}{3m}\right).$$

Hieraus erhält man für die Grenzen zwischen 0 und 1 folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\ldots\frac{1}{3m-1} - (1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m-2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}\partial x}{1+x+x^2} = \tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m}) - (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\ldots\frac{1}{3m-1}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}\partial x}{1+x+x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m+1} - \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

5)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x+x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x+x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{1+x+x^2} = \tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\partial x}{1+x+x^2} = -\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{11}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{11}{20},$$

u. s. w.

Benutzt man die Gleichung

$$\int x^{m-1}\lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{x^m}{m}\lg(1+x+x^2) - \frac{1}{m}\int\frac{x^m\partial x}{1+x+x^2}$$

$$-\frac{2}{m}\int\frac{x^{m+1}\partial x}{1+x+x^2},$$

so erhält man für die Grenzen zwischen 0 und 1:

6)

$$\int_0^1 x^{m-1} \lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{\lg 3}{m} - \frac{1}{m}\int_0^1 \frac{x^m \partial x}{1+x+x^2} - \frac{2}{m}\int_0^1 \frac{x^{m+1}\partial x}{1+x+x^2}.$$

Wird nun $3m+1$, $3m+2$, $3m+3$ statt m in Nr. 6) geschrieben, werden die angezeigten Integrale aus Nr. 4) eingeführt und die hieraus sich ergebenden Resultate zusammengezählt, so erhält man folgende Integralformen:

7)

$$\int_0^1 x^{3m} \lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(3m+1)} + \frac{\pi}{2(3m+1)\sqrt{3}}$$
$$+ \frac{1}{3m+1}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+ \ldots \frac{1}{3m-1}) + \frac{1}{3(3m+1)}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+ \ldots \frac{1}{m})$$
$$- \frac{2}{3m+1}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+ \ldots \frac{1}{3m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{3m+1} \lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(3m+2)} - \frac{\pi}{2(3m+2)\sqrt{3}}$$
$$+ \frac{1}{3(3m+2)}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+ \ldots \frac{1}{m}) + \frac{1}{3m+2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+ \ldots \frac{1}{3m+1})$$
$$- \frac{2}{3m+2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+ \ldots \frac{1}{3m+2}),$$

$$\int_0^1 x^{3m+2} \lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{1}{3m+3}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+ \ldots \frac{1}{3m+1})$$
$$+ \frac{1}{3m+3}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8} \ldots \frac{1}{3m+2}) - \frac{2}{3(3m+3)}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3} \ldots \frac{1}{m+1}).$$

Zieht man die drei Reihen in eine zusammen, so erhält man aus Nr. 7):

8)

$$\int_0^1 x^{3m} \lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(3m+1)} + \frac{\pi}{2(3m+1)\sqrt{3}}$$
$$+ \frac{1}{3m+1}(-2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6} \ldots + \frac{1}{3m-1} + \frac{1}{3m} - \frac{2}{3m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{3m+1} \lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(3m+2)\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2(3m+2)\sqrt{3}}$$
$$+ \frac{1}{3m+2}(1-\tfrac{2}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{6} \ldots + \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m+1} - \frac{2}{3m+2}),$$

$$\int_0^1 x^{3m+2} \lg(1+x+x^2)\,\partial x$$

$$=\frac{1}{3m+3}\left(1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{6}\ldots+\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+2}-\frac{2}{3m+3}\right).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

9)

$$\int_0^1 \lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{3\lg 3}{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-2,$$

$$\int_0^1 x\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{3\lg 3}{4}-\frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{5}{18},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{3\lg 3}{8}+\frac{\pi}{8\sqrt{3}}-\frac{5}{12},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{3\lg 3}{10}-\frac{\pi}{10\sqrt{3}}+\frac{11}{300},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{19}{120},$$

$$\int_0^1 x^6\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{3\lg 3}{14}+\frac{\pi}{14\sqrt{3}}-\frac{111}{490},$$

$$\int_0^1 x^7\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{3\lg 3}{16}-\frac{\pi}{16\sqrt{3}}+\frac{17}{560},$$

$$\int_0^1 x^8\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{2509}{22680},$$

u. s. w.

Werden diese Integrale mit den Vorzahlen der Potenzen des Binomiums $(1\pm x)$ verbunden, so entsteht:

10)

$$\int_0^1 (1+x)\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{7}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-2,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2\lg(1+x+x^2)\,\partial x = 3\lg 3-\frac{31}{18},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{33\lg 3}{8}-\frac{\pi}{8\sqrt{3}}-\frac{19}{12},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4\lg(1+x+x^2)\,\partial x = \frac{63\lg 3}{10}-\frac{\pi}{10\sqrt{3}}-\frac{589}{300},$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 (1-x)\lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{3}{4}\lg 3 + \frac{3\pi}{4\sqrt{3}} - 2,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2\lg(1+x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{31}{18},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3\lg(1+x+x^2)\partial x = -\frac{9\lg 3}{8} + \frac{9\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4\lg(1+x+x^2)\partial x = -\frac{27\lg 3}{10} + \frac{9\pi}{10\sqrt{3}} + \frac{411}{300},$$

u. s. w.

§. 17.

In gleicher Weise lässt sich das Integral

$$\int x^{m-1}\lg(1-x+x^2)\partial x$$

darstellen. Man erhält durch Division:

1)

$$\frac{1}{1-x+x^2} = x^{-2} - x^{-5} + x^{-8} - x^{11} \ldots. (-)^{r-1} x^{-3r+1} (-)^r \frac{x^{-3r}}{1-x+x^2}$$
$$+ x^{-3} - x^{-6} + x^{-9} - x^{-12} \ldots. (-)^{r-1} x^{-3r},$$

und man hat in dieser Darstellung zwischen einem geraden und ungeraden r zu unterscheiden. Es entstehen daher bei Entwickelung des vorstehenden Integrals sechs Formen, von denen jede zwei Reihen mit abwechselnden Zeichen umschliesst und von den Integralen

$$\int \frac{\partial x}{1-x+x^2}, \int \frac{x\partial x}{1-x+x^2}, \int \frac{x^2\partial x}{1-x+x^2}$$

begleitet ist, von welchen sich das letztere auf folgende Weise zerlegt:

$$\int \frac{x^2\partial x}{1-x+x^2} = \int \partial x + \int \frac{x-1}{1-x+x^2}\partial x.$$

Werden die aus Nr. 1) sich ergebenden Reihen der Reihe nach mit $\int x^{6m}\partial x$, $\int x^{6m+1}\partial x$, ... $\int x^{6m+5}\partial x$ verbunden und zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, so ergeben sich folgende Formen, die wir in abgekürzter Gestalt angeben:

2)

$$\int_0^x \frac{x^{6m}\partial x}{1-x+x^2} = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x+x^2} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{3u-1}}{3u-1} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{3u-2}}{3u-2},$$

$$\int_0^x \frac{x^{6m+1}\partial x}{1-x+x^2} = \int_0^x \frac{x\partial x}{1-x+x^2} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{3u}}{3u} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{3u-1}}{3u-1},$$

$$\int_0^x \frac{x^{6m+2}\partial x}{1-x+x^2} = \int_0^x \frac{(x-1)\partial x}{1-x+x^2} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{3u+1}}{3u+1} - \Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{x^{3u}}{3u},$$

$$\int_0^x \frac{x^{6m+3}\partial x}{1-x+x^2} = -\int_0^x \frac{\partial x}{1-x+x^2} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{3u+2}}{3u+2} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{3u+1}}{3u+1},$$

$$\int_0^x \frac{x^{6m+4}\partial x}{1-x+x^2} = -\int_0^x \frac{x\partial x}{1-x+x^2} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{3u+3}}{3u+3} + \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{3u+2}}{3u+2},$$

$$\int_0^x \frac{x^{6m+5}\partial x}{1-x+x^2} = -\int_0^x \frac{(x-1)\partial x}{1-x+x^2} - \Sigma_0^{2m+1}(-)^{u}\frac{x^{3u+1}}{3u+1}$$

$$+ \Sigma_0^{2m}(-)^{u}\frac{x^{3u+3}}{3u+3}.$$

Die begleitenden Integrale haben folgende Werthe:

3)

$$\int_0^x \frac{\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\int_0^x \frac{x\partial x}{1-x+x^2} = \tfrac{1}{2}\lg(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\int_0^x \frac{x-1}{1-x+x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}\lg(1-x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Werden die Integrale in Nr. 2) zwischen den Grenzen von 0 und 1 genommen, so gehen sie mit Rücksicht auf Nr. 3) in folgende über:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} \ldots - \frac{1}{6m-1}) - (1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} \ldots - \frac{1}{6m-2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\partial x}{1-x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots - \frac{1}{2m}) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} \ldots - \frac{1}{6m-1}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}\partial x}{1-x+x^2} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} \ldots + \frac{1}{6m+1} - \tfrac{1}{3}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots - \frac{1}{2m}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}\partial x}{1-x+x^2} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} \ldots + \frac{1}{6m+2} + 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \ldots + \frac{1}{6m+1},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}\partial x}{1-x+x^2} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots+\frac{1}{2m+1}) + \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots+\frac{1}{6m+2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}\partial x}{1-x+x^2} = +\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - (1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}\ldots-\frac{1}{6m+4}) + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1-x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1-x+x^2} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1-x+x^2} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{1-x+x^2} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{5}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\partial x}{1-x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{5}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{21}{20},$$

u. s. w.

Benutzt man die Gleichung

$$\int x^{m-1}\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{x^m}{m}\lg(1-x+x^2) + \frac{1}{m}\int\frac{x^m\partial x}{1-x+x^2} - \frac{2}{m}\int\frac{x^{m+1}\partial x}{1-x+x^2},$$

welche für die Grenzen zwischen 0 und 1 in folgende übergeht:

6)

$$\int_0^1 x^{m-1}\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{1}{m}\int_0^1\frac{x^m\partial x}{1-x+x^2} - \frac{2}{m}\int_0^1\frac{x^{m+1}\partial x}{1-x+x^2},$$

und setzt hierin der Reihe nach $6m+1$, $6m+2$, ... $6m+6$ statt m, so ergeben sich mit Rücksicht auf Nr. 4) folgende Integralformen:

7)

$$\int_0^1 x^{6m}\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{(6m+1)\sqrt{3}} + \frac{1}{3(6m+1)}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m})$$
$$-\frac{1}{6m+1}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}\ldots-\frac{1}{6m-1}) - \frac{2}{6m+1}(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{6m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+1}\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{(6m+2)\sqrt{3}} - \frac{1}{3(6m+2)}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m})$$

$$-\frac{1}{6m+2}(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{6m+1}) - \frac{2}{6m+2}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots+\frac{1}{6m+2}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+2}\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{1}{6m+3}(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{6m+1})$$

$$-\frac{1}{6m+3}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots+\frac{1}{6m+2}) - \frac{2}{3(6m+3)}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+3}\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{\pi}{(6m+4)\sqrt{3}} + \frac{1}{6m+4}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots+\frac{1}{6m+2})$$

$$-\frac{1}{3(6m+4)}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}) + \frac{2}{6m+4}(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{6m+4}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+4}\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{\pi}{(6m+5)\sqrt{3}}$$

$$+\frac{1}{3(6m+5)}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})$$

$$+\frac{1}{6m+5}(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots-\frac{1}{6m+4}) + \frac{2}{6m+5}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{6m+5}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+5}\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{1}{6m+6}(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots-\frac{1}{6m+4})$$

$$+\frac{1}{6m+6}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}\ldots-\frac{1}{6m+5}) + \frac{2}{3(6m+6)}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\ldots-\frac{1}{2m+2}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}-2,$$

$$\int_0^1 x\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1,$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{1}{18},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+\frac{5}{12},$$

$$\int_0^1 x^4 \lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{101}{300},$$

$$\int_0^1 x^5 \lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{7}{360},$$

$$\int_0^1 x^6 \lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{7\sqrt{3}} - \frac{403}{1470},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{401}{1680},$$

u. s. w.

Ferner ergeben sich hieraus folgende Integrale:

9)

$$\int_0^1 (1+x)\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{3\pi}{2\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{73}{18},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{9\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{19}{4},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{9\pi}{5\sqrt{3}} - \frac{1299}{300},$$

$$\int_0^1 (1+x)^5\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{69}{40},$$

u. s. w.

10)

$$\int_0^1 (1-x)\lg(1-x+x^2)\partial x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{1}{18},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{5}{12},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{101}{300},$$

$$\int_0^1 (1-x)^5\lg(1-x+x^2)\partial x = -\frac{7}{360},$$

u. s. w.

Merkwürdig ist der Zusammenhang, worin die Integrale Nr. 10) mit denen in Nr. 8) stehen.

Aus den in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultaten können nun auch folgende Integrale:

$$\int_0^1 x^{m-1}\lg\frac{1+x+x^2}{1-x+x}\partial x,\quad \int_0^1 (1\pm x)^{m-1}\lg\frac{1+x+x^2}{1-x+x}\partial x$$

u. s. w. abgeleitet werden.

§. 18.

Setzt man in den §. 16. Nr. 4) gefundenen Gleichungen $2m$ und $2m+1$ statt m, verbindet die hiedurch entstehenden Resultate mit den in §. 17. Nr. 4) gefundenen und bemerkt, dass

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{p+1}\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^p\partial x}{1-x+x^2} - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^p\partial x}{1+x+x^2}$$

ist, so erhält man, wenn statt p allmälig die Werthe $6m$, $6m+1$,.... $6m+5$ geschrieben und die erforderlichen Reductionen gemacht werden, folgende Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\partial x}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}\ldots\frac{1}{3m-2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}\partial x}{1+x^2+x^4} = -\frac{\lg 3}{4} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{2m-1}) + \tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots\frac{1}{6m-1},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1}) + \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots\frac{1}{m}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}\partial x}{1+x^2+x^4} = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - (\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots\frac{1}{6m-1}) + 1 + \tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}+\ldots\frac{1}{6m+1},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}\partial x}{1+x^2+x^4} = -\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} - \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m}) + \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m+1}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+6}\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - (1+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{6m+1}) + \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{2m+1}).$$

Die letzte Form geht, wenn $m-1$ statt m geschrieben wird, in folgende über:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - (1+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{6m-5}) + \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{2m-1}).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x^2+x^4} = -\tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{1+x^2+x^4} = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\partial x}{1+x^2+x^4} = -\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\partial x}{1+x^2+x^4} = \tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \tfrac{2}{3},$$

u. s. w.

Man kann nun entweder folgende Gleichung:

$$\int_0^1 x^{m-1}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{\lg 3}{m} - \frac{2}{m}\int_0^1 \frac{x^{m+1}\partial x}{1+x^2+x^4} - \frac{4}{m}\int_0^1 \frac{x^{m+3}\partial x}{1+x^2+x^4}$$

benutzen, $6m+1$, $6m+2$, ... statt m setzen und dann die angezeigten Werthe aus Nr. 2) und Nr. 3) einführen, oder man kann, was einfacher ist, die in §. 16. Nr. 7) und §. 17. Nr. 7) erhaltenen Gleichungen mit einander verbinden, nachdem man in Nr. 7) §. 16. $2m$ und $2m+1$ statt m geschrieben hat. In beiden Fällen wird man folgende Integralformen erhalten:

8)

$$\int_0^1 x^{6m}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(6m+1)} + \frac{3\pi}{2(6m+1)\sqrt{3}} + \frac{2}{3(6m+1)}\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\dots\frac{1}{2m-1}\right)$$
$$+\frac{2}{6m+1}\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\dots\frac{1}{6m-1}\right) - \frac{4}{6m+1}\left(1+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}+\dots\frac{1}{6m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+1}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(6m+2)} + \frac{\pi}{2(6m+2)\sqrt{3}} + \frac{1}{3(6m+2)}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{1}{6m+2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\dots\frac{1}{3m-1}\right) - \frac{2}{6m+2}\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\dots\frac{1}{3m+1}\right),$$

$$\int_0^1 x^{6m+2}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{2}{6m+3}(1+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}+\cdots\frac{1}{6m+1})$$

$$+\frac{2}{6m+3}(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\cdots\frac{1}{6m-1})-\frac{4}{3(6m+3)}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2m+1}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+3}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(6m+4)}-\frac{\pi}{2(6m+4)\sqrt{3}}$$

$$+\frac{1}{3(6m+4)}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\frac{1}{m})$$

$$+\frac{1}{6m+4}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3m+1})-\frac{2}{6m+4}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\cdots\frac{1}{3m+2}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+4}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{2(6m+5)}-\frac{3\pi}{2(6m+5)\sqrt{3}}$$

$$+\frac{2}{3(6m+5)}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2m+1})$$

$$+\frac{2}{6m+5}(1+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}+\cdots\frac{1}{6m+1})-\frac{4}{6m+5}(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\cdots\frac{1}{6m+5}),$$

$$\int_0^1 x^{6m+5}\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{1}{6m+6}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\cdots\frac{1}{3m+2})$$

$$+\frac{1}{6m+6}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\cdots\frac{1}{3m+1})-\frac{2}{3(6m+6)}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots\frac{1}{m+1}).$$

Hieraus gewinnt man folgende Integrale:

6)

$$\int_0^1 \lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{2}+\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}-4,$$

$$\int_0^1 x\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{4}+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-1,$$

$$\int_0^1 x^2\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{2}{9},$$

$$\int_0^1 x^3\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{8}-\frac{\pi}{8\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 x^4\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{10}-\frac{3\pi}{10\sqrt{3}}+\frac{28}{75},$$

$$\int_0^1 x^5\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 x^6\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{14}+\frac{3\pi}{14\sqrt{3}}-\frac{368}{735},$$

$$\int_0^1 x^7 \lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{16} + \frac{\pi}{16\sqrt{3}} - \frac{5}{24},$$

$$\int_0^1 x^8 \lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{286}{2835},$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

7)

$$\int_0^1 (1+x)\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{9}{4}\lg 3 + \frac{7\pi}{4\sqrt{3}} - 5,$$

$$\int_0^1 (1+x)^2\lg(1+x^2+x^4)\partial x = 3\lg 3 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{52}{9},$$

$$\int_0^1 (1+x)^3\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{33\lg 3}{8} + \frac{17\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{19}{3},$$

$$\int_0^1 (1+x)^4\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{63\lg 3}{10} + \frac{17\pi}{10\sqrt{3}} - \frac{472}{75},$$

u. s. w.

8)

$$\int_0^1 (1-x)\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{3\lg 3}{2} + \frac{5\pi}{4\sqrt{3}} - 3,$$

$$\int_0^1 (1-x)^2\lg(1+x^2+x^4)\partial x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{16}{9},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3\lg(1+x^2+x^4)\partial x = -\frac{9}{8}\lg 3 + \frac{7\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4\lg(1+x^2+x^4)\partial x = -\frac{27\lg 3}{10} + \frac{7\pi}{10\sqrt{3}} + \frac{128}{75},$$

u. s. w.

(Die folgenden Abtheilungen dieser Abhandlung werden baldigst folgen.)

Berichtigung. Folgende Fehler im Anfange dieses Aufsatzes wurden erst nachträglich gefunden:

S. 131. Z. 1. v. o. setze man statt „Nr. 7) und 8)“: „Nr. 6) und 7)“.
„ 132. „ 2. v. u. statt „ — “ s. m.: „$(-)^p$“.
„ 133. „ 3. v. o. setze man $\frac{[\lg(a+bx^q)]^p}{r+1}$ statt: $\frac{[\lg(a+bx^q)]^r}{r+1}$.
„ 133. „ 13. v. o. in der Formel 5) fehlt am Integralzeichen unten 0.

X.

Zur Theorie des Prismoides.

Von

Herrn ***Hermann Kinkelin***,

Lehrer an der Gewerbeschule in Basel.

I.

Denkt man sich im Raume irgend ein System von stetig auf einander folgenden Geraden, von denen die letzte sich wieder an die erste anschliesst, so umhüllen dieselben einen unvollkommen begrenzten Raum. Schneidet man diesen Raum durch zwei unter sich parallele Ebenen, so dass jede Gerade des Systems getroffen wird, so wird von jenem ein Körper abgeschnitten, den man Prismoid oder Obelisk genannt hat. Die beiden parallelen Schnittebenen heissen die Grundflächen und die von dem System der Geraden eingenommene Fläche (eine in sich selbst zurückkehrende Regelfläche) die Seitenfläche. Diese Seitenfläche ist im Allgemeinen krumm, kann aber im Besonderen aus Ebenenstücken bestehen. Man darf indessen auch umgekehrt sagen, dass die Seitenfläche im Allgemeinen aus Ebenenstücken bestehe, welche im Besondern unendlich werden und eine krumme Fläche bilden können. Von diesem Begriff werden wir im Folgenden ausgehen und die Grundflächen demnach ansehen als beliebige geradlinige Vielecke mit bezüglich parallelen Seiten, und die Seitenfläche als bestehend aus neben einander liegenden Trapezen, welche die parallelen Seiten der Grundflächen unmittelbar verbinden. Besondere Formen des Prismoides sind unter andern: Pyramide und Kegel, Prisma und Zylinder, die abgestutzte Pyramide, das einschalige Hyperboloid, das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma, das Zelt, das Tetraeder u. s. w. Ueberhaupt ist das Prismoid eine der allgemeinsten Körperformen und gewährt theoretisches und praktisches Interesse, letzteres um so mehr, als sich dessen

Inhalt durch einen einfachen Ausdruck angeben lässt, den man mit den allerelementarsten Hülfsmitteln finden kann. Die nachstehenden Eigenschaften scheinen noch keine Besprechung gefunden zu haben.

Sie betreffen die Grössenvergleichung paralleler ebener Schnitte durch das Prismoid. Ich denke mir drei äquidistante ebene Schnitte durch dasselbe, von denen die zwei äussersten die Grundflächen sein mögen, und der mittlere Mittelschnitt genannt werden soll. Man bezeichne die Inhalte dieser drei Flächen bezüglich mit G, g, m und den Abstand von G und g, die Höhe, mit h, so dass m sowohl von G, als von g, um $\frac{1}{2}h$ entfernt ist. Die Seiten des Mittelschnitts sind die arithmetischen Mittel zu den parallelen Seiten der Grundflächen, und die Winkel am Mittelschnitt sind den Winkeln an den Grundflächen bezüglich gleich (Taf. II. Fig. 1.). Die Grösse von m ist im Allgemeinen von G und g nicht unmittelbar abhängig, dagegen ist sie durch die Seiten und Winkel von G und g ausdrückbar. Nur in einigen besonderen Fällen, wie z. B. beim Prisma, bei der vollständigen und der abgestutzten Pyramide, lässt sich m direkt durch G und g ausdrücken. Dagegen können wir jeden anderen mit diesen dreien parallelen Schnitt, dessen Inhalt durch γ bezeichnet werde, von G, g, m und seinen Abständen von diesen Flächen abhängig machen, wie ich nun zeigen will.

II.

Betrachten wir zunächst das ebene Trapez $ABGH$ (Taf. II. Fig. 1.); JK sei dessen Mittellinie, d. h. die Gerade, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten AH und BG verbindet, QP irgend eine Parallele zu JK. Der Abstand der Grundlinien AB und GH von einander sei ϑ, der Abstand von AB und QP sei ϑ_1, und der von QP und GH sei ϑ_2. Man ziehe die Gerade $HRST$ parallel zu BG und setze den Inhalt $ABGH=T$, $JKGH=T'$, $GHQP=t$, $BGHT=p$, so wird:

$$KSGH=\frac{p}{2},\quad GHRP=\frac{p\vartheta_2}{\vartheta}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ATH, JSH, QRH folgt sogleich, dass

$$(T-p):(t-\frac{p\vartheta_2}{\vartheta})=\vartheta^2:\vartheta_2{}^2,$$

$$(T'-\frac{p}{2}):(t-\frac{p\vartheta_2}{\vartheta})=\frac{\vartheta^2}{4}:\vartheta_2{}^2.$$

Eliminirt man hieraus die Grösse p, so erhält man eine Gleichung, aus der sich t leicht bestimmen lässt, nemlich:

$$t=\frac{\vartheta_2(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta^2}.T+\frac{4\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta^2}.T'; \qquad (1)$$

ersetzt man hierin ϑ_2 durch $\vartheta-\vartheta_1$, so wird:

$$t=T-(3T-4T')\frac{\vartheta_1}{\vartheta}+(2T-4T')\frac{\vartheta_1^{\,2}}{\vartheta^2},$$

woraus man sieht, dass t, d. h. der Inhalt des Trapezes $GHQP$, eine lineare Funktion der Trapeze $ABGH$ und $JKGH$, und eine quadratische Funktion des Abstandes ϑ_1 seiner Grundlinie QP von AB ist.

Dieses festgestellt, denken wir uns ein Prismoid, dessen Grundfläche G auf der Zeichnungsebene aufliegt, und projiziren dasselbe senkrecht auf diese, so sind die Projektionen aller mit G parallelen Schnitte den Schnitten selbst gleich. Es sei $ABCDEFGH$ eine solche Projektion eines vierseitigen Prismoides (Taf. II. Fig. 1.), und die Inhalte seien:

$$ABCD=G,\quad EFGH=g,\quad JKLM=m,\quad NOPQ=\gamma;$$

ferner seien die Abstände von G und g, von G und m, von g und m bezüglich gleich h, η, η'. Alsdann ist nach (1):

$$GKPQ=\frac{(\vartheta_2-\vartheta_1)\vartheta_2}{\vartheta^2}.ABGH+\frac{4\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta^2}.JKGH,$$

oder, da ϑ, ϑ_1, ϑ_2 bezüglich mit h, η, η' proportional sind:

$$GHPQ=\frac{(\eta'-\eta)\eta'}{h^2}.ABGH+\frac{4\eta\eta'}{h^2}.JKGH. \qquad (2)$$

Aehnliche Relationen gelten für die Flächen $BCFG$, $CDEF$, $ADEH$. Es ist aber:

$$\gamma-g=GHPQ+QNEH-ONEF+POFG,$$

$$G-g=ABGH+ADEH-CDEF+BCFG,$$

$$m-g=JKGH+JMEH-LMEF+KLFG.$$

Durch entsprechende Verbindung der Relation (2) mit ihren zugeordneten erhält man daher:

$$\gamma-g=\frac{(\eta'-\eta)\eta'}{h^2}(G-g)+\frac{4\eta\eta'}{h^2}(m-g)$$

oder

$$\gamma h^2 = G(\eta'^2 - \eta\eta') + g(\eta^2 - \eta\eta') + 4m\eta\eta', \qquad (3)$$

oder auch, weil $\eta' = h - \eta$,

$$\gamma = G - (3G + g - 4m)\frac{\eta}{h} + (2G + 2g - 4m)\frac{\eta^2}{h^2},$$

welche Bestimmung offenbar auch für jedes andere Prismoid gilt.

Am Prismoid ist daher der Inhalt einer den Grundflächen parallelen Schnittfläche eine lineare Funktion der Grundflächen und des Mittelschnittes, und eine quadratische Funktion ihres Abstandes von einer Grundfläche.

III.

Würde man in einer Ebene die Höhen η als Abscissen und die Inhalte γ der Schnittflächen als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auftragen, so erhielte man als Ort der Endpunkte der letzteren eine Parabel, deren Axe mit der Ordinatenaxe parallel ist (Taf. II. Fig. 2.). Diese Parabel kann die Abscissenaxe entweder gar nicht treffen, oder in einem Punkte berühren oder in zwei Punkten schneiden. Ersteres findet statt, wenn keine Schnittfläche null ist, wie etwa beim einschaligen Hyperboloid. Das zweite findet statt, wenn nur eine Schnittfläche null ist, wie bei der Pyramide. Das dritte endlich tritt ein, wenn zwei Schnittflächen null sind, wie dies beim Tetraeder der Fall ist, wenn die Schnitte parallel mit zwei einander gegenüberliegenden Kanten geführt werden; in diesem Falle sind die Schnittflächen, welche zwischen den beiden verschwindenden Schnittflächen liegen, positiv, wenn die ausserhalb liegenden negativ angenommen werden, und umgekehrt. Indessen will ich hier nicht weiter auf die Untersuchung solcher negativen Flächen eintreten, da sie ohnehin keinen Schwierigkeiten unterliegt.

Der Rauminhalt des Prismoides zwischen den Grundflächen G und g kann durch verschiedene Methoden gefunden werden. Derselbe wird z. B. auch durch die Fläche angegeben, welche von den zwischen G und g liegenden Ordinaten der eben besprochenen Parabel bedeckt wird. Sehr elegant ist die Ableitung von Herrn Professor Steiner, der das Prismoid von irgend einem Punkte im Mittelschnitt, als Spitze, aus in Pyramiden zerlegt. Man kann ihn auch aus dem zuletzt angegebenen Werthe von γ ableiten, indem man ihn mit $\partial\eta$ multiplicirt und nach η zwischen den Grenzen 0 und h integrirt. Man erhält leicht:

$$J = \tfrac{1}{6}h(G+g+4m),$$

wie bekannt. Soll der Inhalt, statt durch m, durch irgend einen beliebigen Schnitt γ, der von G, g bezüglich um η, η' absteht, ausgedrückt werden, so ist aus (3):

$$4m = G+g+2\gamma+\frac{\eta'}{\eta}(\gamma-G)+\frac{\eta}{\eta'}(\gamma-g),$$

welches für J den Ausdruck gibt:

$$J=\tfrac{1}{6}h\{2(G+g+\gamma)+\frac{\eta'}{\eta}(\gamma-G)+\frac{\eta}{\eta'}(\gamma-g)\}. \qquad (4)$$

IV.

An das Vorhergehende lassen sich verschiedene weitere Betrachtungen anknüpfen, von denen ich einige hervorheben will, da sie zu bemerkenswerthen Resultaten führen. Untersuchen wir zunächst, in welcher Beziehung zwei Schnitte zu einander stehen, die in bezüglich gleichen Abständen von den Grundflächen geführt sind.

Die beiden Schnitte seien γ und γ', ihre Abstände von den Grundflächen seien η und η', so folgt aus (3):

$$\gamma h^2 = G(\eta'^2-\eta\eta') + g(\eta^2-\eta\eta') + 4m\eta\eta',$$
$$\gamma' h^2 = G(\eta^2-\eta\eta') + g(\eta'^2-\eta\eta') + 4m\eta\eta';$$

woraus man durch Subtraction unter Berücksichtigung, dass $h=\eta+\eta'$, erhält:

$$\gamma-\gamma' = \frac{\eta'-\eta}{h}(G-g), \qquad (5)$$

d. h. die Differenz zweier von den Grundflächen gleichabstehender Schnitte verhält sich zur Differenz der Grundflächen, wie ihre Entfernung zur ganzen Höhe.

Theilen die beiden so eben besprochenen Schnitte die Höhe h des Prismoïdes in drei gleiche Theile, so mögen sie Drittelschnitte heissen (Taf. II. Fig. 3.), und dann ist $\eta=\tfrac{2}{3}h$, $\eta'=\tfrac{1}{3}h$, also:

$$\gamma'-\gamma = \tfrac{1}{3}(G-g),$$

und die Inhaltsformel (4) geht über in:

$$J = \tfrac{1}{4}h(G+3\gamma). \qquad (6)$$

Dieser letzte Ausdruck ist dadurch merkwürdig, dass man, um vermittelst desselben den Inhalt des Prismoides anzugeben, nur

zwei parallele Schnitte und die Höhe zu kennen braucht, nemlich die untere Grundfläche G und den oberen Drittelschnitt γ, oder die obere Grundfläche g und den unteren Drittelschnitt γ'. Insofern $G+3\gamma$ als Summe von vier Grössen aufgefasst wird, kann man die letzte Gleichung so aussprechen:

Das Prismoid ist gleich gross mit einem Prisma von gleicher Höhe, dessen Grundfläche das arithmetische Mittel ist zwischen der unteren Grundfläche und dem dreifachen oberen Mittelschnitt des Prismoides.

XI.

Beweis der drei Brüder für den Ausdruck des Dreieckinhaltes durch die Seiten.

(Chasles, Geschichte der Geometrie, an verschied. Stellen.)

Mitgetheilt durch

Herrn *Hermann Kinkelin*,

Lehrer an der Gewerbeschule in Basel.

Von der Schrift, welche mit den Worten beginnt: „Verba filiorum Moysi filii Schir; Manmeti, Hameti et Hason" befindet sich nach Chasles Angabe ein Manuskript auf der kaiserlichen Bibliothek in Paris und eines auf der öffentlichen Bibliothek zu Basel. Das letztere ist auf Pergament und unter dem Titel: „Liber trium fratrum" mit mehreren anderen interessanten astronomischen, physikalischen und mathematischen Handschriften in einen Band gebunden; die Handschrift scheint dem 14ten Jahrhundert anzugehören.

Die drei Brüder erklären im Eingange, dass sie ein Buch über nicht allgemein bekannte Sätze der Flächen- und Rauminhaltsbestimmung zu verfassen gedenken, und setzen daher eine

vollständige Bekanntschaft mit den Lehren des Euklides voraus. Nun ist aber darin nur der angeführte Beweis des Satzes, dass der Inhalt eines Dreiecks gleich $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ist, wenn s den halben Umfang und a, b, c die Seiten des Dreiecks bedeuten. Alles Uebrige ist dem Archimedes (oder nach ihrer Schreibweise Archimenides) und anderen griechischen Autoren entlehnt; es bildet einen Theil des höheren geometrischen Wissens im Mittelalter und umfasst die Berechnung der Kreise, Kegel, Zilinder und Kugeln, Ausziehen der Kubikwurzel und Dreitheilung des Winkels. Der Beweis aber, den sie von obigem Satz geben, ist ihnen, wie Chasles zuerst bemerkt hat, eigenthümlich. Da derselbe meines Wissens noch nirgends veröffentlicht ist, so will ich ihn hier in möglichst treuer Uebersetzung mittheilen:

> Ich will zeigen, dass, wenn man den Ueberschuss des halben Umfangs eines Dreiecks über jede Seite nimmt, hierauf den einen dieser Ueberschüsse mit einem anderen multiplizirt, das Produkt davon mit dem dritten Ueberschuss und dieses Produkt endlich mit dem halben Umfang, alsdann das, was herauskommt, gleich ist dem Produkt des Inhalts der Figur mit sich selbst.

Es sei das Dreieck *abg* (Taf. II. Fig. 4.) gegeben, so behaupte ich, dass, wenn man den Ueberschuss der halben Summe der Linien *ab*, *bg*, *ga* über jede von ihnen nimmt, hierauf die halbe Summe der Seiten mit dem Ueberschuss über *ab* multiplizirt, das Produkt hierauf mit dem Ueberschuss über *bg*, und dieses letzte Produkt mit dem Ueberschuss über *ga*, dass das, was herauskommt, gleich ist dem Produkt des Inhalts des Dreiecks *abg* mit sich selbst. Ich beschreibe in das Dreieck *abg* den grössten Kreis *dzn*, dessen Mittelpunkt *e* sei, und ziehe aus dem Mittelpunkte die Linien *ed*, *en*, *ez* nach den Punkten, in denen die Dreieckseiten den Kreis berühren, sowie die Linie *ae*. Ich zeige nun, dass $da = az$, $zb = bn$, $ng = gd$. Weil nemlich $\angle eda = \angle eza$ und jeder ein Rechter ist, und ferner $de = ez$, $ea = ea$, so ist $da = az$, und ebenso erkennt man, dass $zb = bn$, $ng = gd$. Hieraus ist zu erkennen, dass jede der Linien *da*, *az* der Ueberschuss der halben Summe der Seiten *ab*, *bg*, *ga* über die Linie *gb* ist und jede der Linien *zb*, *bn* der Ueberschuss jener halben Summe über *ag*, und jede der Linien *dg*, *gn* der Ueberschuss jener halben Summe über *ba*. Verlängern wir jetzt die Linie *ae* bis *t*, *ab* bis *h* und *ag* bis *k*, und machen *ah* und *ak* gleich dem halben Umfange des Dreiecks *abg*, so ist aus dem Vorigen klar, dass

die Linie hb gleich jeder der Linien gn, dg und die Linie gk gleich jeder der Linien zb, bn ist. Errichte ich aus h die Gerade ht senkrecht auf ah und ziehe kt, so ist offenbar $ht = kt$. Mache ich ferner auf bg das Stück $bl = bh$ und ziehe tl, so ist diese senkrecht zu bg; denn wenn man bt, tg zieht, so ist klar, dass $bt^2 - tg^2 = bh^2 - kg^2$ oder, weil $bh = bl$, $kg = gl$, $bt^2 - tg^2 = bl^2 - gl^2$, woraus das Behauptete folgt. Daher ist $lt = th$, $\angle blt$ und $\angle bht$ sind Rechte. Demnach ist $\angle ltb = \angle bth$, und weil $\angle lth + \angle lbh = 2R$, sowie $\angle zbn + \angle lbh = 2R$, so ist $\angle lth = \angle zbn$; aber $\angle ebn$ ist die Hälfte von $\angle zbn$ und $\angle bth$ die Hälfte von $\angle lth$, folglich $\angle ebn = \angle htb$ und $\angle ben = \angle tbh$. Die Dreiecke ben und bth sind also ähnlich und es entsteht die Proportion:

$$en : nb = hb : ht,$$

woraus

$$ez . ht = bz . hb.$$

Da aber

$$ez^2 : ez . ht = ez : ht \text{ und } ez : ht = az : ha,$$

so wird:

$$ez^2 : ez . ht = az : ha$$

oder

$$ez^2 : bz . hb = az : ha.$$

Hieraus kommt:

$$ez^2 . ha = az . bz . hb.$$

Es ist aber $ez^2 . ah = ez . ah . ez$, und da $ez . ah$ der Inhalt Δ des Dreiecks abg ist, so folgt aus dem Vorigen, dass

$$\Delta . ez = az . bz . hb,$$

daher

$$\Delta . ez . ah = az . bz . bh . ah$$

oder

$$\Delta . \Delta = az . bz . bh . ah,$$

w. z. b. w., denn az, bz, bh sind die Ueberschüsse des halben Umfangs des Dreiecks abg über die Seiten bg, ag, ab, und ah ist der halbe Umfang selbst.



XII.

Zur Theorie der geodätischen Linien.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Die geodätischen Linien nehmen an vielen Eigenschaften der geraden Linien in der Ebene Theil. Es liegt daher der Gedanke nahe, dieselben einer ähnlichen Behandlung zu unterwerfen, wie die Geraden in der Planimetrie. Das Folgende ist ein Versuch zur Ausführung dieses Gedankens.

§. 1.

1. Erklärung. Die geodätische Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkt zum andern auf einer Fläche.

2. Grundsatz. Von einem Punkt zum andern kann auf einer Fläche nur Eine geodätische Linie gezogen werden.

3. Lehrsatz. Zwei geodätische Linien, welche zwei Punkte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen und bilden nur eine und dieselbe geodätische Linie.

Beweis. Die gemeinschaftlichen Punkte sollen A und B sein (Taf. II. Fig. 5.), so müssen zuerst die beiden Linien von A bis B nur eine einzige bilden (2. Grundsatz). Gingen nun die Linien von B an aus einander, die eine nach C, die andere nach D, so dass BC und BD zwei Elemente derselben sind, die wir als gerade annehmen können, so nehmen wir auf der geodätischen Linie AB unendlich nahe bei B einen Punkt E an; BE kann

dann ebenfalls als Gerade angesehen werden. Wir ziehen nun durch B auf der Fläche eine sehr kleine Linie BF senkrecht auf EB. Wäre der Winkel FBD kein Rechter, so könnte man ED ziehen; dann wäre in dem unendlich kleinen ebenen Dreieck EBD

$$EB + BD > ED,$$

also könnte EBD keine geodätische Linie sein. Wäre aber der Winkel FBC kein Rechter, so könnte man EC ziehen und hätte in dem unendlich kleinen ebenen Dreieck EBC:

$$EB + BC > EC,$$

also könnte EBC keine geodätische Linie sein. Somit sind die Winkel FBC und FBD zugleich Rechte, also fällt BD mit BC zusammen.

4. Zusatz. Zwei geodätische Linien auf einer Fläche können sich wohl schneiden, aber nicht berühren.

Beweis. Würden sie sich berühren, so hätten sie zwei auf einander folgende Punkte gemein, müssten also ganz zusammenfallen.

5. Lehrsatz. In jedem geodätischen Dreiecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beiden übrigen.

Beweis. Es sei ABC das Dreieck. Da AB der kürzeste Weg von A nach B ist, so muss $AB < AC + BC$ sein. (1. Erklärung.)

6. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte O (Taf. II. Fig. 6.) im Innern eines geodätischen Dreiecks ABC nach den Endpunkten einer Seite BC die geodätischen Linien OB und OC zieht, so ist die Summe dieser Linien kleiner als diejenige der beiden Seiten AB und AC.

Beweis. Es werde die geodätische Linie BO verlängert, bis sie die Seite AC in D schneidet, so ist die geodätische Linie $OC < OD + DC$ (5. Lehrsatz.). Thut man auf beiden Seiten BO hinzu, so hat man:

$$BO + OC < BO + OD + DC \quad \text{oder} \quad BO + OC < BD + DC.$$

Ebenso aber ist:

$$BD < BA + AD;$$

thut man auf beiden Seiten DC hinzu, so hat man:

$$BD + DC < BA + AC.$$

Aber es war

$$BO + OC < BD + DC,$$

also ist um so mehr:

$$BO + OC < BA + AC.$$

Es mag hier erwähnt werden, dass von dem entsprechenden planimetrischen Satze Herr Professor Baur in Stuttgart bei Gelegenheit des Beweises von dem nachfolgenden Lehrsatze 21 b. folgende Erweiterung angegeben hat: Gegeben ist das (geradlinige) Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 7.); wenn man den Punkt O so annimmt, dass die Linien CO und BO die Verlängerungen der Seiten AB und AC über B und C hinaus schneiden, so ist:

$$BO + OC < AB + AC.$$

7. Lehrsatz. Unter allen geodätischen Linien, welche sich von einem Punkte auf einer Fläche nach einer geodätischen Linie ziehen lassen, schneidet die kürzeste dieselbe rechtwinklig.

Beweis. Es sei A (Taf. II. Fig. 8.) der Punkt und BM die gegebene geodätische Linie. Würde die kürzeste geodätische Linie, die sich von A nach BM ziehen lässt, AB sein, und wäre der Winkel bei B schief, so nehme man unendlich nahe bei B den Punkt C auf AB an und ziehe nach der Curve die Linie CD senkrecht. Dann wäre in dem unendlich kleinen Dreiecke CBD CB die Hypotenuse, also

$$CB > CD, \text{ mithin auch } AC + CB > AC + CD;$$

also wäre AB nicht die kürzeste Linie, die sich nach der gegebenen geodätischen Linie ziehen lässt.

Dieser Satz kann insofern eine Modifikation erleiden, wenn von dem Punkte nach der gegebenen geodätischen Linie mehrere geodätische Minimumslinien gezogen werden können, deren Zahl übrigens immerhin begrenzt ist. Auch gilt obiger Beweis für den allgemeineren Fall, wenn BM keine geodätische Linie, sondern eine beliebige Curve auf der Fläche ist.

§. 2.

8. Erklärung. Die Mittelpunktscurve auf einer Fläche (welche dem Kreise in der Ebene entspricht) ist eine krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, dass die geodätischen Entfernungen ihrer sämmtlichen Punkte von einem und demselben Punkte innerhalb, welcher Mittelpunkt heisst, einander gleich sind.

9. Erklärung. Jede vom Mittelpunkte nach dem Umfange der Mittelpunktscurve gezogene geodätische Linie heisst Radius. Jede geodätische Linie, welche durch den Mittelpunkt geht und an beiden Enden vom Kreisumfange begrenzt ist, heisst Durchmesser.

10. Erklärung. Jede geodätische Linie, welche zwei beliebige Punkte einer Mittelpunktscurve verbindet, heisst Sehne.

11. Lehrsatz. Jede Sehne ist kürzer als der Durchmesser.

Beweis. Denn wenn man nach den Endpunkten der Sehne CD die Halbmesser AC und AD zieht, so ist in dem geodätischen Dreiecke ACD:

$$CD < AC + AD. \quad \text{(5. Lehrs.)}$$

12. Lehrsatz. Die auf dem Halbmesser am Ende desselben senkrechte geodätische Linie ist eine Tangente der Mittelpunktscurve. Dieser Satz ist identisch mit demjenigen von Gauss (Disquisitiones generales circa superficies curvas): Zieht man von einem Punkte auf einer Fläche unendlich viele gleich lange geodätische Linien, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig.

Beweis. A (Taf. II. Fig. 9.) ist der Mittelpunkt, m und m' sind zwei unendlich nahe Punkte der Mittelpunktscurve, so muss der Winkel $mm'A$ ein Rechter sein. Denn wäre er schief und grösser als der Winkel bei m, so könnte man $m'm''$ so ziehen, dass Winkel $mm'm''$ gleich 90^0 wäre; in dem unendlich kleinen Dreiecke $mm'm''$ wäre mm'' die Hypotenuse, also grösser als $m'm''$; mithin $Am'' + m''m' < Am'' + m''m < Am, < Am'$, oder kleiner als die kürzeste Linie zwischen A und m', was nicht möglich ist. Dieser Beweis ist von Gauss (Disquis.), welcher denselben Satz auch analytisch behandelt hat.

13. Lehrsatz. Alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien, welche die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig treffen, sind gleich lang.

Beweis. (Taf. II. Fig. 9.). Denn wäre z. B. $Am > Am'$, so könnte man auf Am einen Punkt m'' annehmen, so dass $Am'' = Am'$ wäre. Dann müsste nach dem vorigen Satze Winkel $m''m'A$ ein Rechter sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Dieser Satz hat kein Analogon in den dem Verfasser bekannten Lehrbüchern der Planimetrie.

14. Zusatz. Jede geodätische Linie, welche eine Mittelpunktscurve senkrecht schneidet, geht durch den Mittelpunkt derselben.

15. **Lehrsatz.** Wenn die Entfernung der Mittelpunkte zweier Mittelpunktscurven kleiner ist als die Summe der Radien, der grössere Radius aber kleiner ist als die Summe des kleineren und der Entfernung der Mittelpunkte, so schneiden sich die Mittelpunktscurven.

Beweis. Denn damit das Schneiden stattfinde, muss das Dreieck CAD möglich sein; es muss also (Taf. II. Fig. 10.) nicht allein $CD < AC + AD$, sondern auch (Taf. II. Fig. 11.) der grössere Halbmesser $AD < AC + CD$ sein. Sobald das Dreieck CAD gezeichnet werden kann, werden sich beide Mittelpunktscurven schneiden.

16. **Lehrsatz.** Wenn die geodätische Entfernung CD der Mittelpunkte zweier Mittelpunktscurven der Summe ihrer Halbmesser CA und AD gleich ist, so werden sich die Curven von aussen berühren.

Beweis. Es ist klar, dass sie den Punkt A gemein haben werden, aber auch nur diesen Punkt; denn, um zwei Punkte gemeinschaftlich zu haben, müsste die geodätische Entfernung der Mittelpunkte der Mittelpunktscurven kleiner sein als die Summe ihrer Radien.

17. **Lehrsatz.** Wenn die Entfernung CD der Mittelpunkte zweier Mittelpunktscurven dem Unterschiede ihrer Halbmesser CA und AD gleich ist, so werden sich die Curven innerhalb berühren.

Beweis. Zuerst ist klar, dass sie den Punkt A gemeinschaftlich haben, aber auch nur diesen. Denn wäre es anders, so müsste der grössere Halbmesser AD kleiner sein als die Summe des Radius AC und der Entfernung CD der Mittelpunkte, welches nicht der Fall ist.

18. **Zusatz.** Wenn sich zwei Mittelpunktscurven ausserhalb oder innerhalb berühren, so liegen die Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer und derselben geodätischen Linie.

19. **Zusatz.** Alle Mittelpunktscurven, deren Mittelpunkte auf Einer geodätischen Linie liegen und durch den Punkt A gehen, berühren sich. Sie haben nur den einen Punkt A gemeinschaftlich, und wenn man durch A eine geodätische Linie zieht senkrecht auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, so wird dieselbe eine allen Mittelpunktscurven gemeinschaftliche Tangente sein.

20. **Zusatz.** Die Mittelpunkte aller derjenigen Mittelpunkts-

curven, welche sich in einem und demselben Punkte berühren, liegen in einer geodätischen Linie.

Beweis. Es sei A der Berührungspunkt; man ziehe durch denselben eine geodätische Linie, welche die Mittelpunktscurven berührt, und senkrecht auf diese eine zweite geodätische Linie, so liegen auf letzterer die Mittelpunkte aller Mittelpunktscurven. (14. Zusatz.)

§. 3.

Vorstehende Sätze sind Uebertragungen von planimetrischen Theoremen auf die Theorie der geodätischen Linien, mit Zugrundelegung der Geometrie von Legendre. Es sind übrigens theils einige Erläuterungen beizufügen, theils bieten sich noch weitere Sätze dar, die ebenfalls hier ihre Stelle finden dürften.

Der Lehrsatz 7. bedarf einer näheren Erläuterung: Wenn ein Punkt A auf einer Fläche gegeben ist und eine Curve X beliebiger Art, so sei AB eine von A nach der Curve gezogene geodätische Linie, welche dieselbe senkrecht in B trifft. Wir ziehen die Mittelpunktscurve, deren Mittelpunkt A und deren Radius AB ist. Diese wird die gegebene Curve in B berühren. Es können nun drei Fälle stattfinden:

I. Beide Aeste der Curve X vom Berührungspunkt B aus liegen ausserhalb der Mittelpunktscurve; dann ist die Normale AB ein Minimum oder die kürzeste geodätische Linie, die sich von A nach X ziehen lässt.

II. Beide Aeste der Curve X vom Berührungspunkt B aus liegen innerhalb der Mittelpunktscurve, entweder ganz, oder so, dass sie wieder aus der Mittelpunktscurve heraustreten. Dann ist die Normale AB ein Maximum oder die längste geodätische Linie, die sich von A nach X ziehen lässt.

III. Der eine Ast der Curve X vom Berührungspunkt B aus liegt innerhalb, der andere ausserhalb der Mittelpunktscurve. Dann ist die Normale AB weder ein Maximum, noch ein Minimum.

Der Ausdruck Maximum oder Minimum ist relativ zu nehmen; denn wenn sich von A nach der Curve X mehrere Normalen ziehen lassen, so gibt es auch mehrere Maxima oder Minima.

Aus III. folgt, dass sich der Lehrsatz 7. nicht umkehren lässt, man kann also nicht sagen: Unter allen geodätischen Linien, welche sich von Einem Punkte nach einer Curve auf einer Fläche ziehen lassen, ist die Normale die kürzeste (oder längste). Mit Aus-

schluss der relativen Maxima und Minima ist die allgemeine Fassung des 7ten Satzes diese: Unter allen geodätischen Linien, die sich von einem Punkte auf einer Fläche nach einer Curve ziehen lassen, schneidet die kürzeste oder längste dieselbe rechtwinklig.

21 a. Lehrsatz. Zieht man auf einer Fläche ein vollständiges geodätisches Viereck $ABghfe$, so dass $Bh - Ah = Be - Ae$ ist, so findet die Relation statt:

$$Af + Bf = Ag + Bg,$$

woraus sofort auch folgt:

$$hg - hf = eg - ef.$$

Diesen Satz habe ich im Archiv angegeben und bewiesen (Ueber die Rektifikation der Linien auf den Flächen, Theil XXXVI. No. V. 16.). Der entsprechende planimetrische Satz heisst:

21 b. Lehrsatz. Zieht man von zwei festen Punkten A und B in einer Ebene nach zwei beweglichen Punkten f und g Gerade, so dass

$$Af + Bf = Ag + Bg$$

ist, und verlängert Af und Bg bis zum Durchschnitt in h, so ist auch:

$$Bh - Ah = Be - Ae.$$

Beweis. (Von Herrn Repetent Binder in Schönthal a. d. Jaxt.). Verlängert man in einem Viereck um den Kreis $eghf$ (Taf. II. Fig. 12.) die Gegenseiten, bis sie sich in A und B schneiden, so ist:

$$Af + Bf = Ag + Bg.$$

Denn es ist:

$$Af + Bf = Ab' + Ba = Ab + Ba' = Ag + Bg.$$

Zieht man also die Geraden Af, Bf, Ag, Bg so, dass

$$Af + Bf = Ag + Bg,$$

so ist, wenn h der Durchschnitt der Verlängerungen von Af und Bg ist, $eghf$ ein Viereck um den Kreis, woraus weiter folgt:

$$Bh - Ah = Ba' - Ab' = Ba - Ab = Be - Ae,$$

was zu beweisen war.

Dieser Beweis gründet sich offenbar ausschliesslich auf folgende Eigenschaft des Kreises: „Die von einem Punkt ausserhalb

eines Kreises an denselben gezogenen Tangenten sind einander gleich." Da nun ein Kugelkreis eine ähnliche Eigenschaft hat, nämlich diese: „Die von einem Punkte auf einer Kugel an einen Nebenkreis tangential gezogenen Bögen grösster Kreise sind einander gleich", so folgt hieraus, dass der Binder'sche Beweis sich unmittelbar auf folgenden Satz ausdehnen lässt, der wieder ein spezieller Fall des Lehrsatzes 21 a. ist.

21 c. Lehrsatz. Zieht man von zwei festen Punkten A und B auf einer Kugel nach zwei beweglichen Punkten f und g Bögen grösster Kreise, so dass

$$Af + Bf = Ag + Bg$$

ist, so ist, wenn die Verlängerungen der Bögen Af und Bg sich in h schneiden,

$$Bh - Ah = Be - Ae.$$

Die Punkte f und g liegen auf einem sphärischen Kegelschnitte, dessen Brennpunkte A und B sind; die Punkte e und h liegen auf einem homofokalen sphärischen Kegelschnitte (dessen Brennpunkte also auch A und B sind) und der den ersteren rechtwinklig schneidet. Da nun die Seiten des Vierecks $eghf$ einen Kugelkreis $aba'b'$ berühren, so folgen hieraus einige Eigenschaften homofokaler sphärischer Kegelschnitte:

22. Zieht man nach zwei Punkten eines sphärischen Kegelschnitts von den Brennpunkten aus vier Bögen grösster Kreise, so erhält man durch Verlängerung derselben ein vollständiges Viereck aus Bögen grösster Kreise, die Einen Kugelkreis berühren und von welchem zwei andere Gegenecken auf einem homofokalen sphärischen Kegelschnitte liegen.

Da der durch f gezogene Bogen eines grössten Kreises, welcher den ersten sphärischen Kegelschnitt fg in f berührt, den Winkel der grössten Kreise Bf und hf bei f halbirt, so geht er durch den Mittelpunkt des Kugelkreises $aba'b'$; ebenso verhält es sich in den drei anderen Punkten g, e, h; hieraus schliessen wir:

23. Gegeben sind zwei homofokale sphärische Kegelschnitte. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der Kugel an beide Curven je zwei berührende Bögen grösster Kreise, so sind die vier Berührungspunkte die Ecken eines Vierecks (von Bögen grösster Kreise gebildet), dessen Gegenseiten sich paarweise in den beiden Brennpunkten schneiden und dessen Seiten Einen Kugelkreis berühren.

Einen anderen analytischen Beweis des Lehrsatzes 21 b., welcher auf die verschiedenen speziellen Fälle eingehend Rücksicht nimmt, veröffentlichte Herr Professor Baur an der polytechnischen Schule in Stuttgart (Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, 1861). Folgende Sätze über solche Curven auf den Flächen, welche den homofokalen Kegelschnitten in der Ebene entsprechen, mögen hier noch ihre Stelle finden:

Wenn eine Curve auf einer Fläche die Eigenschaft hat, dass die Summe der von einem Punkte derselben nach zwei festen Punkten der Fläche gezogenen geodätischen Linien konstant ist, so schneiden die letzteren die Curve unter gleichen Winkeln; und umgekehrt bilden die von jedem Punkte der Curve nach den festen Punkten gezogenen geodätischen Linien gleiche Winkel mit der Curve, so ist ihre Summe konstant.

Auf einer Fläche sind zwei feste Punkte und eine Curve gegeben. Wenn der Winkel (nicht Nebenwinkel, wie vorhin), welchen die von einem Punkte der Curve nach den festen Punkten gezogenen geodätischen Radienvektoren mit einander bilden, von der Curve halbirt wird, so ist die Differenz dieser Radien konstant und umgekehrt. (Analytische Geometrie des Verfassers S. 75.)

Diese Curven entsprechen den homofokalen Kegelschnitten in der Ebene, und es ist namentlich anzuführen, dass die Krümmungslinien des Ellipsoids und zweimantlichen Hyperboloids hieher gehören. Die Nabelpunkte der Flächen sind die festen Punkte, von welchen aus die geodätischen Radienvektoren gezogen werden. Wenden wir nun den Satz 21 a. an, so bekommen wir folgendes Theorem:

24. Lehrsatz. Zieht man nach zwei Punkten einer Krümmungslinie eines Ellipsoids (einmantligen Hyperboloids) von den Nabelpunkten aus vier geodätische Radienvektoren, so erhält man durch Verlängerung derselhen ein vollständiges geodätisches Viereck, von welchem zwei andere Gegenecken auf einer Krümmungslinie des zweiten Systems liegen.

Als Corollare mögen noch zwei planimetrische Sätze angeführt werden, die unmittelbar aus 21 b. folgen:

Zieht man nach zwei Punkten auf dem Umfange einer Ellipse vier Brennstrahlen, so erhält man durch Verlängerung derselhen ein vollständiges Viereck, von welchem zwei andere Gegenecken auf einer homofokalen Hyperbel liegen. In dieses Viereck lässt

sich ein Kreis beschreiben, in dessen Mittelpunkt sich die Tangenten der Ellipse und Hyperbel in den genannten Eckpunkten schneiden.

Gegeben ist eine Ellipse und die homofokale Hyperbel. Man ziehe von einem beliebigen Punkte an beide Curven je zwei Tangenten, so sind die Berührnngspunkte die Ecken eines Vierecks, dessen Seiten einen Kreis berühren und dessen Gegenseiten sich paarweise in den Brennpunkten schneiden.

XIII.

Neue Auflösung der Gleichungen des vierten Grades ohne Wegschaffung des zweiten Gliedes.

Von

dem Herausgeber.

Die gegebene Gleichung des vierten Grades sei:

1) . . . . $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$

Man setze:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+px+q)(x^2+p_1x+q_1),$$

oder nach Entwickelung des Products anf der rechten Seite des Gleichheitszeichens:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

$$=x^4+\left.\begin{array}{l}p\\+p_1\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{l}q\\+pp_1\\+q_1\end{array}\right|x^2\left.\begin{array}{l}\\+qp_1\\+pq_1\end{array}\right|x\quad+qq_1,$$

woraus sich zur Bestimmung der Grössen p, q und p_1, q_1 die folgenden Gleichungen ergeben:

$$2)\quad \left\{\begin{array}{r} p+p_1=a,\\ q+pp_1+q_1=b,\\ qp_1+pq_1=c,\\ qq_1=d. \end{array}\right.$$

Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen folgt

$$q+q_1=b-pp_1,\quad 4qq_1=4d;$$

also:

$$(q+q_1)^2=q^2+2qq_1+q_1{}^2=(b-pp_1)^2,$$
$$4qq_1 \qquad =4d;$$

folglich durch Subtraction:

$$(q-q_1)^2=(b-pp_1)^2-4d,$$

so dass man also die beiden Gleichungen:

$$q+q_1=b-pp_1,$$
$$q-q_1=\pm\sqrt{(b-pp_1)^2-4d}$$

hat, aus denen sich:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} 2q\ =b-pp_1\pm\sqrt{(b-pp_1)^2-4d},\\ 2q_1=b-pp_1\mp\sqrt{(b-pp_1)^2-4d} \end{array}\right.$$

ergiebt.

Nach der dritten der vier Gleichungen 2) ist nun ferner:

$$2c=2qp_1+2pq_1,$$

also nach 3):

$$2c=\ (b-pp_1)p_1\pm p_1\sqrt{(b-pp_1)^2-4d}$$
$$+(b-pp_1)p\mp p\sqrt{(b-pp_1)^2-4d},$$

woraus sich:

$$2c=(b-pp_1)(p+p_1)\mp(p-p_1)\sqrt{(b-pp_1)^2-4d},$$

also nach der ersten der vier Gleichungen 2):

$$2c=a(b-pp_1)\mp(p-p_1)\sqrt{(b-pp_1)^2-4d}$$

oder:

4) . . $2c-a(b-pp_1)=\mp(p-p_1)\sqrt{(b-pp_1)^2-4d}$

ergiebt.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\{2c-a(b-pp_1)\}^2=(p-p_1)^2\{(b-pp_1)^2-4d\},$$

also, weil

$$p_1=a-p,\quad b-pp_1=b-p(a-p),\quad p-p_1=2p-a$$

ist:

$$\{(2c-ab)+ap(a-p)\}^2=(2p-a)^2\{[b-p(a-p)]^2-4d\}$$
$$=\{a^2-4p(a-p)\}\{b^2-4d-2bp(a-p)+p^2(a-p)^2\},$$

oder, wenn man

5) . . . . $p(a-p)=pp_1=u$

setzt:

$$\{(2c-ab)+au\}^2=(a^2-4u)(b^2-4d-2bu+u^2),$$

woraus sich nach leichter Rechnung die Gleichung:

6) . . $u^3-2bu^2+(ac+b^2-4d)u+(c^2-abc+a^2d)=0$

ergieht, mittelst welcher Gleichung u bestimmt werden muss, worauf man p durch Auflösung der quadratischen Gleichung 5), ferner p_1 mittelst der Formel:

7) . . . . $p_1=a-p,$

und endlich q, q_1 mittelst der Formeln 3) erhält.

Für $b=0$, also für biquadratische Gleichungen von der Form

$$x^4+ax^3+cx+d=0$$

nimmt die cubische Gleichung 6) die Form

$$u^3+(ac-4d)u+(c^2+a^2d)=0$$

an, so dass also das zweite Glied schon in ihr fehlt.

Durch Auflösung der Gleichung 5) ergiebt sich leicht:

8) . . . . . $\begin{cases} p=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-u}, \\ p_1=\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2-u}; \end{cases}$

wo keine Beziehung zwischen den Zeichen in diesen und den Zeichen in den obigen Formeln Statt findet.

Die Ausdrücke von $2q$, $2q_1$ in 3) stellt man am Besten auf folgende Art dar:

$$9) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} 2q = b-u \pm \sqrt{(b-u)^2-4d}, \\ 2q_1 = b-u \mp \sqrt{(b-u)^2-4d}. \end{array} \right.$$

Wenn man

$$10) \quad \ldots \quad v = \tfrac{1}{4}a^2 - u, \quad \text{also} \quad u = \tfrac{1}{4}a^2 - v$$

setzt, so lässt sich die Gleichung 6), wie man leicht findet, auf folgende Art darstellen:

$$\left. \begin{array}{l} \tfrac{1}{64}a^6 - \tfrac{1}{8}a^4b + \tfrac{1}{4}a^2(ac+b^2-4d) + (c^2-abc+a^2d) \\ \quad -\{\tfrac{3}{16}a^4 - a^2b + (ac+b^2-4d)\}v \\ \quad +(\tfrac{3}{4}a^2-2b)v^2 \\ \quad -v^3 \end{array} \right\} = 0,$$

oder, weil, wie man leicht findet,

$$\tfrac{1}{64}a^6 - \tfrac{1}{8}a^4b + \tfrac{1}{4}a^2(ac+b^2-4d) + (c^2-abc+a^2d) = (\tfrac{1}{8}a^3 - \tfrac{1}{2}ab + c)^2$$

ist, auf folgende Art:

$$\left. \begin{array}{l} v^3-(\tfrac{3}{4}a^2-2b)v^2 \\ \quad +\{\tfrac{3}{16}a^4-a^2b+(ac+b^2-4d)\}v \\ \quad -(\tfrac{1}{8}a^3-\tfrac{1}{2}ab+c)^2 \end{array} \right\} = 0,$$

so dass also diese Gleichung, deren letztes Glied negativ ist, immer mindestens eine reelle positive Wurzel hat *); und wegen der Formel 10) muss also die Gleichung 6) immer mindestens eine reelle, von jetzt an durch u zu bezeichnende Wurzel haben, welche die Grösse $\tfrac{1}{4}a^2-u$ positiv, nach 8) also die Grössen p, p_1 reell liefert. Wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\{2c-a(b-pp_1)\}^2 = (p-p_1)^2\{(b-pp_1)^2-4d\}$$

oder

$$\{2c-a(b-u)\}^2 = 4(\tfrac{1}{4}a^2-u)\{(b-u)^2-4d\}$$

ist also auch die Grösse

$$(b-u)^2-4d$$

positiv, und die Formeln 9) liefern auch für q und q_1 reelle Werthe.

---

*) M. s. die Anmerkung am Ende.

Es frägt sich nun bloss noch, wie man im Obigen die Zeichen zu nehmen hat, worüber sich nach folgendeu Regeln entscheiden lässt.

Die Gleichung 4) kauu auf folgeude Art geschrieben werden:

$$11) \ldots \quad 2c-a(b-u)=\mp(p-p_1)\sqrt{(b-u)^2-4d},$$

uud mit Beziehung der oberen und unteren Zeicheu in dieser und den beiden folgeuden Gleichungen auf einander ist nach 9):

$$12) \ldots \quad \begin{cases} 2q\;=b-u\pm\sqrt{(b-u)^2-4d}, \\ 2q_1=b-u\mp\sqrt{(b-u)^2-4d}. \end{cases}$$

Nimmt mau uun in den Formeln 8) die oberen Zeichen und setzt demzufolge:

$$13) \ldots\ldots \quad \begin{cases} p\;=\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-u}, \\ p_1=\tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-u}; \end{cases}$$

also:

$$14) \ldots\ldots \quad p-p_1=2\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-u^2},$$

so lässt sich mittelst der Gleichung 11) immer entscheiden, welche Zeichen in den Formeln 12) genommen werden müssen. Dasselbe ist der Fall, wenn man in den Formeln 8) die unteren Zeichen nimmt, und demzufolge

$$13^*) \ldots\ldots \quad \begin{cases} p\;=\tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-u}, \\ p_1=\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-u}; \end{cases}$$

also:

$$14^*) \ldots\ldots \quad p-p_1=-2\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-u^2}$$

setzt. Dass aber beide Auflösungen im Wesentlicheu in eine zusammenfallen, ist klar. Hat man auf diese Weise die reelleu Werthe von p, q und p_1, q_1 ganz unzweideutig bestimmt, so erhält mau durch Auflösung der beiden quadratischen Gleichungen:

$$15) \ldots\ldots \quad \begin{cases} x^2+px\;+q\;=0, \\ x^2+p_1x+q_1=0 \end{cases}$$

die vier Wurzeln der aufzulösendeu Gleichung des vierten Grades.

Bei den gewöhnlichen Auflösungen der Gleichungen des vierteu Grades durch Zerlegung der Function der Gleichung in zwei quadratische Factoren wird angenommen, dass aus der Gleichung das zweite Glied weggeschafft sei, was bei der vorstehenden Auflösung nicht erforderlich ist.

Anmerkung.

Der oben angewandte Satz, dass jede Gleichung, deren letztes Glied negativ ist, mindestens **eine** reelle positive Wurzel haben muss, kann leicht auf folgende Art bewiesen werden.

Die gegebene Gleichung sei:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

oder, wenn

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

gesetzt wird,

$$f(x) = 0.$$

Für $x = 0$ ist $f(0) = a_n$, also $f(0)$ negativ, weil a_n als negativ vorausgesetzt wird; und weil nun

$$f(x) = x^n(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n})$$

ist, so ist offenbar $f(\infty) = +\infty$; da also $f(0)$ und $f(\infty)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so hat die gegebene Gleichung offenbar mindestens eine reelle Wurzel zwischen 0 und ∞, die also nur positiv sein kann.

XIV.

Untersuchungen über die Theorie der Linien auf den Flächen.

Von

Herrn Doctor *O. Böklen*,

in Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

§. 1.

Wir ziehen in einem Punkt α auf einer Fläche die Normale und parallel mit derselben durch den Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser gleich Eins, eine Gerade, welche die Kugelfläche in A trifft, so haben wir zwei entsprechende Punkte α und A, wovon der eine auf der beliebig angenommenen Fläche liegt und der andere auf der Kugel. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich zu jeder Linie oder Figur auf der Fläche eine entsprechende auf der Kugel konstruiren, welche man als ein Bild davon betrachten kann. Wir brauchen zu diesem Zwecke bloss durch alle Punkte der gegebenen Linie oder Figur die Normalen der Fläche zu ziehen, und parallel mit jeder Normale einen Kugelhalbmesser, deren Endpunkte sofort die korrespondirende sphärische Figur bilden werden. Gauss hat diese Methode seinen Untersuchungen über die Flächen zu Grunde gelegt, und gelangte so zu folgenden Theoremen, welche ganz geeignet sind, den Werth derselben zu zeigen:

Einem unendlich kleinen Kreis (oder Dreieck) auf der Fläche entspricht ein ebenfalls unendlich kleiner Kreis oder ein Dreieck auf der Kugel; das Verhältniss des Inhalts beider Kreise oder Dreiecke ist gleich $\frac{1}{R.R'}$; R und R' sind die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche in dem gegebenen Punkte.

Indem hierauf Gauss das Produkt $\frac{1}{R.R'}$ ausdrückt als eine Funktion von zwei beliebigen Variabelen, von welchen die gewöhnlichen Coordinaten der Fläche x, y, z ebenfalls als Funktionen betrachtet werden, schliesst er weiter, da das Element ds einer beliebigen Linie auf der Fläche sich als eine Funktion der

genannten Variabelen darstellen lässt, dass die beiden Grössen $\frac{1}{R \cdot R'}$ und ds zugleich konstant und zugleich veränderlich sind. Da nun ds konstant bleibt, wenn die gegebene Fläche beliebig gebogen wird, ohne Dehnung oder Pressung, so findet dasselbe auch bei dem Produkte $\frac{1}{R \cdot R'}$ statt. Es fällt hier sogleich in die Augen, dass bei einer Flächenbiegung auch jede andere Grösse, ausser $\frac{1}{R.R'}$, konstant bleiben muss, welche als Funktion jener Variabelen sich darstellen lässt.

Der dritte Satz endlich, der aus der Anwendung der Gauss'schen Methode hervorging, bezieht sich auf die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck (Polygon) auf einer Fläche; dieselbe ist gleich derjenigen des entsprechenden sphärischen Dreiecks (Polygons).

Diess sind die drei wichtigsten Sätze der Disquisitiones circa superficies curvas, und werden genügen, um die Fruchtbarkeit des Gedankens zu zeigen, welcher ihnen zu Grunde liegt. Man gewinnt auf diesem Wege ein Mittel, Eigenschaften der Linien auf den Flächen zu entdecken durch Betrachtung der viel einfacheren sphärischen Curven, welche Eigenschaften ohne Hülfe der letzteren wohl schwer zu erkennen sein würden. Die folgende kleine Sammlung von Beispielen soll die Anwendung des Gauss'schen Prinzips in dieser Richtung zeigen.*)

§. 2.

Ueber einige allgemeine Beziehungen zwischen den Linien auf den Flächen und den korrespondirenden sphärischen Curven.

Zunächst mögen einige allgemeine Relationen angegeben werden, welche zwischen einer beliebigen Linie oder mehreren auf einer Fläche und den entsprechenden sphärischen Curven stattfinden. Wenn wir durch alle Punkte einer solchen Linie die Flächen-Normalen ziehen, und mit jeder Normale einen parallelen

*) Ich habe die vorstehenden Sätze natürlich ganz mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers gegeben, bitte jedoch ausser der berühmten Abhandlung von Gauss namentlich auch meine Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833. 4°. Fünftes Kapitel., insbesondere wegen des dritten Satzes §. 88. S. 274., zu vergleichen. — „Sphärisches Dreieck (Polygon)" kann hier natürlich nicht im gewöhnlichen Sinne verstanden werden. G.

Kugelhalbmesser, so bilden die Endpunkte der letzteren auf der Kugel die entsprechende sphärische Curve.

1. Schneiden sich mehrere Linien auf einer Fläche in Einem Punkte, so werden sich auch die ihnen entsprechenden sphärischen Curven in Einem Punkte schneiden. In dem Durchschnittspunkte auf der Fläche lässt sich nur Eine Flächen-Normale ziehen (ausgezeichnete Punkte der Flächen, wie Spitzen u. s. f., welche mehrere Normalen zulassen, berücksichtigen wir nicht), also entspricht derselben nur Ein paralleler Kugelhalbmesser.

α und α' seien zwei unendlich nahe Punkte einer Linie auf der Fläche, und A und A' die entsprechenden Punkte der Kugel, deren Mittelpunkt O ist. Da die Normalen in α und α' parallel sind den Halbmessern OA und OA', so stehen die Tangential-Ebenen der Fläche in α und α' senkrecht auf OA und OA', mithin ist die Durchschnittslinie dieser Tangential-Ebenen, oder die konjugirte Tangente des Elements $\alpha\alpha'$, senkrecht auf der Ebene OAA'. AA' ist eine Tangente der entsprechenden sphärischen Curve; wir schliessen somit:

2. Die konjugirten Tangenten einer Linie auf der Fläche stehen senkrecht auf den Ebenen der die sphärische Curve in den entsprechenden Punkten berührenden grössten Kreise.

Wenn sich zwei Linien auf der Fläche berühren, so haben sie ein Element $\alpha\alpha'$ gemeinschaftlich, somit haben sie auch die diesem Element konjugirte Tangente gemein; also fallen die zwei grössten Kreise, welche die sphärischen Curven in den entsprechenden Punkten A und A' berühren, zusammen; diese Curven haben demnach auch das Element AA' gemein, d. h. sie berühren sich.

Findet bei zwei Linien auf der Fläche eine Berührung zweiter Ordnung statt, so haben sie drei auf einander folgende Punkte α, α', α'' oder zwei Elemente $\alpha\alpha'$ und $\alpha'\alpha''$ gemein; somit sind auch die konjugirten Tangenten dieser Elemente beiden Curven gemeinschaftlich. Die grössten Kreise, welche die sphärischen Curven berühren, gehen durch die entsprechenden Punkte A, A' und A'', also haben diese Curven drei Punkte oder zwei auf einander folgende Elemente gemein, und berühren sich ebenfalls in der zweiten Ordnung.

Die gleiche Schlussweise lässt sich auf den Fall ausdehnen, wenn die gegebenen Linien auf der Fläche eine Berührung dritter, vierter Ordnung haben. Wir folgern hieraus:

3. **Wenn sich zwei Linien auf einer Fläche berühren, so berühren sich auch die entsprechenden sphärischen Curven, und zwar ist die Osculation in beiden Berührungspunkten von derselben Ordnung.**

Aus 2. folgt unmittelbar:

4. **Wenn sich zwei oder mehrere Linien in einem Punkte auf einer Fläche schneiden, so sind die Winkel zwischen ihren konjugirten Tangenten in diesem Punkte gleich den Winkeln zwischen den entsprechenden sphärischen Curven in ihrem Durchschnittspunkte.**

Man ziehe in einem Kegelschnitt vier beliebige Halbmesser $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; ferner die ihnen konjugirten Semidiameter $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; die Winkel zwischen zweien dieser Linien, z. B. zwischen α und β, bezeichnen wir mit $(\alpha\beta)$, so findet, nach einem bekannten Satze, die Gleichheit folgender Doppelverhältnisse statt:

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}}{\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}} = \frac{\dfrac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{c})}{\sin(\mathfrak{b}\mathfrak{c})}}{\dfrac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{d})}{\sin(\mathfrak{b}\mathfrak{d})}},$$

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)}}{\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)}} = \frac{\dfrac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{\sin(\mathfrak{c}\mathfrak{b})}}{\dfrac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{d})}{\sin(\mathfrak{c}\mathfrak{d})}},$$

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)}}{\dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)}} = \frac{\dfrac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{\sin(\mathfrak{d}\mathfrak{b})}}{\dfrac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{c})}{\sin(\mathfrak{d}\mathfrak{c})}}.$$

Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt m auf einer Fläche, konstruiren die Tangential-Ebene, und in derselben einen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt m, dessen Axen mit den Tangenten der Krümmungslinien in m zusammenfallen und den Grössen $\sqrt{R}$ und $\sqrt{R'}$ proportional sind. Die Gleichung dieses Kegelschnitts (Dupin nennt ihn die indicatrice) ist:

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} = 1.$$

Derselbe ist bei gleichartig gekrümmten Flächen eine Ellipse, bei ungleichartig gekrümmten eine Hyperbel; und hat die Eigenschaft, dass je zwei seiner konjugirten Durchmesser mit zwei konjugirten

Tangenten der Fläche im Punkte m zusammenfallen. Wenn also α, β, γ, δ vier beliebige Tangenten der Fläche sind, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ihre konjugirten Tangenten, so finden zwischen den Winkeln $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.... die Relationen 5. statt. Sind ferner α, β, γ, δ die Tangenten von vier Linien, welche durch den Punkt m auf der Fläche gehen, so sind die Ebenen der grössten Kreise, welche diesen Linien auf der Kugel entsprechen, beziehungsweise senkrecht auf den konjugirten Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ (nach 2.), mithin finden unsere Gleichungen auch statt, wenn statt der Richtungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Tangenten A, B, C, D der genannten grössten Kreise gesetzt werden, welche durch den Punkt M auf der Kugel gehen, der dem Punkte m auf der Fläche entspricht. Bezeichnen wir somit analog die Winkel zwischen A und B mit (AB) u. s. f., so bestehen folgende Relationen:

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}}{\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}} = \frac{\dfrac{\sin(AC)}{\sin(BC)}}{\dfrac{\sin(AD)}{\sin(BD)}} \quad \text{u. s. f.,}$$

welche diesen Satz enthalten:

5. **Zieht man durch einen Punkt einer Fläche beliebige Linien, und konstruirt auf der Kugel die entsprechenden sphärischen Curven, so sind die Doppelverhältnisse der Sinus von je vier Winkeln zwischen den Linien auf der Fläche gleich den Doppelverhältnissen der Sinus von den vier Winkeln zwischen den entsprechenden sphärischen Curven.**

α und α' seien zwei unendlich nahe Punkte einer Krümmungslinie auf der Fläche, A und A' die entsprechenden Punkte der Kugel. Die durch α und α' gehenden Normalen der Fläche schneiden sich und liegen somit in Einer Ebene, welche auch die Tangente der Krümmungslinie, d. h. das Element $\alpha\alpha'$ enthält, und der Ebene AOA' bei der Kugel parallel ist. Da zugleich die Tangential-Ebenen der Fläche in den entsprechenden Punkten α und A parallel sind, so müssen es auch die Elemente $\alpha\alpha'$ und AA' sein.

6. **Die Tangenten einer Krümmungslinie auf einer Fläche sind parallel den Tangenten der entsprechenden sphärischen Curve.**

Wenn die Tangenten von zwei gewundenen Curven in je zwei entsprechenden Punkten einander parallel sind, so sind auch ihre Contingenzwinkel (Winkel zwischen zwei auf einander folgenden

Elementen) einander gleich, ihre Osculations-Ebenen (Ebenen von zwei auf einander folgenden Elementen) sind parallel; mithin sind auch die Osculationswinkel (Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Osculations-Ebenen) einander gleich. Wir schliessen demnach weiter:

7. Die Contingenzwinkel einer Krümmungslinie auf einer Fläche sind denjenigen der entsprechenden sphärischen Curve gleich. Die Osculations-Ebenen der Krümmungslinie und der sphärischen Curve sind einander parallel.

Der Hauptkrümmungshalbmesser einer Curve ist gleich dem Element derselben, dividirt durch den Contingenzwinkel. Der Torsionshalbmesser ist gleich diesem Element, dividirt durch den Osculationswinkel.

8. Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser sowohl als auch die Torsionshalbmesser einer Krümmungslinie auf einer Fläche und der entsprechenden sphärischen Curve verhalten sich wie die Elemente beider in entsprechenden Punkten.

Wir ziehen die Normalen der Fläche in zwei Punkten α und α' einer Krümmungslinie; A und A' sind die entsprechenden Punkte der sphärischen Curve, O ist der Mittelpunkt der Kugel, R der Eine Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, welche der genannten Krümmungslinie entspricht, also:

$$R = \frac{\alpha\alpha'}{AOA'} = \frac{\alpha\alpha'}{AA'}.$$

9. Der Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, welcher einer Krümmungslinie entspricht, ist gleich dem Elemente derselben dividirt durch das Element der entsprechenden sphärischen Curve.

$\alpha\alpha''$ sei ein Element der anderen durch α gehenden Krümmungslinie, und AA'' das entsprechende Element der sphärischen Curve; so ist auch, wenn R' der andere Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche ist, in α:

$$R' = \frac{\alpha\alpha''}{AA''},$$

also:

$$\frac{1}{R.R'} = \frac{AA'.AA''}{\alpha\alpha'.\alpha\alpha''}.$$

Nun ist der Bruch rechts offenbar das Verhältniss je eines Flächen-Elements auf der Kugel zu dem entsprechenden Flächen-Element der Fläche, oder nach Gauss das Krümmungsmass (mensura curvaturae). Wir haben somit, aber auf anderem Wege, den Gauss'schen Satz bewiesen: das Krümmungsmass ist $= \frac{1}{RR'}$.

Wir können in der Gleichung:

$$\frac{1}{R.R'} = \frac{AA'.AA''}{\alpha\alpha'.\alpha\alpha''}$$

$AA'.AA'' =$ const. setzen, oder, was dasselbe ist, annehmen, dass die Kugel in gleiche Elemente eingetheilt sei, so ist:

$$R.R' = \alpha\alpha'.\alpha\alpha''.\text{const.}$$

und durch Integration:

$$\int R.R' = \text{const.} \int \alpha\alpha'.\alpha\alpha'' + \text{const.}$$

Der Ausdruck rechts gibt die Complanation der gegebenen Fläche, mithin hängt dieselbe von der Integration $\int R.R'$ ab (Borchard: Quadrature définie des surfaces courbes. Liouville 1854. XIX. S. 369.)

Wir ziehen durch α' eine weitere Krümmungslinie auf der Fläche parallel $\alpha\alpha''$ und durch α'' eine vierte Krümmungslinie parallel $\alpha\alpha'$, dadurch entsteht das unendlich kleine Krümmungslinien-Viereck $\alpha\alpha'\alpha'''\alpha''$, welches rechtwinklig ist. Demselben entspricht auf der Kugel ein ebenfalls rechtwinkliges Viereck $AA'A'''A''$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens können wir auf der Fläche ein Netz von unendlich kleinen Rechtecken aus Krümmungslinien ausbreiten, welchem auf der Kugel ein Netz von ebenso vielen Rechtecken entsprechen wird. Ferner können wir annehmen, dass die Kugelrechtecke einander gleich sind, dann folgt aus der vorigen Gleichung, dass, wenn die Fläche der Differenzial-Gleichung

$$\frac{1}{R.R'} = \text{const.}$$

entspricht, auch die Krümmungslinienrechtecke auf ihr einander gleich sind, woraus man sogleich schliesst, dass die Fläche sich auf der Kugel abbilden lässt. Wir haben also nachstehenden Satz:

10. Wenn bei einer Fläche das Krümmungsmass $\frac{1}{R.R'}$

konstant ist für jeden ihrer Punkte, so lässt sie sich auf einer Kugel abbilden.

Solcher Flächen gibt es unendlich viele, worunter aber die Ebene nicht begriffen ist. Die einfachste derartige Fläche entsteht durch Drehung einer Curve um eine Axe in ihrer Ebene, welche der Gleichung entspricht:

$$\frac{1}{n.\varrho} = \text{const.}$$

n ist das Stück der Normale zwischen der Curve und der Drehungsaxe, ϱ der Krümmungshalbmesser der Curve. Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der entstandenen Drehungsfläche, R und R', sind gleich n und ϱ, also ist auch

$$\frac{1}{RR'} = \text{const.}$$

Hat man zwei Flächen, wo $\frac{1}{RR'} = \text{const.}$, so lassen sie sich beide auf einer Kugel, mithin lassen sie sich auch auf einander abbilden.

Wir nehmen nun eine zweite Fläche an, deren Hauptkrümmungshalbmesser mit R_β und R'_β bezeichnet werden sollen, konstruiren nach dem Obigen ein Netz von Krümmungslinienrechtecken $\beta\beta'\beta'''\beta''$, welchem auf der Kugel ein Netz von unendlich kleinen Rechtecken $BB'B'''B''$ entspricht, die wir auch unter sich und den Rechtecken $AA'A'''A''$ gleich annehmen. Wir haben nun die Relation:

$$\frac{1}{R_\beta . R'_\beta} = \frac{BB'.BB''}{\beta\beta'.\beta\beta''} = \frac{AA'.AA''}{\beta\beta'.\beta\beta''}.$$

Aus dieser Gleichung und der früheren

$$\frac{1}{R.R'} = \frac{AA'.AA''}{\alpha\alpha'.\alpha\alpha''}$$

folgt:

$$\alpha\alpha'.\alpha\alpha'' : \beta\beta'.\beta\beta'' = R.R' : R_\beta R'_\beta.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

11. **Wenn zwei beliebige Flächen so auf einander bezogen werden, dass in je zwei korrespondirenden Punkten die Flächen-Normalen parallel sind, so verhalten sich in diesen Punkten die Flächen-Elemente wie die Produkte der Hauptkrümmungshalbmesser.**

In dem speziellen Fall, wenn Beide Flächen der Bedingung genügen, dass für je zwei korrespondirende Punkte derselben

$$\frac{1}{R.R'} = \frac{1}{R_\beta . R'_\beta}$$

ist, muss auch

$$\alpha\alpha'.\alpha\alpha'' = \beta\beta'.\beta\beta''$$

sein; jedem Rechtecke des Netzes auf der ersten Fläche entspricht ein gleich grosses Rechteck des Netzes auf der zweiten Fläche; somit lässt sich die eine auf der andern abbilden; hiermit wäre der zweite Satz von Gauss bewiesen:

Wenn bei zwei Flächen das Krümmungsmass $\frac{1}{R.R'}$ in je zwei korrespondirenden Punkten gleich ist, so lassen sie sich auf einander abbilden.

Der Gauss'sche Beweis gründet sich auf einen allgemeinen Ausdruck von $\frac{1}{R.R'}$ mittelst der eben genannten zwei Variabelen, welcher aber so komplizirt ist, dass er in seiner ursprünglichen Form bis jetzt noch keine weitere Anwendung fand. Andere (analytische) Beweise desselben Satzes von Bertrand, Puiseux und Liouville findet man bei Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5me éd. IVme Note de M. Liouville, wo der Letztere auch einfachere Ausdrücke für $\frac{1}{R.R'}$ gegeben hat.

α und α' sind zwei unendlich nahe Punkte auf einer Fläche, a und a' sind die korrespondirenden Punkte auf einer anderen Fläche (nicht auf einer Kugel); die Normalen der Flächen in α und a sind einander parallel, wie auch diejenigen in α' und a'. Die beiden Ebenen, welche die erste Fläche in α und α' berühren, sind also auch den Tangential-Ebenen der zweiten Fläche in a und a' parallel, mithin ist auch der Durchschnitt des ersten Paares von Ebenen, oder die konjugirte Tangente des Elements $\alpha\alpha'$, parallel dem Durchschnitt der beiden anderen Tangential-Ebenen, oder der konjugirten Tangente des Elements aa'. Hieraus folgt der allgemeine Satz:

12. Wenn zwei Linien auf zwei beliebigen Flächen in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass die Flächen-Normalen in je zwei entsprechenden Punkten beider Linien einander parallel sind, so sind in diesen Punkten auch die konjugirten Tangenten der Linien unter sich parallel.

Wir bezeichnen das Element $\alpha\alpha'$ mit $d\sigma$ und aa' mit ds; der Winkel, welchen die Normalen der ersten Fläche in α und α' mit einander bilden, ist gleich ω, so ist derjenige zwischen den Normalen der zweiten Fläche in a und a' auch gleich ω; φ ist der Winkel zwischen den konjugirten Tangenten in α; f der Winkel zwischen den konjugirten Tangenten in a; ϱ und r sind die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der Flächen, welche durch die Elemente $\alpha\alpha'$ und aa' gehen; δ und d sind die Poldistanzen dieser Elemente (wenn man die Gerade zieht, welche auf den Flächen-Normalen von α und α' zugleich senkrecht steht, so ist der Punkt, wo sie die erste Flächen-Normale trifft, der Pol des Elements $\alpha\alpha'$ und die Entfernung des Pols bis zum Punkt α die Poldistanz von $\alpha\alpha'$). Wir haben nun folgende Gleichungen:

$$\varrho = \frac{d\sigma}{\sin\varphi} \cdot \operatorname{cotg}\omega, \qquad r = \frac{ds}{\sin f} \cdot \operatorname{cotg}\omega;$$

$$\delta = d\sigma . \sin\varphi . \operatorname{cotg}\omega, \qquad d = ds . \sin f . \operatorname{cotg}\omega;$$

$$d\sigma^2 : ds^2 = \varrho\delta : rd.$$

13. **Bei den in 12. genannten Linien verhalten sich die Quadrate zweier entsprechenden Elemente wie die Produkte aus den Poldistanzen dieser Elemente und der Krümmungshalbmesser von den durch sie gehenden Normalschnitten der Fläche.** Spezielle Fälle dieses allgemeinen Satzes sind folgende:

Die Eine dieser Linien ist eine Krümmungslinie der Fläche, so ist $r = d = R_\beta =$ dem derselben entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, also:

$$d\sigma : ds = \sqrt{\varrho\delta} : R_\beta.$$

Die Eine der Linien liegt auf einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$, so ist $r = d = 1$, also:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\varrho\delta}.$$

14. **Wenn man nach der Gauss'schen Methode zu einer beliebigen Linie auf einer Fläche die entsprechende sphärische Curve konstruirt, so ist das Verhältniss der Elemente beider Linien in entsprechenden Punkten gleich der Wurzel aus dem Produkt der Poldistanz des Elements der ersten Linie und des Krümmungshalbmessers von dem durch dieses Element gehenden Normalschnitte der Fläche.**

Wenn die erstere der genannten Linien eine Krümmungslinie, die andere eine sphärische Curve ist, so folgt aus unserer Proportion:

$$d\sigma : ds = R : 1,$$

$$R = \frac{d\sigma}{ds},$$

welches der Satz 9. ist.

§. 3.

Die Linien des Systems (*a*).

Wenn wir die Eigenschaften der Linien auf den Flächen durch Betrachtung der korrespondirenden sphärischen Curven untersuchen, so beginnen wir am besten mit solchen Linien, welchen die einfachsten sphärischen Curven, also grösste Kreise, entsprechen. Ist nämlich auf einer Fläche eine Linie gegeben von der Art, dass die Normalen der Fläche, welche durch die einzelnen Punkte dieser Linie gezogen werden, Einer Ebene parallel sind, so liegen die parallel gezogenen Kugelhalbmesser auch in Einer Ebene, und treffen somit die Kugel in einem grössten Kreis. Solche Linien auf den Flächen nun, welchen ein grösster Kreis entspricht, nennen wir Linien des Systems (*a*), oder kurz Linien (*a*). Sie haben folgende Eigenschaften:

15. Die Tangential-Ebenen der Linien des Systems (*a*) bilden einen Cylinder, dessen Erzeugende auf der Ebene des grössten Kreises senkrecht stehen.

Jede Tangente einer Linie (*a*) und die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende des Cylinders sind konjugirte Tangenten der Fläche.

16. Die konjugirten Tangenten der Linien des Systems (*a*) sind unter einander parallel und senkrecht auf der Ebene des der Linie entsprechenden grössten Kreises der Kugel.

Da alle Flächen-Normalen, welche durch die einzelnen Punkte einer Linie (*a*) gehen, Einer Ebene parallel sind, so stehen auch die Geraden, welche zwei auf einander folgende Normalen senkrecht treffen, und mithin die kürzeste Entfernung dieser Normalen angeben, auf jener Ebene senkrecht, und sind folglich unter einander parallel.

17. **Die Geraden, welche die kürzeste Entfernung zwischen je zwei auf einander folgenden Flächen-Normalen einer Linie des Systems (*a*) angeben, sind unter einander parallel, und stehen, wie die Erzeugenden des Cylinders, der die Fläche in der Linie (*a*) berührt, auf der Ebene des entsprechenden grössten Kreises senkrecht.**

18. **Zieht man durch einen Punkt einer Fläche vier beliebige Linien (*a*) und konstruirt die entsprechenden grössten Kreise auf der Kugel, so sind die Doppelverhältnisse der Sinus von je vier Winkeln, welche die Linien (*a*) in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt mit einander bilden, gleich den Doppelverhältnissen der Sinus der entsprechenden vier Winkel, welche die grössten Kreise in ihrem Schnittpunkt mit einander machen.**

19. **Werden durch einen Punkt auf einer Fläche vier Linien (*a*): α, β, γ, δ gezogen, so dass die Gleichung stattfindet:**

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} = \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)},$$

so bilden dieselben einen harmonischen Strahlenbüschel. Die entsprechenden grössten Kreise bilden ebenfalls einen harmonischen Strahlenbüschel, weil

$$\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} = \frac{\sin(AD)}{\sin(BD)}$$

ist.

Auf einer Kugel, deren Mittelpunkt O ist, liegt ein Punkt M, durch welchen vier grösste Kreise gehen, die von einem fünften grössten Kreise in den Punkten A', B', C', D' geschnitten werden. Wir bezeichnen, wie vorhin, die vier ersten Kreise mit A, B, C, D und die Winkel, welche sie unter einander bilden, mit (AB) u. s. f., so ist nach einem Satze der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\dfrac{\sin(AC)}{\sin(BC)}}{\dfrac{\sin(AD)}{\sin(BD)}} = \frac{\dfrac{\sin A'C'}{\sin B'C'}}{\dfrac{\sin A'D'}{\sin B'D'}}.$$

$A'C'$, $B'C'$ u. s. f. sind die Bögen zwischen den Schnittpunkten A' und C', B' und C' u. s. f. Es ist auch $\sin A'C' = \sin A'OC'$, $\sin B'C' = \sin B'OC'$.

Auf einer Fläche ziehe man durch einen Punkt m vier beliebige Linien (a): α, β, γ, δ; welche von einer fünften Linie (a) in den Punkten α', β', γ', δ' geschnitten werden. Die Normalen der Fläche, deren Fusspunkte α', β', γ', δ' sind, bezeichnen wir gleichfalls mit α', β', γ', δ' und die Winkel zwischen je zwei solchen Normalen mit $(\alpha'\beta')$, $(\alpha'\gamma')$ u. s. f., so ist offenbar:

$$(\alpha'\beta') = A'OB', \quad \alpha'\gamma' = A'OC' \quad \text{u. s. f.}$$

indem A', B', C', D' die entsprechenden vier Punkte auf der Kugel sind. Wir haben also mit Rücksicht auf die vorige Gleichung diese Relation:

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}}{\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha'\gamma')}{\sin(\beta'\gamma')}}{\dfrac{\sin(\alpha'\delta')}{\sin(\beta'\delta')}},$$

welche folgenden Satz enthält:

20. Wenn vier von einem Punkt ausgehende Linien (a) auf einer Fläche von einer fünften in vier Punkten getroffen werden, so ist das Doppelverhältniss der Sinus von vier Winkeln jenes Strahlenbüschels gleich dem Doppelverhältniss der Sinus der vier Winkel von je zwei solchen Flächen-Normalen, die durch die auf diesen Strahlen liegenden Schnittpunkte gehen.

21. Auf einer Fläche sind zwei Linien (a); auf der ersten liegen die Punkte α', β', γ', δ'; auf der zweiten α'', β'', γ'', δ''; die Winkel zwischen den Flächen-Normalen α' und β', α' und γ' u. s. f. werden wie vorhin bezeichnet durch $(\alpha'\beta')$, $(\alpha'\gamma')$ u. s. f.; wenn die Doppelverhältnisse

$$\frac{\dfrac{\sin(\alpha'\gamma')}{\sin(\beta'\gamma')}}{\dfrac{\sin(\alpha'\delta')}{\sin(\beta'\delta')}} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha''\gamma'')}{\sin(\beta''\gamma'')}}{\dfrac{\sin(\alpha''\delta'')}{\sin(\beta''\delta'')}}$$

einander gleich sind, so schneiden sich die durch die Punkte α' und α'', β' und β'', γ' und γ'', δ' und δ'' bestimmten vier Linien (a) in Einem Punkte.

Vier harmonische Punkte auf einer Linie (a) sind solche, bei welchen

$$\frac{\sin(\alpha'\gamma')}{\sin(\beta'\gamma')} = \frac{\sin(\alpha'\delta')}{\sin(\beta'\delta')}$$

ist.

22. **Jede Linie des Systems (a) auf einer Fläche wird von einem harmonischen Strahlenbüschel aus Linien (a) in vier harmonischen Punkten geschnitten. Sind auf jeder von zwei Linien (a) vier harmonische Punkte gegeben, und man verbindet je zwei entsprechende dieser Punkte durch Linien (a), so konvergiren diese in Einem Punkte.**

23. **Wenn auf einer Fläche zwei harmonische Strahlenbüschel mit verschiedenen Centren gegeben sind, wovon zwei entsprechende Strahlen in der Verbindungslinie ihrer Centren vereinigt sind, so liegen die Durchschnittspunkte der drei anderen Paare von entsprechenden Strahlen auf einer Linie (a).**

Durch zwei Punkte α und β einer Fläche ziehen wir eine Linie (a) und die Normalen der Fläche. Der Winkel zwischen diesen Normalen heisst der der Linie $\alpha\beta$ entsprechende Normalen-Winkel.

§. 4.

Dreiecke und Transversalen, gebildet von Linien des Systems (a).

Auf einer Fläche ist ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ aus Linien des Systems (a) gegeben. Man ziehe drei sich in Einem Punkt schneidende Transversalen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, so entspricht dieser Figur auf der Kugel ein sphärisches Dreieck ABC mit drei sich in Einem Punkte schneidenden Transversalen (nach 4.) AA', BB', CC'; da nun

$$\sin AC'.\sin BA'.\sin CB' = \sin C'B.\sin A'C.\sin B'A,$$

so ist auch, wenn wir die Bezeichnung der Winkel zwischen den Flächen-Normalen in α und α', β und β' u.s.f. nach 21. beibehalten:

$$\sin\alpha\gamma'.\sin\beta\alpha'.\sin\gamma\beta' = \sin\gamma'\beta.\sin\alpha'\gamma.\sin\beta'\alpha.$$

24. **Auf einer Fläche ist ein Dreieck mit drei sich in Einem Punkt schneidenden Transversalen, sämmtlich Linien des Systems (a), gegeben. Es entstehen dadurch auf jeder Seite zwei Abschnitte, im Ganzen sechs, wovon drei nicht an einander liegende getrennte heissen. Das Produkt der Sinus von drei Normalen-Winkeln, welche getrennten Abschnitten entsprechen, ist gleich dem Produkt der Sinus der drei übrigen Normalen-Winkel.**

Die folgenden Sätze sind einfache Uebertragungen von bekannten Theoremen der sphärischen Trigonometrie:

25. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks, von Linien des Systems (a) gebildet, drei Punkte an, so dass das Produkt der Sinus von drei getrennten Seiten-Abschnitten entsprechenden Normalen-Winkeln gleich dem Produkte der Sinus von den drei übrigen Normalen-Winkeln ist, welche den drei anderen getrennten Seiten-Abschnitten gegenüberliegen, so schneiden sich die von den Ecken des Dreiecks nach diesen Punkten gezogenen Transversalen des Systems (a) in Einem Punkte. (Converse von 24.)

26. Zieht man eine Linie (a), welche die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen auf einer Fläche schneidet, so bilden die drei Schnittpunkte auf den Seiten im Ganzen sechs Abschnitte. Das Produkt der Sinus von drei, getrennten Seitenabschnitten entsprechenden Normalen-Winkeln ist gleich dem Produkt der Sinus von den drei anderen Normalen-Winkeln.

27. Werden auf einer Seite eines Dreiecks aus Linien des Systems (a) und den Verlängerungen der beiden anderen, oder auf den Verlängerungen aller drei Seiten Punkte angenommen, so dass das Produkt der Sinus von drei, getrennten Seiten-Abschnitten entsprechenden, Normalen-Winkeln gleich ist dem Produkte der Sinus von den drei anderen Normalen-Winkeln, so liegen diese drei Punkte auf Einer Linie des Systems (a). (Converse von 26.)

28. Wenn man drei sich in Einem Punkt schneidende Transversalen eines Dreiecks von Linien des Systems (a) zieht, und die Fusspunkte von zweien dieser Transversalen verbindet durch eine Linie (a), so wird diese durch die dritte Transversale und die dritte Dreiecksseite harmonisch getheilt.

Die beiden Transversalen eines Dreiecks von Linien (a), welche durch eine Ecke gehen und den inneren sowohl als den äusseren Dreieckswinkel halbiren, bilden einen rechten Winkel mit einander, also sind sie in Verbindung mit den von der gleichen Ecke ausgehenden Dreiecksseiten ein harmonischer Strahlenbüschel, somit bestimmen sie auch auf der Gegenseite vier harmonische Punkte.

29. **Wenn man die Fusspunkte von drei sich in Einem Punkte schneidenden Transversalen eines Dreiecks aus Linien des Systems (*a*) verbindet, so liegen die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien mit den Gegenseiten des Dreiecks wieder auf einer Linie des Systems (*a*).**

30. **In einem vollständigen Viereck aus Linien des Systems (*a*) auf einer Fläche schneiden sich die Diagonalen gegenseitig harmonisch.**

§. 5.

Die Linien des Systems (*b*).

Anf einer Fläche liegt eine Linie, durch deren Punkte wir die Normalen der Fläche ziehen; parallel mit denselben durch den Mittelpunkt der Kugel gehen die Halbmesser. Wenn letztere in Einer Ebene liegen und die Kugel also in einem grössten Kreise treffen, so ist die gegebene Linie auf der Fläche eine solche, die wir Linie des Systems (*a*) genannt haben. Bilden die Halbmesser aber einen Kegel zweiten Grades und treffen somit die Kugel in einem sphärischen Kegelschnitt, so nennen wir die Linien auf der Fläche Linien des Systems (*b*) oder kurz Linien (*b*).

Jeder sphärische Kegelschnitt hat zwei Brennpunkte und jeder Kegel zweiten Grades zwei Fokal-Linien. Die Summe der Winkel, welche eine Erzeugende mit den Fokal-Linien bildet, ist konstant. Hieraus schliesst man:

31. **Jede Linie des Systems (*b*) auf einer Fläche hat zwei Brennpunkte; die Summe der Winkel, welche eine Flächen-Normale eines Punkts der Linie mit den Flächen-Normalen der beiden Brennpunkte bildet, ist konstant.**

Die beiden Ebenen, welche durch eine Erzeugende des Kegels und die Fokal-Linien gehen, bilden mit der durch diese Erzeugende gehenden Tangential-Ebene gleiche Winkel. Wir nehmen nun anf der Linie des Systems (*b*) den Punkt α an, dessen Flächen-Normale parallel seiner Erzeugenden ist, so ist die der Linie (*b*) in α konjugirte Tangente senkrecht auf der genannten Tangential-Ebene. Ziehen wir ferner zwei Linien (*a*) von α nach den Brennpunkten, so sind die konjugirten Tangenten dieser Linien im Punkt α senkrecht auf den beiden, durch die Erzeugende des Kegels und die Fokal-Linien gehenden Ebenen; mithin bilden diese

konjugirten Tangenten mit der konjugirten Tangente der Linie (*b*) in *α* gleiche Winkel.

32. Man ziehe von einem Punkt einer Linie des Systems (*b*) nach den Brennpunkten zwei Linien des Systems (*a*), so bilden die konjugirten Tangenten der letzteren in dem genannten Punkt mit der konjugirten Tangente der Linie (*b*) gleiche Winkel.

In dem speziellen Falle, wo die Linie (*b*) eine Krümmungslinie der Fläche ist, erhält man mit Hülfe des Satzes von Dupin, wornach die konjugirten Tangenten in einem Punkt einer Fläche zugleich die konjugirten Tangenten eines Kegelschnitts (der indicatrice) sind, folgendes Corollar:

33. Wenn eine Linie des Systems (*b*) zugleich Krümmungslinie der Fläche ist, so bildet sie mit den von einem ihrer Punkte nach den Brennpunkten gezogenen Linien (*a*) gleiche Winkel.

Wenn auf einer Kugel zwei feste Punkte gegeben sind, und um dieselben zwei Bögen grösster Kreise sich so drehen, dass sie sich rechtwinklig schneiden, so beschreibt ihr Durchschnittspunkt einen sphärischen Kegelschnitt; hieraus folgt:

34. Wenn auf einer Fläche zwei feste Punkte liegen, und um dieselben zwei Linien des Systems (*a*) sich so drehen, dass ihre konjugirten Tangenten im Durchschnittspunkte rechtwinklig zu einander sind, so beschreibt dieser Durchschnittspunkt eine Linie des Systems (*b*).

Jedem grössten Kreise auf einer Kugel entspricht ein Pol; der nach dem Pol gehende Kugelhalbmesser ist senkrecht auf der Ebene des grössten Kreises. Ebenso entspricht jeder Linie des Systems (*a*) auf einer Fläche ein Pol; die Normale der Fläche, welche durch den Pol geht, ist parallel mit den konjugirten Tangenten der genannten Linie (*a*).

Bewegt sich ein grösster Kreis so, dass er einen sphärischen Kegelschnitt umhüllt, so beschreibt sein Pol auf der Kugel ebenfalls einen sphärischen Kugelschnitt.

Wenn auf einer Kugel zwei feste Bögen grösster Kreise gegeben sind, und man lässt auf ihnen die Endpunkte eines grössten Kreises gleich einem Quadranten sich bewegen, so wird dieser einen sphärischen Kegelschnitt umhüllen, und sein Pol also auch

einen sphärischen Kegelschnitt beschreiben. Hiernach schliessen wir:

35. **Auf einer Fläche liegen zwei Linien des Systems (*a*). Man nehme auf jeder einen Punkt an, so dass die Flächen-Normalen in beiden Punkten zu einander rechtwinklich sind, so wird der Pol der durch diese (beweglichen) Punkte bestimmten Linie des Systems (*a*) eine Linie des Systems (*b*) beschreiben.**

Auf einer Kugel sind zwei Punkte O und O'; durch O gehen grösste Kreise $A, B, C, D \ldots$; und durch O' gehen die Kreise $A', B', C', D' \ldots$. Zwischen diesen beiden sphärischen Strahlenbüscheln findet die Beziehung statt, dass das Doppelverhältniss der Sinus von je vier Winkeln des Einen Büschels gleich ist dem Doppelverhältniss der Sinus von den entsprechenden vier Winkeln des anderen Büschels, also z. B.:

$$\frac{\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)}}{\frac{\sin(AD)}{\sin(BD)}} = \frac{\frac{\sin(A'C')}{\sin(B'C')}}{\frac{\sin(A'D')}{\sin(B'D')}}.$$

Wenn nun in dem grössten Kreise OO' zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind, wie A und A', oder B und B' u. s. f., so liegen die Durchschnitte von je zwei anderen entsprechenden Strahlen beider Büschel, z. B. von C und C', D und D' u. s. f., auf Einem grössten Kreise. Sind aber in dem grössten Kreise OO' nicht zwei entsprechende Strahlen vereinigt, z. B. A und B'; so liegen die Durchschnitte von je zwei entsprechenden Strahlen A und A', B und B', ... auf einem sphärischen Kegelschnitt. Dieser Satz lässt sich direkt auf die Linien der Systeme (*a*) und (*b*) übertragen:

36. **Auf einer Fläche liegen zwei Punkte, von denen Strahlenbüschel aus Linien (*a*) ausgehen, welche in der Beziehung zu einander stehen, dass das Doppelverhältniss der Sinus von je vier Winkeln des Einen Büschels gleich dem Doppelverhältniss der Sinus von den vier Winkeln der entsprechenden Strahlen des anderen Büschels ist. Sind in der Verbindungslinie beider Punkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt, so liegen die Schnittpunkte von je zwei anderen entsprechenden Strahlen auf einer Linie (*a*). Sind aber in dieser Verbindungslinie nicht zwei entsprechende**

Strahlen vereinigt, so liegen die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Strahlen auf einer Linie (b).

Hier schliesst sich nun unmittelbar folgender Satz an, dessen Beweis aus dem Hauptsatz 36. ebenso abgeleitet wird, wie der entsprechende Satz der Kegelschnitte aus den Eigenschaften der projectivischen und harmonischen Strahlenbüschel:

37. Gegeben ist ein Punkt μ auf einer Fläche und eine Linie (b); man ziehe von μ aus zwei Linien des Systems (a), welche die Linie (b) tangiren, verbinde die Berührungspunkte durch eine Linie (a); so wird jede durch (μ) gezogene Linie (a) durch diese Verbindungslinie und die Linie (b) harmonisch getheilt. Zieht man in den Schnittpunkten mit der Linie (b) an letztere zwei tangirende Linien (a), so schneiden sich diese auf der genannten Verbindungslinie.

Wir könnten nun noch eine Menge von Sätzen der neueren Geometrie anführen, die sich auf die Linien der Systeme (a) und (b) übertragen lassen, begnügen uns aber mit den bisherigen.

Unter den Linien (b) gibt es eine besondere Gattung, welche nur Einen Brennpunkt haben. Denselben entspricht auf der Kugel ein Nebenkreis. Sie haben folgende Eigenschaften:

38. Diejenigen Linien (b), welchen ein Nebenkreis auf der Kugel entspricht, haben einen Brennpunkt. Jede Normale der Fläche, welche durch einen Punkt der Linie geht, bildet mit der Flächen-Normale des Brennpunkts denselben Winkel. Zieht man vom Brennpunkt aus eine Linie des Systems (a) nach der Linie (b), so stehen im Durchschnittspunkte die konjugirten Tangenten beider Linien auf einander senkrecht.

Die Linien (a) gehören ebenfalls zu der genannten speziellen Gattung von Linien (b), auch sie haben einen Brennpunkt, welchem wir aber den besonderen Namen Pol gegeben haben; und die Sätze über die Linien (b) und ihre Strahlenbüschel lassen sich mit geringen Modifikationen auf die Linien (a) ausdehnen.

§. 6.

Anwendung auf die Flächen zweiten Grades.

Die Linien (a) sind bei den centrischen Flächen zweiten Grades Diametralschnitte, bei den Paraboloiden sind sie ebenfalls

ebene Curven, deren Ebenen der Axe der Fläche parallel sind. Die Sätze der §§. 3. und 4. können direkt auf die Flächen zweiten Grades übertragen werden, wenn man statt Linien (*a*) Diametralschnitte, oder solche Schnitte, deren Ebenen der Axe parallel sind, setzt.

Zu den Linien (*b*) gehören bei den Flächen zweiten Grades die Krümmungslinien; ihre Brennpunkte sind die Nabelpunkte der Fläche. Der Beweis dafür liegt in dem bekannten Satze: Wenn man durch den Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades Linien parallel mit solchen Normalen der Fläche zieht, deren Fusspunkte eine Krümmungslinie bilden, so sind diese Parallelen die Erzeugenden eines Kegels vom zweiten Grade, dessen Fokal-Linien parallel den Normalen der Nabelpunkte sind. Jeder Krümmungslinie entspricht somit ein Kegel; den Krümmungslinien beider Systeme entsprechen zwei Systeme homofokaler Kegel, welche sich gegenseitig senkrecht durchkreuzen. Unter den verschiedenen Sätzen, welche wir nach dem Vorhergehenden für die centrischen Flächen zweiten Grades anführen könnten, mögen die folgenden weniger bekannten namhaft gemacht werden.

39. Man ziehe auf einer Fläche zweiten Grades ein Dreieck von Diametralschnitten und nehme auf jeder Seite des Dreiecks oder dessen Verlängerung einen Punkt an, so dass diese drei Punkte entweder auf Einem Diametralschnitt liegen, oder dass die von ihnen nach den Gegenecken gezogenen Diametralschnitte sich in Einem Punkte schneiden, dann ist das Produkt der Sinus von drei solchen Normalen-Winkeln, welche drei getrennten Seitenabschnitten entsprechen, gleich dem Produkt der Sinus von den Normalen-Winkeln, welche den drei übrigen Seitenabschnitten entsprechen.

40. Auf einer Krümmungslinie, (oder auf einem Diametralschnitt) einer Fläche zweiten Grades sind zwei Punkte gegeben, durch welche zwei Strahlenbüschel von Diametralschnitten gehen, die sich paarweise wieder auf der Krümmungslinie (oder auf dem ersten Diametralschnitt) schneiden; dann ist das Doppelverhältniss der Sinus der Winkel zwischen je vier Strahlen des ersten Strahlenbüschels gleich dem Doppelverhältniss der Sinus der Winkel zwischen den entsprechenden Strahlen des zweiten Strahlenbüschels.

41. Auf einer Fläche zweiten Grades ist ein Punkt und eine Krümmungslinie (oder ein Diametralschnitt)

gegeben. Man lege durch den Punkt beliebig viele Diametralschnitte, welche die Krümmungslinie (oder den ersten Diametralschnitt) je in zwei Punkten schneiden. Die Durchschnittspunkte der Diametralschnitte, welche die Krümmungslinie (oder den ersten Diametralschnitt) in zwei solchen Punkten berühren, liegen ebenfalls auf einem Diametralschnitt der Fläche.

42. Jede Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades bildet mit den beiden von einem ihrer Punkte nach den Nabelpunkten gezogenen Diametralschnitten gleiche Winkel. Nach dem Satze von Michael Roberts bildet eine Krümmungslinie mit den von einem ihrer Punkte nach den Nabelpunkten gehenden geodätischen Linien gleiche Winkel. Hieraus folgt also:

43. Zieht man von irgend einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades nach den Nabelpunkten zwei geodätische Linien und zwei Diametralschnitte, so bilden die ersteren mit den letzteren gleiche Winkel.

Verschiedene Sätze über homofokale sphärische Kegelschnitte (hinsichtlich der Begründung derselben, sowie einiger anderen Sätze dieses Aufsatzes verweise ich auf meine Analytische Geometrie des Raumes) führen zu weiteren Resultaten:

44. Wenn an eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berührende Diametralschnitte gelegt werden, welche eine zweite Krümmungslinie je in zwei Punkten schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte von jedem Paar solcher Diametralschnitte, welche die zweite Krümmungslinie in den genannten Punkten berühren, auf einer Linie des Systems (*b*).

45. Wenn man an eine Krümmungslinie einer centrischen Fläche zweiten Grades einen tangirenden Diametralschnitt legt, welcher die übrigen Krümmungslinien je in zwei Punkten schneidet, so liegen die Durchschnittspunkte von jedem Paar solcher Diametralschnitte, welche jede Krümmungslinie in den genannten zwei Punkten berühren, auch auf einem Diametralschnitte, der die erste Krümmungslinie im Berührungspunkte senkrecht trifft.

Bewegt sich die Spitze eines von zwei grössten Kreisen auf einer Kugel gebildeten Winkels, welche einen sphärischen Kegelschnitt berühren, auf einem zweiten, homofokalen, sphärischen Kegelschnitt, so bilden sie mit dem letzteren gleiche Winkel; hieraus folgt:

46. Bewegt sich die Spitze eines von zwei Diametralschnitten auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, auf einer zweiten Krümmunglinie, so bilden sie mit der letzteren gleiche Winkel. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von 43.; er gilt auch, wenn man geodätische Linien statt Diametralschnitte setzt; wir schliessen desshalb:

47. Zieht man von einem Punkte einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades an eine zweite Krümmungslinie sowohl zwei berührende Diametralschnitte als auch zwei berührende geodätische Linien, so bilden letztere mit den ersteren gleiche Winkel.

In einem von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten gebildeten Viereck sind die Bögen grösster Kreise, welche zwei Gegenecken verbinden, einander gleich:

48. In einem Krümmungslinienviereck auf einer Fläche zweiten Grades ist der Winkel zwischen zwei durch Gegenecken des Vierecks gezogenen Flächen-Normalen gleich dem Winkel zwischen den durch die beiden anderen Gegenecken gezogenen Flächen-Normalen.

XV.

Ueber die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn Dr. *E. W. Grebe*,

Rector der Realschule zu Cassel.

Wenn man bei sphärischen Dreiecken nicht die Winkel selbst, sondern deren Supplemente mit drei Buchstaben bezeichnet, die den Winkeln gegenüberliegenden Seiten aber mit denselben nur durch veränderten Index unterschiedenen Buchstaben, so erhält man Gleichungen, in denen es gleichgültig ist, welche Gruppe von Buchstaben man Seiten und welche man Supplemente der Winkel bedeuten lassen will. Mögen zu diesem Zwecke die Buchstabengruppen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 verwandt sein, möge auch $s_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1+c_1)$, $s_2=\frac{1}{2}(a_2+b_2+c_2)$ gesetzt sein; so ist, wenn wir uns zunächst auf die für die Dreiecksberechnung wichtigsten Formeln beschränken:

[1] $$\cos a_1=\frac{\cos b_2\cos c_2-\cos a_2}{\sin b_2\sin c_2};$$

[2] $$\left\{\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}a_1&=\sqrt{\frac{\sin s_2\sin(s_2-a_2)}{\sin b_2\sin c_2}},\\ \cos\tfrac{1}{2}a_1&=\sqrt{\frac{\sin(s_2-b_2)\sin(s_2-c_2)}{\sin b_2\sin c_2}},\\ \tang\tfrac{1}{2}a_1&=\sqrt{\frac{\sin s_2\sin(s_2-a_2)}{\sin(s_2-b_2)\sin(s_2-c_2)}};\end{aligned}\right.$$

$$[3] \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin\frac{1}{2}a_1 \cos\frac{1}{2}b_1}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin(s_2 - a_2)}{\sin c_2}, \\ \frac{\cos\frac{1}{2}a_1 \sin\frac{1}{2}b_1}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin(s_2 - b_2)}{\sin c_2}, \\ \frac{\cos\frac{1}{2}a_1 \cos\frac{1}{2}b_1}{\cos\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin(s_2 - c_2)}{\sin c_2}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}a_1 \sin\frac{1}{2}b_1}{\cos\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin s_2}{\sin c_2}; \end{aligned} \right.$$

$$[4] \qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\cos\frac{1}{2}(a_1 + b_1)}{\cos\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a_2 + b_2)}{\cos\frac{1}{2}c_2}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}(a_1 + b_1)}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a_2 - b_2)}{\cos\frac{1}{2}c_2}, \\ -\frac{\sin\frac{1}{2}(a_1 - b_1)}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a_2 - b_2)}{\sin\frac{1}{2}c_2}; \end{aligned} \right.$$

$$[5] \qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a_1 + b_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a_2 - b_2)}{\cos\frac{1}{2}(a_2 + b_2)}, \\ -\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a_1 - b_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a_2 - b_2)}{\sin\frac{1}{2}(a_2 + b_2)}; \end{aligned} \right.$$

$$[6] \qquad \frac{\sin a_1}{\sin b_1} = \frac{\sin a_2}{\sin b_2}.$$

Von diesen Formeln stellt jede, welche sich bei Vertauschung des Index selbst reproducirt, ein Gesetz, jede andere zwei Gesetze dar. Die unter [4] enthaltenen Gaussischen Formeln erscheinen hier auf drei Formeln reducirt, da die mittlere deren zwei vertritt. Aus den Gaussischen Formeln mögen hier noch einige weitere bemerkenswerthe Formeln hergeleitet werden.

Unternimmt man es, [1] mit den Gleichungen [4] durch Addition und Subtraction zu verbinden, so erhält man unter Weglassung von Wiederholungen:

$$[7] \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin\frac{1}{2}s_1 \sin\frac{1}{2}(s_1 - c_1)}{\cos\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos\frac{1}{2}s_2 \cos\frac{1}{2}(s_2 - c_2)}{\cos\frac{1}{2}c_2}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}s_1 \cos\frac{1}{2}(s_1 - c_1)}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(s_2 - a_2) \cos\frac{1}{2}(s_2 - b_2)}{\cos\frac{1}{2}c_2}, \\ \frac{\cos\frac{1}{2}s_1 \sin\frac{1}{2}(s_1 - c_1)}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(s_2 - a_2) \sin\frac{1}{2}(s_2 - b_2)}{\cos\frac{1}{2}c_2}, \\ \frac{\sin\frac{1}{2}(s_1 - a_1) \cos\frac{1}{2}(s_1 - b_1)}{\sin\frac{1}{2}c_1} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(s_2 - a_2) \sin\frac{1}{2}(s_2 - b_2)}{\sin\frac{1}{2}c_2}. \end{aligned} \right.$$

Aus den Formeln [7] lassen sich nun auch leicht Ausdrücke für die Functionen von $\frac{1}{2}s_1$ herleiten. Namentlich ergibt sich $\sin\frac{1}{2}s_1$, wenn man die beiden ersten Formeln multiplicirt, sodann durch die umgesetzte dritte Formel in [3] dividirt und schliesslich die Quadratwurzel nimmt. Wir haben dann:

[8]

$$\sin\tfrac{1}{2}s_1 = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s_2\cos\frac{1}{2}(s_2-a_2)\cos\frac{1}{2}(s_2-b_2)\cos\frac{1}{2}(s_2-c_2)}{\cos\frac{1}{2}a_2\cos\frac{1}{2}b_2\cos\frac{1}{2}c_2}}.$$

Ferner ergibt sich $\cos\frac{1}{2}s_1$, wenn man die umgesetzte erste Formel in [7] mit der dritten multiplicirt und dann gerade so wie eben weiter verfährt:

[9]

$$\cos\tfrac{1}{2}s_1 = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s_2\sin\frac{1}{2}(s_2-a_2)\sin\frac{1}{2}(s_2-b_2)\sin\frac{1}{2}(s_2-c_2)}{\cos\frac{1}{2}a_2\cos\frac{1}{2}b_2\cos\frac{1}{2}c_2}}.$$

Wird [9] durch [8] dividirt, so hat man:

[10]

$$\cot\tfrac{1}{2}s_1 = \sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s_2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)}.$$

Dass in [10] die Formel von L'Huilier enthalten ist und dass auch die Formeln [8] und [9] auf den sphärischen Excess bezogen werden können, ist ohne Weiteres klar. Aus [10] folgt übrigens noch:

$$\cot\tfrac{1}{2}s_1{}^2\cot\tfrac{1}{2}s_2{}^2 = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_2-a_2)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_2-b_2)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_2-c_2)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}s_2},$$

und da der Ausdruck links sich bei einer Vertauschung des Index nicht ändert, so ist auch:

$$[11] \qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_1-a_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_1-b_1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_1-c_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}s_1} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_2-a_2)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_2-b_2)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_2-c_2)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}s_2}.$$

Aus den Formeln [7] ergeben sich durch eine der obigen sehr ähnliche Ableitung Ausdrücke für die Functionen von $\frac{1}{2}(s_1-c_1)$. Wir erhalten:

[12]

$$\sin\tfrac{1}{2}(s_1-c_1) = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s_2\sin\frac{1}{2}(s_2-a_2)\sin\frac{1}{2}(s_2-b_2)\cos\frac{1}{2}(s_2-c_2)}{\sin\frac{1}{2}a_2\sin\frac{1}{2}b_2\cos\frac{1}{2}c_2}},$$

[13]

$$\cos\tfrac{1}{2}(s_1-c_1)=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s_2\cos\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\cos\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)\sin\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)}{\sin\tfrac{1}{2}a_2\sin\tfrac{1}{2}b_2\cos\tfrac{1}{2}c_2}},$$

[14] $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-c_1)=\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s_2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)}}.$$

Aus [14] folgt sodann:

[15] $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-a_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-b_1)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)\cot\tfrac{1}{2}s_2,$$

[16] $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-a_1)\cot\tfrac{1}{2}(s_1-b_1)=\cot\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-b_2),$$

[17] $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-a_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)$$
$$=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-b_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-c_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)$$
$$=\cot\tfrac{1}{2}s_1\cot\tfrac{1}{2}s_2,$$

[18] $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s_1\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-c_1)=\cot\tfrac{1}{2}s_2\cot\tfrac{1}{2}(s_2-c_2).$$

Eine Verbindung der Formeln [7] unter einander durch Division liefert aber auch noch folgende Resultate:

[19] $$\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s_1}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c_1}=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\cos\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)}{\sin\tfrac{1}{2}s_2\sin\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)},\\[2ex]\dfrac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s_1}{\cot\tfrac{1}{2}c_1}=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}s_2\cos\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)}{\sin\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\sin\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)},\\[2ex]\dfrac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-c_1)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c_1}=\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\sin\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)}{\sin\tfrac{1}{2}s_2\sin\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)},\\[2ex]\dfrac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s_1-c_1)}{\cot\tfrac{1}{2}c_1}=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}s_2\cos\tfrac{1}{2}(s_2-c_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(s_2-a_2)\cos\tfrac{1}{2}(s_2-b_2)};\end{cases}$$

von welchen eine Rückkehr zu früheren Formeln, namentlich zu der dritten Formel in [2] und zu [14] leicht möglich ist.

XVI.

Bemerkung zu Schlömilch's Auflösung der biquadratischen Gleichungen *).

Von
Herrn Dr. *G. F. Meyer*
in Hannover.

1.

Heisst die aufzulösende Gleichung des vierten Grades

1. $$x^4+ax^2+bx+c=0,$$

so kann man diese nach Schlömilch in eine reciproke von der Form

2. $$y^4+\alpha y^3+\beta y^2+\alpha y+1=0$$

verwandeln, indem man statt x schreibt:

3. $$x=qy+\frac{b}{2s}.$$

Die Coefficienten α und β werden dabei definirt durch die Gleichungen:

4. $$\alpha=\frac{4b}{2qs},\quad \beta=\frac{6b^2+4as^2}{(2qs)^2};$$

und für die Grössen q und s erhält man die Beziehungen:

5.

$$q=\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2s}\right)^4+a\left(\frac{b}{2s}\right)^2+b\frac{b}{2s}+c}=\frac{1}{2s}\sqrt[4]{b^4+4ab^2s^2+8b^2s^3+}$$

---

*) Siehe Zeitschrift für Mathem. und Physik von S
milch, Cantor und Witzschel. Jahrg. 6. Heft 1. S. 50-

6. $$s^3 + 2as^2 + (a^2 - 4c)s - b^2 = 0.$$

Sind auf diese Weise die nöthigen Werthe ermittelt worden, so hat man bekanntlich zur Bestimmung der neuen Unbekannten y die beiden quadratischen Gleichungen zu lösen:

7. $$\eta^2 + \alpha\eta + \beta - 2 = 0, \quad y + \frac{1}{y} = \eta;$$

nach deren Entwickelung sich die Unbekannte x mittelst der Gleichung 3. ergiebt.

Vergleicht man diese, dem Principe nach zwar sehr bemerkenswerthe, wegen der vielen Hülfsrechnungen aber etwas mühevolle Auflösungsweise der biquadratischen Gleichungen mit der vortrefflichen Euler'schen Lösung; so sieht man, dass sie mit dieser die Resolvente 6. gemein hat. Es dürfte daher die Frage nahe liegen, ob nicht etwa Euler's Lösung aus der obigen abgeleitet werden kann. Soll dies möglich sein, so muss offenbar die Beziehung gelten:

$$qy + \frac{b}{2s} = \tfrac{1}{2}\sqrt{u} + \tfrac{1}{2}\sqrt{v} + \tfrac{1}{2}\sqrt{w},$$

d. h.

$$y = \frac{1}{2qs}[s\sqrt{u} + s\sqrt{v} + s\sqrt{w} - b],$$

wo u, v, w die drei Wurzeln der Gleichung 6. ausdrücken. Bestimmt man aber y aus den Gleichungen 7., so entspringt:

$$y = \frac{\eta}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\eta^2 - 4},$$

d. i. wegen $\eta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8 - 4\beta + \alpha^2}$:

$$y = \tfrac{1}{2}[-\tfrac{\alpha}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{8 - 4\beta + \alpha^2}] \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(-\tfrac{\alpha}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{8 - 4\beta + \alpha^2})^2 - 4}.$$

Und mit Benutzung der Werthe für α und β erhält man hieraus:

$$y = \frac{1}{2qs}[-b \pm s\sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2}}] \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\left(\frac{-b \pm s\sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2}}}{qs}\right)^2 - 4\right\}}$$

$$= \frac{1}{2qs}[-b \pm s\sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2}} \pm \sqrt{[-b \pm s\sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2}}]^2 - 4q^2s^2}].$$

Setzt man nun voraus, dass $2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2}$ eine der Wurzeln unserer Resolvente ausdrückt, also z. B. $= u$ ist, so ergiebt sich:

$$y = \frac{1}{2qs}[-b \pm s\sqrt{u} \pm \sqrt{(-b \pm s\sqrt{u})^2 - 4q^2s^2}]$$

$$= \frac{1}{2qs}[-b \pm s\sqrt{u} \pm \sqrt{b^2 \mp 2bs\sqrt{u} + s^2u - 4q^2s^2}].$$

Nun finden aber die Beziehungen Statt:

$$-2a = u + v + w, \quad b^2 = uvw, \quad q^2 = \frac{u}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b^2}{4s^2};$$

daher nach einigen leichten Reductionen:

$$y = \frac{1}{2qs}[-b \pm s\sqrt{u} \pm s\sqrt{v + w \mp 2 . \frac{u}{s} . \sqrt{vw}}].$$

Aus dieser Gleichung erkennt man jetzt sofort, dass man bei der Bestimmung von q für s den Wurzelwerth u zu nehmen hat, um für y einen Ausdruck von der Form

$$y = \frac{1}{2qs}[-b \pm s\sqrt{u} \pm s(\sqrt{v} \mp \sqrt{w})]$$

zu erzielen. Wenn sonach die Beziehung $u = 2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2}$ gilt, so ist es in der That möglich, aus Schlömilch's Auflösungsweise der Gleichungen 4ten Grades Euler's Lösung abzuleiten — und umgekehrt. Unter welchen Bedingungen aber ist

$$u = 2q^2 - a - \frac{b^2}{2s^2} \; ?$$

Soll diese Gleichung Statt haben, so muss offenbar

$$\frac{b^4}{(2u)^4} + a\frac{b^2}{4u^2} + \frac{b^2}{2u} + c = \frac{u^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^4}{16u^4} + \frac{au}{2} + \frac{b^2}{4u} + \frac{ab^2}{4u^2}$$

sein. Dies giebt:

$$c = \frac{u^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{2ua}{4} - \frac{b^2}{4u}$$

oder

$$c = \frac{(a+u)^2}{4} - \frac{b^2}{4u} \text{ *)}.$$

---

*) Mit Benutzung dieses Werthes von c folgt, wie man sich auch durch eine directe Rechnung überzeugen kann, immer für $s = u$ aus Gleichung 5.:

Da aber diese Bedingung auf $a^2 - 4c = uv + uw + vw$ zurückführt, so lässt sich auch stets aus der Schlömilch'schen die Euler'sche Auflösung herleiten.

2.

Wir haben oben für s den Werth u gewählt; weil aber s drei Werthe annimmt, so könnte man glauben, bei der Schlömilch'schen Auflösungsweise würden im Ganzen 12 Werthe als Wurzeln der biquadratischen Gleichung gewonnen. Man weiss nun freilich im Voraus, dass immer drei Wurzeln identisch sein müssen; indessen kann man die Bedingung stellen, dass diese Wahrheit unabhängig von dem bekannten Theoreme über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung bewiesen werde. Dies soll im Folgenden geschehen. Setzt man $s = v$, w, so folgt nach dem Vorhergehenden:

$$y = \frac{1}{2qv}[-b \pm v\sqrt{v} \pm v(\sqrt{u} \mp \sqrt{w})]$$

und

$$y = \frac{1}{2qw}[-b \pm w\sqrt{w} \pm w(\sqrt{v} \mp \sqrt{w})].$$

Daher erhält man überhaupt für x die drei Gleichungen:

$$q^2 = \sqrt{\frac{b^4}{16u^4} + a.\frac{b^2}{4u^2} + \frac{b^2}{2u} + \frac{(a+u)^2}{4} - \frac{b^2}{4u}}$$

$$= \frac{1}{4u^2}\sqrt{b^4 + 4ab^2u^2 + (2au^2)^2 + 4u^3[b^2 + 2au^2] + (2u^3)^2}.$$

oder

$$q^2 = \frac{1}{4u^2}\sqrt{[b^2 + 2au^2 + 2u^3]^2}, \text{ d. h. } q^2 = \frac{b^2}{4u^2} + \frac{a}{2} + \frac{u}{2}.$$

Mithin wird:

$$\sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2u^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{2u^2} + a + u - a - \frac{b^2}{2u^2}} = \sqrt{u}.$$

Setzt man demnach $s = v$, w, so entspringt beziehungsweise:

$$q^2 = \frac{b^2}{4v^2} + \frac{a}{2} + \frac{v}{2}, \quad \sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2v^2}} = \sqrt{v};$$

$$q^2 = \frac{b^2}{4w^2} + \frac{a}{2} + \frac{w}{2}, \quad \sqrt{2q^2 - a - \frac{b^2}{2w^2}} = \sqrt{w}.$$

$$qy+\frac{b}{2u}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{u}\pm(\tfrac{1}{2}\sqrt{v}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{w}),$$
$$qy+\frac{b}{2v}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{v}\pm(\tfrac{1}{2}\sqrt{u}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{w}),$$
$$qy+\frac{b}{2w}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{w}\pm(\tfrac{1}{2}\sqrt{v}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{u});$$

d. h. man gewinnt respective aus der ersten, zweiten und dritten dieser Gleichungen die Werthe:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{u}+\tfrac{1}{2}\sqrt{v}-\tfrac{1}{2}\sqrt{w},\\
x_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{u}-\tfrac{1}{2}\sqrt{v}+\tfrac{1}{2}\sqrt{w},\\
x_3 &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{u}+\tfrac{1}{2}\sqrt{v}+\tfrac{1}{2}\sqrt{w},\\
x_4 &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{u}-\tfrac{1}{2}\sqrt{v}-\tfrac{1}{2}\sqrt{w};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v}+\tfrac{1}{2}\sqrt{u}-\tfrac{1}{2}\sqrt{w},\\
x_2' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v}-\tfrac{1}{2}\sqrt{u}+\tfrac{1}{2}\sqrt{w},\\
x_3' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{v}+\tfrac{1}{2}\sqrt{u}+\tfrac{1}{2}\sqrt{w},\\
x_4' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{v}-\tfrac{1}{2}\sqrt{u}-\tfrac{1}{2}\sqrt{w};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1'' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{w}+\tfrac{1}{2}\sqrt{v}-\tfrac{1}{2}\sqrt{u},\\
x_2'' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{w}-\tfrac{1}{2}\sqrt{v}+\tfrac{1}{2}\sqrt{u},\\
x_3'' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{w}+\tfrac{1}{2}\sqrt{v}+\tfrac{1}{2}\sqrt{u},\\
x_4'' &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{w}-\tfrac{1}{2}\sqrt{v}-\tfrac{1}{2}\sqrt{u}.
\end{aligned}$$

Hieraus aber ergiebt sich, dass

$$x_1=x_1'=x_3''; \quad x_2=x_3'=x_2''; \quad x_3=x_2'=x_1''; \quad x_4=x_4'=x_4''.$$

3.

Die in dem Vorstehenden gefundenen Werthe gelten bekanntlich, wenn b positiv ist. Bezeichnet aber b eine negative Zahl, so sind sämmtliche Werthe mit den entgegengesetzten Zeichen zu nehmen. Soll auch diese Wahrheit an unseren Formeln sichtbar sein, so hat man sich zu erinnern, dass, für ein negatives b, s entweder $=u$, v oder w gesetzt, die Gleichung

$$y=\frac{1}{2qs}[-b\pm s\sqrt{s}\pm\sqrt{[-b\pm s\sqrt{s}]^2-4q^2s^2}$$

übergeht in

$$y=\frac{1}{2qs}[b\pm s\sqrt{s}\pm\sqrt{[b\pm s\sqrt{s}]^2-4q^2s^2}.$$

woraus z. B. schliesslich folgt:

$$y = \frac{1}{2qu}[b \pm u\sqrt{u} \pm (u\sqrt{v} \pm u\sqrt{w})].$$

Man erkennt aus dem Obigen noch, dass man auf die Vieldeutigkeit von q keine Rücksicht zu nehmen braucht.

XVII.

Bemerkung zu Clausen's Behandlung des casus irreducibilis.

Für Studirende.

Von

Herrn Dr. *G. F. Meyer*

in Hannover.

Wie man weiss hat Th. Clausen für den irreducibelen Fall der Gleichungen dritten Grades den Wurzelwerth mittelst der Kettenbrüche zu finden gelehrt *). Bekanntlich läuft bei dieser Methode die ganze Betrachtung darauf hinaus, die cubische Gleichung

1. $$x^3 - ax - b = 0 \text{ **)},$$

in welcher die positiven Zahlen a und b der Bedingung $27b^2 < 4a^3$ genügen müssen, in die einfachere

2. $$y^3 - 3y - 2c = 0,$$

wo $c < 1$, zu verwandeln; diese dann wieder in eine neue von derselben Form umzusetzen u. s. f. Des Interesses wegen, was ohne Zweifel dieser Methode zukommt, wird es hoffentlich zu entschuldigen sein, wenn ich in dem Folgenden zu zeigen ver-

---

*) M. s. meinen Aufsatz über die schöne und sehr verdienstliche Arbeit des Herrn Clausen in Thl. II. S. 446. G.

**) Diese Gleichung kann bekanntermaassen als Normalfall betrachtet werden.

suche, wie man, bloss von dem Streben geleitet, den Wurzelwerth einer Gleichung von der Gestalt 1. auf die leichteste Weise durch einen Kettenbruch darzustellen, gerade die Form 2. als die geeignetste hierzu findet. Zu dem Behufe setzen wir in Hinblick auf die Entstehungsweise eines Kettenbruches *) zuerst $x = m + \frac{n}{y}$, wo m und n noch näher zu bestimmende Constante und y eine neue — ebenfalls noch näher zu bezeichnende — Veränderliche bedeuten. In Folge dieser Substitution geht offenbar Gleichung 1. über in:

$$(m^3 - am - b)y^3 + (3m^2 - a)ny^2 + 3mn^2y + n^3 = 0.$$

Diese Gleichung nimmt augenscheinlich die reducirte Form an, indem man $3m^2 = a$ setzt und ausserdem mit $m^3 - am - b$ dividirt; man erhält so:

$$y^3 + \frac{3mn^2}{m^3 - am - b} \cdot y + \frac{n^3}{m^3 - am - b} = 0.$$

Ein Blick auf diese Gleichung zeigt nun aber sofort, dass sie die einfachere Gestalt

$$y^3 - \frac{3n^2}{2+b} \cdot y - \frac{n^3}{2+b} = 0$$

annimmt, wenn man $m = 1$, also $a = 3$ wählt. Und schreibt man, was geschehen darf, $n^2 = 2 + b$, d. i. $n = \sqrt{2+b}$; so folgt:

$$y^3 - 3y - \sqrt{2+b} = 0.$$

Soll diese Gleichung aber zum irreducibelen Falle gehören, so muss die Beziehung Statt haben:

$$1 > \frac{2+b}{4}, \text{ d. g. } 2 > b.$$

Bezeichnet demnach c eine Grösse, die kleiner als 1 ist, so kann man $b = 2c$, sonach $n = \sqrt{2(1+c)} = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+c)}$ setzen, wodurch sich ergiebt:

$$y^3 - 3y - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+c)} = 0 \quad \text{oder} \quad y^3 - 3y - 2c_1 = 0.$$

Die Gleichung $x^3 - 3x - 2c = 0$ oder — was dasselbe sagt — $y^3 - 3y - 2c = 0$ besitzt mithin die gewünschte Eigenschaft, dass sie durch die Substitution $y = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}}{y_1} = 1 + \frac{2c_1}{y_1}$ übergeht in die neue:

*) Man vergleiche beispielsweise: Stern, Algebraische Analysis. S. 264.

$$y_1^3 - 3y_1 - 2c_1 = 0,$$

in eine Gleichung also, die — wie aus dem Gesagten sofort erhellt — durch die Substitution:

$$y_1 = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}(1 + c_1)}}{y_2} = 1 + \frac{2c_2}{y_2}$$

in die folgende

$$y_2^3 - 3y_2 - 2c_2 = 0$$

übergehen muss u. s. f.

Anmerkung. Sind die Werthe von a und b in der Gleichung 1. nicht die vorhin gefundenen, wie das fast durchweg der Fall ist; so darf man in dieser statt x nur ry einschalten, wodurch für r der bekannte Werth $r = \sqrt{\frac{a}{3}}$, mithin $c = \frac{b}{2r^3} = \frac{b}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ entspringt.

XVIII.

Miscellen.

Schreiben des Herrn E. Bacaloglo in Bucarest an den Herausgeber.

Heute erhielt ich die mir von Ihnen gütigst zugesandten zwei Extraabzüge meiner Notiz über den sphärischen Excess (Theil XXXVIII. S. 220.). Da weder auf dem Couvert, noch sonst wo, irgend ein Datum zu sehen war, so kann ich nicht urtheilen, wie spät ich nach der Absendung derselben antworte; so viel ist aber gewiss, dass ich diess unmittelbar nach deren Empfange thue.

Ich danke Ihnen verbindlichst für die Aufmerksamkeit, welche Sie meiner Notiz gewidmet haben und überhaupt für Ihre rücksichtsvolle Ausdruckweise in Hinsicht meiner. Ich bin auch mit Ihnen vollkommen einverstanden, wenn Sie sagen, dass wenn auch durch die Zerlegung des Ausdruckes

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

in zwei Faktoren, wie folgt:

$$\sin\frac{E}{2}=2\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}},$$

und durch den Beweis, dass die Summe der Quadrate dieser zwei Faktoren $=1$, dargethan wird, dass der eine $=\sin\frac{E}{4}$, der andere aber $=\cos\frac{E}{4}$ ist, so folgt doch nicht unmittelbar daraus, dass auch wirklich der erste $=\sin\frac{E}{4}$ und der zweite $=\cos\frac{E}{4}$ sein muss, nicht aber auch umgekehrt der erste $=\cos\frac{E}{4}$ und der zweite $=\sin\frac{E}{4}$ sein kann. Indessen gestatten Sie mir zu bemerken, dass ich, als ich in meinem Aufsatze behauptete, dass

$$\sin\frac{E}{4}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}},$$

$$\cos\frac{E}{4}=\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}},$$

es nicht ohne Weiteres, sondern erst dann gethan habe, als ich mich überzeugte, dass für $E=0$ der obere Ausdruck, nicht aber der untere sich auf Null reducirt; ich hielt es aber für unnöthig, diese Bemerkung beizufügen, wodurch, wie ich glaube, mein Beweis mangelhaft erscheinen dürfte.

Sollten Sie nun durch diese Bemerkung zu der Ueberzeugung gelangen, dass mein Aufsatz nichts Willkührliches enthält, so bitte ich Sie, aber **nur** in diesem Falle, meinen Namen, als den Verfasser jenes Aufsatzes, zugleich aber auch obige Bemer-

kung in beifolgender deutlicherer Form der Oeffentlichkeit gütigst übergeben zu wollen.

Nach der Zerlegung des Ausdruckes

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

in die Faktoren

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

und

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}},$$

und dem Beweise, dass die Summe ihrer Quadrate $=1$ ist, folgt unmittelbar, dass der eine derselben $=\sin\frac{E}{4}$, der andere aber $=\cos\frac{E}{4}$. Um zu entscheiden, welcher von beiden Ausdrücken $=\sin\frac{E}{4}$ ist, braucht man nur zu ermitteln, welcher von ihnen beiden, für $E=0$, sich auf Null reducirt, welches das Charakteristische für den Sinus eines Bogens ist. Ist aber $E=0$, so folgt $A+B+C=180^0$, das sphärische Dreieck schrumpft in einer seiner Seiten zusammen, z. B. in der Seite c, so dass $a+b=c$ oder $a+b-c=0$ und $\sin\frac{p-c}{2}=0$. Also reducirt sich in diesem Falle der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

auf Null und hiermit repräsentirt derselbe den Sinus von $\frac{E}{4}$, indem der zweite Faktor $=\cos\frac{E}{4}$ ist.

Bucarest den 13./25. Juli 1862. E. Bacaloglo.

Mit Rücksicht auf die in Thl. XXXVIII. Nr. XVIII. S. 220. vorläufig ohne Nennung des Namens des Verfassers mit einer „Nachschrift" von mir veröffentlichte „Notiz über den sphärischen Excess" halte ich mich jetzt für verpflichtet, den vorstehenden, von dem von

mir hochgeachteten Verfasser dieser „Notiz", Herrn Baealoglo in Bucarest, an mich gerichteten, ebenso freundlichen, als durch anspruchslose Bescheidenheit ausgezeichneten Brief auf dessen Wunsch zu veröffentlichen. Man sehe den folgenden sehr schönen Beweis von Herrn Lobatto. G.

Schreiben des Herrn Professor Lobatto in Delft an den Herausgeber.

Dans le 38. tome (p. 220.) de votre estimable journal on trouve une notice qui vous a été adressée sur une nouvelle démonstration de la formule élégante due à l'Huilier pour exprimer la valeur de l'excès sphérique en fonction des trois cotés du triangle.

Quoique cette démonstration ait son merite particulier, je doute cependant qu'elle soit la plus simple qu'on puisse donner de la formule dont il s'agit. C'est pour cela que je me permets de vous soumettre par la présente une autre démonstration à laquelle je suis parvenu déjà depuis bien longtems. La voici telle que je l'ai exposée dans un petit traité de trigonométrie sphérique publié en 1836. En partant de l'équation

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

on en déduit

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{180^0-A-B}{2}\right)-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\left(\frac{180^0-A-B}{2}\right)+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

ou bien, en vertu de la relation connue

$$\frac{\operatorname{Cos}p-\operatorname{Cos}q}{\operatorname{Cos}p+\operatorname{Cos}q}=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(p+q)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(q-p):$$

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(180^0+C-A-B)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(A+B+C-180^0)=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(c+b-a),$$

$$\operatorname{Cot}\tfrac{1}{4}(180^0+A+B-C)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}E=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(s-a).\quad\text{(I)}$$

L'équation $\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$ conduira de même à

$$\frac{\operatorname{Cos}(90^0-\frac{1}{2}C)-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Cos}(90^0+\frac{1}{2}C)+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c-\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}$$

ou bien

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(180^0+A+B-C)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}E=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c)$$
$$=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(s-c).\quad\text{(II)}$$

Multipliant les équations (I) et (II), on parvient immédiatement à la formule de l'Huilier:

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\{\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(s-c)\}}.$$

Je m'en rapporte à votre jugement pour décider si la démonstration précédente peut également meriter une place dans votre journal.

Delft, ce 8. Octobre 1862. R. Lobatto.

XIX.

Ueber bestimmte Integrale.

(Fortsetzung von Thl. XXXIX. Nr. IX.)

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

II.

§. 19.

In §. 5. wurde folgendes Integral entwickelt:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg x)^r \partial x = (-)^r \cdot \frac{1^{r|1}}{m^{r+1}} = (-)^r \cdot \frac{1.2.3....r}{m^{r+1}},$$

das man auch in folgende Form umsetzen kann:

2)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg \frac{1}{x})^r \partial x = \frac{1^{r|1}}{m^{r+1}}.$$

Dort wurde bemerkt, dass m eine positive, ganze und gebrochene, r aber nur eine positive ganze Zahl sein kann.

Diese Integrale wurden vielfach und namentlich von Euler und Legendre, von letzterem unter der Benennung „Eulersches Integral zweiter Art", untersucht. Sie lassen Betrachtungen zu, die bisher nicht hervorgehoben wurden. Sie sollen hier in Kürze nachgetragen werden.

Beide Integrale gelten auch, wenn r eine gebrochene, positive und negative Zahl bedeutet. Diess zeigt sich durch Umformung des bekannten Integrals

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Setzt man nämlich:

3)

$$e^{-x^q} = y,$$

also $x^q = -\lg y$, so wird

$$x = (-\lg y)^{\frac{1}{q}} \quad \text{und} \quad \partial x = -\frac{1}{q}(-\lg y)^{\frac{1}{q}-1}\frac{\partial y}{y}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in das vorstehende Integral erhält man:

4)

$$-\frac{1}{q}\int(-\lg y)^{\frac{p}{q}-1}\partial y.$$

Die Grenzen, zwischen welchen dieses Integral genommen werden muss, bestimmen sich auf folgende Weise. Für $x=\infty$ wird $e^{-x^q}=0$. In diesem Falle ist auch $y=0$. Wird aber $x=0$ gesetzt, so ist $e^{-x^q}=1$ und in diesem Falle muss auch $y=1$ sein. Das umgeformte Integral Nr. 4) muss daher zwischen den Grenzen 1 und 0 genommen werden. Hiernach erhält man

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = -\frac{1}{q}\int_1^0(-\lg y)^{\frac{p}{q}-1}\partial y = \frac{1}{q}\int_0^1(-\lg y)^{\frac{p}{q}-1}\partial y$$
$$= \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Setzt man hierin $p+q$ statt p, so entsteht nach den nöthigen Reductionen:

$$\int_0^1(-\lg y)^{\frac{p}{q}}\partial x = \frac{q}{p+q}\,1^{\frac{p}{q}+1|1} = 1^{\frac{p}{q}|1},$$

oder

5)

$$\int_0^1(\lg y)^{\frac{p}{q}}\partial y = (-)^{\frac{p}{q}}.1^{\frac{p}{q}|1},$$

das auch in folgende Form umgesetzt werden kann:

6)

$$\int_0^1 (\lg\frac{1}{y})^{\frac{p}{q}}\partial y = 1^{\frac{p}{q}|1}.$$

Formt man nun das Integral

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p}$$

auf die gleiche Weise um, so erhält man:

7)

$$\int_0^1 (\lg y)^{-\frac{p}{q}}\partial y = (-)^{-\frac{p}{q}}.1^{-\frac{p}{q}|1},$$

8)

$$\int_0^1 (\lg\frac{1}{y})^{-\frac{p}{q}}\partial y = 1^{-\frac{p}{q}|1}.$$

Da p und q unabhängig von einander sind, so kann $\frac{p}{q}$ jede ganze und gebrochene positive, $\frac{p}{-q}$ aber nur eine negative gebrochene Zahl bedeuten, denn für eine ganze negative Zahl wird Nr. 7) und 8), also auch Nr. 1) und 2), unendlich gross. In diesem Sinne sollen die obigen Integrale hier in Kürze betrachtet werden.

§. 20.

Wir wählen hiezu das Integral Nr. 2) §. 19., weil hiebei das Zeichen nicht zu beachten ist. Die sich ergebenden Resultate sind reell, während die aus Nr. 1) sich ergebenden in bestimmten Fällen auf imaginäre Werthe führen.

Setzt man $r+\frac{n}{q}$ in Nr. 2) §. 19., so erhält man folgende allgemeine Form:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r+\frac{n}{q}}\partial x = \frac{1^{r+\frac{n}{q}|1}}{m^{r+1+\frac{n}{q}}} = \frac{1^{\frac{n}{q}|1}\left(1+\frac{n}{q}\right)^{r|1}}{m^{r+1}\sqrt[q]{m^n}}$$

$$= \frac{(q+n)^{r|q}.1^{\frac{n}{q}|1}}{q^r.m^{r+1}\sqrt[q]{m^n}} = \frac{(n+q)(n+2q)\ldots.(n+rq).1^{\frac{n}{q}|1}}{q^r.m^{r+1}\sqrt[q]{m^n}},$$

worin alle hierher gehörige Integrale enthalten sind. Ist $\frac{n}{q}=\frac{1}{2}$, so ist $1^{\frac{1}{2}|1}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, und man erhält:

2)

$$\int_0^1 x^{m-1}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r+\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1^{r+1|2}\sqrt{\pi}}{(2m)^{r+1}\sqrt{m}} = \frac{1.3.5\ldots.(2r+1)\sqrt{\pi}}{(2m)^{r+1}\sqrt{m}}$$

Für $m=1$ entsteht:

3)

$$\int_0^1 \sqrt{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \lg\frac{1}{x}\sqrt{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\int_0^1 \left(\lg\frac{1}{x}\right)^2\sqrt{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \frac{15\sqrt{\pi}}{8},$$

. . . .

$$\int_0^1 \left(\lg\frac{1}{x}\right)^r\sqrt{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \frac{1^{r+1|2}}{2^{r+1}}\sqrt{\pi} = \frac{1.3.5\ldots.(2r+1)\sqrt{\pi}}{2^{r+1}}.$$

Hiermit sind die Resultate zu vergleichen, welche **Euler** in seiner **Integralrechnung Bd. IV. S. 91.** mitgetheilt hat.

Setzt man $\frac{n}{q}=\frac{1}{3}$, so erhält man aus Nr. 1):

4)

$$\int_0^1 x^{m-1}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r+\frac{1}{3}}\partial x = \frac{4^{r|3}.1^{\frac{1}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}\sqrt[3]{m}} = \frac{4.7.10\ldots.(3r+1).1^{\frac{1}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}\sqrt[3]{m}}.$$

Hieraus erhält man für $m = 1$ folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = 1^{\frac{1}{3}|1},$$

$$\int_0^1 \lg\frac{1}{x}\sqrt[3]{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \tfrac{4}{3}1^{\frac{1}{3}|1},$$

$$\int_0^1 (\lg\frac{1}{x})^2\sqrt[3]{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \frac{28}{9}1^{\frac{1}{3}|1},$$

$$\int_0^1 (\lg\frac{1}{x})^r\sqrt[3]{\lg\frac{1}{x}}\,\partial x = \frac{1^{r+1|3}.1^{\frac{1}{3}|1}}{3^{r+1}} = \frac{1.4.7\ldots.(3r+1).1^{\frac{1}{3}|1}}{3^{r+1}}.$$

Eben so einfach ergeben sich die besondern Fälle für das Integral Nr. 4), wenn man m in die Darstellung mit den entsprechenden Werthen aufnimmt. Hierin ist

$$1^{\frac{1}{3}|1} = 0{,}8929795116 \quad \text{und} \quad \lg 1^{\frac{1}{3}|1} = 0{,}9508414945945 - 1.$$

Für $\frac{n}{q} = \frac{2}{3}$ erhält man:

6)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg\frac{1}{x})^{r+\frac{2}{3}}\partial x = \frac{5^{r|3}.1^{\frac{2}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}\sqrt[3]{m^2}} = \frac{5.8.11\ldots.(3r+2).1^{\frac{2}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}\sqrt[3]{m^2}}.$$

Die besondern Fälle leiten sich hieraus leicht ab. In dieser Darstellung ist

$$1^{\frac{2}{3}|1} = 0{,}9027452928, \quad \lg 1^{\frac{2}{3}|1} = 0{,}95556523262835 - 1.$$

Setzt man $\frac{n}{q}$ negativ in Nr. 1), so ergibt sich:

7)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg\frac{1}{x})^{r-\frac{n}{q}}\partial x = \frac{(q-n)^{r|q}.\sqrt[q]{m^n}\,1^{-\frac{n}{q}|1}}{q^r.m^{r+1}}.$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg \frac{1}{x})^{r-\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1^{r|2}.\sqrt{m\pi}}{2^r.m^{r+1}} = \frac{1.3.5\ldots.(2r-1)\sqrt{m\pi}}{2^r.m^{r+1}},$$

9)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg \frac{1}{x})^{r-\frac{1}{3}}\partial x = \frac{2^{r|3}.\sqrt[3]{m}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}} = \frac{2.5.8\ldots(3r-1)\sqrt[3]{m}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}},$$

10)

$$\int_0^1 x^{m-1}(\lg \frac{1}{x})^{r-\frac{2}{3}}\partial x = \frac{1^{r|3}.\sqrt[3]{m^2}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}} = \frac{1.4.7\ldots.(3r-2)\sqrt[3]{m^2}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{3^r.m^{r+1}}$$

u. s. w.

Hierin ist

$$1^{-\frac{1}{3}|1} = 1{,}3541179392, \quad \lg 1^{-\frac{1}{3}|1} = 0{,}13165649168403,$$

$$1^{-\frac{2}{3}|1} = 2{,}6789385348, \quad \lg 1^{-\frac{2}{3}|1} = 0{,}42796274931426.$$

Diese Darstellungen lassen sich leicht weiter fortsetzen, und specielle Fälle aus ihnen ableiten. Euler hat diesen Gebilden eine grosse Aufmerksamkeit geschenkt und seine Untersuchungen auch auf die Brüche $\frac{n}{q} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ u. s. w. a. a. O. ausgedehnt und mit vielem Scharfsinne Sätze aus der Lehre der Facultäten, die er als unentwickelbare Grössen bezeichnet, aufgestellt, wie dort nachzusehen ist. Da aber die Darstellung der besondern Fälle, wie sich zeigt, keine weitere Schwierigkeit bietet, so verfolgen wir sie nicht weiter.

Setzt man nun $-r-\frac{n}{q}$ statt r in Nr. 2) §. 19., so entsteht

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\partial x}{(\lg \frac{1}{x})^{r+\frac{n}{q}}} = \frac{1^{-r-\frac{n}{q}|1}}{m^{-r-\frac{n}{q}|1}} = \frac{1^{-\frac{n}{q}|1}.(1-\frac{n}{q})^{-r|1}.m^r.\sqrt[q]{m^n}}{m},$$

und hieraus, wenn die Facultät mit negativem Exponenten in eine mit positivem umgesetzt wird:

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\partial x}{(\lg \frac{1}{x})^{r+\frac{n}{q}}}$$

$$= (-)^r \cdot \frac{(mq)^r \cdot \sqrt[q]{m^n} \cdot 1^{-\frac{n}{q}|1}}{m \cdot n^{r|q}} = (-)^r \cdot \frac{(mq)^r \cdot \sqrt[q]{m^n} \cdot 1^{-\frac{n}{q}|1}}{m \cdot n(n+q) \ldots . (n+rq-q)}.$$

Diese Darstellung gibt eine reiche Ausbeute für die Anwendung. Setzt man $\frac{n}{q} = \frac{1}{2}$, **so erhält man**

12)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\partial x}{(\lg \frac{1}{x})^{r+\frac{1}{2}}} = (-)^r \cdot \frac{(2m)^r \cdot \sqrt{m\pi}}{m \cdot 1^{r|2}} = (-)^r \cdot \frac{(2m)^r \cdot \sqrt{m\pi}}{m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2r-1)}.$$

Für $m = 1$ **erhält man folgende Integrale:**

13)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\lg \frac{1}{x} \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = -2\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{(\lg \frac{1}{x})^2 \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{(\lg \frac{1}{x})^3 \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = -\tfrac{8}{15}\sqrt{\pi},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{(\lg \frac{1}{x})^r \sqrt{\lg \frac{1}{x}}} = (-)^r \cdot \frac{2^r \sqrt{\pi}}{1^{r|2}}.$$

Ferner erhält man:

14)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\partial x}{(\lg\frac{1}{x})^{r+\frac{1}{3}}} = (-)^r.\frac{(3m)^r\sqrt[3]{m}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{m.1^{r|3}} = (-)^r.\frac{(3m)^r.\sqrt[3]{m}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{m.1.4.7....(3r-2)},$$

15)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\partial x}{(\lg\frac{1}{x})^{r+\frac{2}{3}}} = (-)^r.\frac{(3m)^r.\sqrt[3]{m^2}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{m.2^{r|3}} = (-)^r.\frac{(3m)^r.\sqrt[3]{m^2}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{m.2.5.8....(3r-1)}$$

u. s. w.

Hieraus gewinnt man leicht eine Menge besonderer Fälle, die man mit den von Euler und andern aufgefundenen vergleichen kann.

Setzt man, da auch m eine gebrochene Zahl sein kann, $m+\frac{k}{p}$ statt m, so erhält man aus Nr. 2) §. 19.:

16)

$$\int_0^1 x^{m+\frac{k}{p}-1}(\lg\frac{1}{x})^r\partial x = \frac{p^{r+1}.1^{r|1}}{(mp+k)^{r+1}}.$$

Ebenso erhält man aus Nr. 1), 7) und 11):

17)

$$\int_0^1 x^{m+\frac{k}{p}-1}(\lg\frac{1}{x})^{r+\frac{n}{q}}\partial x = \frac{p^{r+1+\frac{n}{q}}.(q+n)^{r|q}.1^{\frac{n}{q}|1}}{q^r(pm+k)^{r+1+\frac{n}{q}}},$$

18)

$$\int_0^1 x^{m+\frac{k}{q}-1}(\lg\frac{1}{x})^{r-\frac{n}{q}}\partial x = \frac{p^{r+1-\frac{n}{q}}.(q-n)^{r|q}.1^{-\frac{n}{q}|1}}{q^r(pm+k)^{r+1-\frac{n}{q}}},$$

19)

$$\int_0^1 \frac{x^{m+\frac{k}{p}-1}}{(\lg\frac{1}{x})^{1+\frac{n}{q}}}\partial x = (-)^r.\frac{q^r(mp+k)^{r-1+\frac{n}{q}}.1^{-\frac{n}{q}|1}}{p^{r-1+\frac{n}{q}}.n^{r|q}},$$

Hieraus lässt sich eine Menge besonderer Integrale ableiten.

Setzt man $\frac{k}{p}=\frac{1}{2}$, $\frac{k}{q}=\frac{1}{2}$, und für m und r allmälig die Werthe 0, 1, 2.... in Nr. 17), so entsteht:

20)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\lg\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\partial x = \sqrt{2\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg\frac{1}{x}\sqrt{\lg\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg\frac{1}{x})^2\sqrt{\lg\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{3\sqrt{2\pi}}{25\sqrt{5}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg\frac{1}{x})^3\sqrt{\lg\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{15\sqrt{2\pi}}{243\sqrt{7}},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg\frac{1}{x})^r\sqrt{\lg\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{1^{r+1|2}.\sqrt{2\pi}}{(2m+1)^{r+1}\sqrt{2m+1}} = \frac{1.3.5\ldots.(2r+1)\sqrt{2\pi}}{(2m+1)^{r+1}\sqrt{2m+1}},$$

u. s. w. Diese Integrale lassen sich beliebig vermehren.

§. 21.

Eine ausgedehnte Gruppe von Integralen gewinnt man durch Verbindung der in §. 19. angegebenen Ausdrücke mit dem Binomium $(1\mp x^q)^n$. Man erhält:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n(\lg x)^r\partial x$$

$$=\int_0^1 (x^{p-1}(\lg x)^r - nx^{p+q-1}(\lg x)^r + (n)_2 x^{p+2q-1}(\lg x)^r - \ldots.)\partial x.$$

Werden die einzelnen Glieder nach Nr. 1) § 19. integrirt, so entsteht:

1)

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n(\lg x)^r\partial x$$

$$=(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}}-n\frac{1}{(p+q)^{r+1}}+\frac{(n)_2}{(p+2q)^{r+1}}-\frac{(n)_3}{(p+3q)^{r+1}}+\dots\right)$$

$$=(-)^r.1^{r|1}.\Sigma_0^n(-)^u.\frac{(n)_u}{(p+uq)^{r+1}},$$

worin

$$(n)_u=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-u+1)}{1.2.3\dots u}$$

bedeutet. Die Glieder der eingeschlossenen Reihe bilden den $n$ten Unterschied von $\frac{1}{p^{r+1}}$, jedoch in umgekehrter Ordnung. Man kann daher dieses Integral auch so darstellen:

2)

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n(\lg x)^r\partial x = (-)^{r+n}.1^{r|1}.\Delta^n\frac{1}{p^{r+1}},$$

bei der Zunahme q. Auf gleiche Weise erhält man:

3)

$$\int_0^1 x^{p-1}(1+x^q)^n(\lg x)^r\partial x$$

$$=(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}}+\frac{n}{(p+q)^{r+1}}+\frac{(n)_2}{(p+2q)^{r+1}}+\dots\right)$$

$$=(-)^r.1^{r|1}.\Sigma_0^n.\frac{(n)_u}{(p+uq)^{r+1}}=(-)^r.1^{r|1}.\zeta\frac{1}{p^{r+1}}.$$

Denn die Glieder der eingeschlossenen Reihe bilden die $n$te Aufstufung von $\frac{1}{p^{r+1}}$ bei der Zunahme q. Man kann auf beide Darstellungen die Gesetze anwenden, welche von dem $n$ten Unterschied oder der $n$ten Aufstufung gelten und daraus eine Menge besonderer Integrale ableiten. Sie werden jedoch nicht Gegenstand unserer Untersuchung sein.

Setzt man $-n$ statt n in Nr. 1) und 3), so entsteht:

(4)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r}{(1-x^q)^n}\partial x = (-)^r . 1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}} + \frac{n}{(p+q)^{r+1}} + \frac{[n]_2}{(p+2q)^{r+1}} + \dots\right)$$

$$= (-)^r . 1^{r|1} . \Sigma_0^\infty . \frac{[n]_u}{(p+uq)^{r+1}},$$

(5)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r}{(1+x^q)^n}\partial x = (-)^r . 1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}} - \frac{n}{(p+q)^{r+1}} + \frac{[n]_2}{(p+2q)^{r+1}} - \dots\right)$$

$$= (-)^r . 1^{r|1} . \Sigma_0^\infty (-)^u . \frac{[n]_u}{(p+uq)^{r+1}}.$$

Hierin ist:

$$[n]_u = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+u-1)}{1.2.3\dots u}.$$

Aus der Gleichung Nr. 2) §. 19. ergeben sich folgende Darstellungen:

6)

$$\int_0^1 x^{p-1}(1 \mp x^q)^n(\lg \frac{1}{x})^r \partial x$$

$$= 1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}} \mp \frac{n}{(p+q)^{r+1}} + \frac{(n)_2}{(p+2q)^{r+1}} \mp \dots\right),$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg \frac{1}{x})^r}{(1 \mp x^q)^n}\partial x = 1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}} \pm \frac{n}{(p+q)^{r+2}} + \frac{[n]_2}{(p+2q)^{r+1}} \pm \dots\right).$$

Die Formen in Nr. 1) — 5) und in Nr. 6) und 7) führen die gleichen Zahlenwerthe und unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Die geraden Potenzen von r führen auf gleiche Zeichen. Da aber die Ausdrücke in Nr. 1) — 5) bequemer darzustellen sind, so werden sie hier berücksichtigt werden. Aus den für jene gefundenen Resultaten kann man leicht auf die in Nr. 6) und 7) zu erhaltenden übergehen.

So lange $n > 1$ ist, sind die Reihen in Nr. 1) — 5) zur Auswerthung nicht geeignet, da sie wenig convergiren. Man kann zwar die in meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen angegebene Methode anwenden, um diese Reihen zu summiren.

Sie führt aber zu sehr zusammengesetzten Ausdrücken. Wir beschränken uns daher auf den Fall, wenn $n=1$ ist, zumal sich auch hier noch immer eine reiche Ausbeute bietet. In diesem Falle erhalten wir folgende zwei Darstellungen:

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r}{1-x^q}\partial x = (-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}}+\frac{1}{(p+q)^{r+1}}+\frac{1}{(p+2q)^{r+1}}+\ldots\right)$$
$$= (-)^r.1^{r|1}.S(p,q)^{r+1},$$

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{p+1}(\lg x)^r}{1+x^q}\partial x = (-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}}-\frac{1}{(p+q)^{r+1}}+\frac{1}{(p+2q)^{r+1}}-\ldots\right)$$
$$= (-)^r.1^{r|1}.S'(p,q)^{r+1}.$$

Hier ist zur Bezeichnung des Summenausdrucks der unendlichen reciproken Potenzreihen mit einerlei Zeichen das Symbol $S(p,q)^{r+1}$ und der mit abwechselnden Zeichen das Symbol $S'(p,q)^{r+1}$ gewählt. Sämmtliche Elemente, welche zur Bestimmung der Reihe nöthig sind, nämlich das erste Glied (p), die Zunahme (q) und der Exponent der Glieder ($r+1$), sind darin aufgenommen. Diese Bezeichnungsweise dürfte geeigneter erscheinen, als andere, und namentlich die von Legendre gewählte, bei welcher die reciproken Potenzreihen mit abwechselnden Zeichen, die gleich wichtig sind, nicht berücksichtigt sind.

Bei der Anwendung ergeben sich aus den Elementen p und q so viele verschiedene Reihen als q Einheiten enthält, und so lange p sich höchstens bis zu q erhebt. Wird $p=q$, so erhalten diese Darstellungen folgende Form:

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r}{1-x^p}\partial x = (-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}}+\frac{1}{(2p)^{r+1}}+\frac{1}{(3p)^{r+1}}+\ldots\right)$$
$$= (-)^r.\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{4^{r+1}}+\ldots\right),$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r}{1+x^p}\partial x = (-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}}-\frac{1}{(2p)^{r+1}}+\frac{1}{(3p)^{r+1}}-\ldots\right)$$
$$= (-)^r.\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\frac{1}{4^{r+1}}+\ldots\right).$$

Hieraus leitet sich folgendes Gesetz ab:

12)

$$S(p, p)^{r+1} = \frac{1}{p^{r+1}} S(1, 1)^{r+1},$$

$$S'(p, p)^{r+1} = \frac{1}{p^{r+1}} S'(1, 1)^{r+1}.$$

Ueberhaupt erhält man, wenn p und q einen gemeinschaftlichen Faktor haben, was häufig vorkommt, folgende Reductionsformeln:

13)

$$S(kp, kq)^{r+1} = \frac{1}{k^{r+1}} S(p, q)^{r+1},$$

$$S'(kp, kq)^{r+1} = \frac{1}{k^{r+1}} S'(p, q)^{r+1}.$$

Ferner ergeben sich aus Nr. 8) und 9) folgende Ableitungen, die im Folgenden viele Anwendung finden werden, wenn $p = 1$ und $q = 1, 2, 3 \ldots.$ gesetzt wird:

14)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1-x} \partial x = (-)^r . 1^{r|1} S(1, 1)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1-x^2} \partial x = (-)^r . 1^{r|1} S(1, 2)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1-x^3} \partial x = (-)^r . 1^{r|1} S(1, 3)^{r+1},$$

u. s. w.

15)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x} \partial x = (-)^r . 1^{r|1} S'(1, 1)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x^2} \partial x = (-)^r . 1^{r|1} S'(1, 2)^{r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x^3} \partial x = (-)^r . 1^{r|1} S'(1, 3)^{r+1},$$

u. s. w.

§. 22.

Man kann die in Nr. 8) und 9) §. 21. gewonnenen Gleichungen zur Ableitung einer bestimmten Classe von Integralen brauchbar machen, wenn man die Werthe von p und q, die unter einander unabhängig sind, in bestimmten Zusammenhang bringt. Setzt man nämlich p statt q und $(m+1)p$ statt p in Nr. 8) §. 21., so entsteht mit Rücksicht auf Nr. 13):

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^p}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(\frac{1}{(m+1)^{r+1}}+\frac{1}{(m+2)^{r+1}}+\frac{1}{(m+3)^{r+1}}+\ldots\right).$$

In der eingeschlossenen Reihe fehlen die m ersten Glieder. Ergänzt man sie und schliesst sie wieder aus, so geht obige Darstellung über in

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^p}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\ldots\frac{1}{m^{r+1}}\right).$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus Nr. 9) §. 21.:

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^p}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left[\frac{1}{(m+1)^{r+1}}-\frac{1}{(m+2)^{r+1}}+\frac{1}{(m+3)^{r+1}}-\ldots\right].$$

Auch hier fehlen die m ersten Glieder. Bei der Ergänzung hat man auf den Zeichenwechsel Rücksicht zu nehmen, und das vorzusetzende Zeichen so einzurichten, dass das Glied $\frac{1}{(m+1)^{r+1}}$, für sich betrachtet, positiv wird. Es wird daher

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^p}\partial x=(-)^{m+r}\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\frac{1}{4^{r+1}}\ldots(-)^{m-1}\frac{1}{m^{r+1}}\right).$$

Unterscheidet man aber, was hier eintritt, zwischen einer geraden und ungeraden Zahl, so ergeben sich folgende zwei Darstellungen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^p}\partial x=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\frac{1}{4^{r+1}}\ldots-\frac{1}{(2m)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+2p-1}(\lg x)^r}{1+x^p}\partial x=(-)^{r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\frac{1}{4^{r+1}}\ldots+\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}\right).$$

Eine andere Form von Reihen bekommt man, wenn $2p$ statt q und $2mp+p$ statt p in Nr. 8) und 9) §. 21. gesetzt wird. Auch in diesem Falle lässt sich p aus der Reihe ausscheiden, und es entsteht:

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^{2p}}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}+\frac{1}{(2m+3)^{r+1}}+\frac{1}{(2m+5)^{r+1}}+\ldots\right)$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S(1,2)^{r+1}(-)^{r+1}\cdot\frac{1^{r+1}}{p^{r+1}}\left(1+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{2mp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^{2p}}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}-\frac{1}{(2m+3)^{r+1}}+\frac{1}{(2m+5)^{r+1}}-\ldots\right)$$

$$=(-)^{m+r}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(1,2)^{r+1}(-)^{m+r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left(1-\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots(-)^{m-1}\cdot\frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right).$$

Diese Art von Reihen lässt sich in eine allgemeine Form bringen, wenn man kp statt q und $mkp+p$ statt p schreibt:

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^{kp}}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left[\frac{1}{(mk+1)^{r+1}}+\frac{1}{(mk+k+1)^{r+1}}+\frac{1}{(mk+2k+1)^{r+1}}+\ldots\right]$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S(mk+1,\,k)^{r+1},$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^{kp}}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left[\frac{1}{(mk+1)^{r+1}}-\frac{1}{(mk+k+1)^{r+1}}+\ldots\right]$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(mk+1,\,k)^{r+1}.$$

Auch hier lassen sich die Anfangsglieder ergänzen und man erhält:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1-x^{kp}}\partial x=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S(1,\,k)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left[1+\frac{1}{(k+1)^{r+1}}+\frac{1}{(2k+1)^{r+1}}+\ldots\frac{1}{((m-1)k+1)^{r+1}}\right],$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{mkp+p-1}(\lg x)^r}{1+x^{kp}}\partial x=(-)^{m+r}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(1,\,k)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}\left[1-\frac{1}{(k+1)^{r+1}}+\frac{1}{(2k+1)^{r+1}}-\ldots(-)^{m-1}\frac{1}{(mk-k+1)^{r+1}}\right].$$

Diese Gleichungen werden später zu mancherlei Anwendungen dienen.

§. 23.

Die Auswerthung der hier in Frage stehenden Integrale be-

ruht, wie man sieht, auf der Darstellung der Summen der reciproken Potenzreihen mit gleichen und abwechselnden Zeichen, und bei verschiedenen Anfangsgliedern und Zunahmen.

In einer Abhandlung, welche im 26. **Bande dieses Archivs** S. 1 u. ff. abgedruckt ist, habe ich die Gleichungen angegeben, wie die Summen der reciproken Potenzreihen mit gleichen und abwechselnden Zeichen bei jedem Anfangsgliede und jeder Zunahme dargestellt werden können. Bezeichnet man das erste Glied durch m, die Zunahme durch k, so hat man zur Darstellung der Summe einer Reihe mit einerlei Zeichen folgende Gleichung:

1)

$$S(m,k)^p = \frac{1}{m^p} + \frac{1}{(m+k)^p} + \frac{1}{(m+2k)^p} + \ldots$$

$$= \frac{1}{m^p} + \frac{1}{(m+k)^p} + \frac{1}{(m+2k)^p} + \ldots \frac{1}{(m+nk-k)^p}$$

$$+ \frac{1}{(p-1)(m+nk)^{p-1}.k} + \frac{1}{2(m+nk)^p} + \frac{p.k}{6.2(m+nk)^{p+1}} - \frac{[p]_3 k^3}{30.4(m+nk)^{p+3}}$$

$$+ \frac{[p]_5 k^5}{42.6(m+nk)^{p+5}} - \frac{[p]_7 k^7}{30.8(m+nk)^{p+7}} + \frac{5[p]_9 k^9}{66.10(m+nk)^{p+9}} - \ldots$$

Das Fortgangs-Gesetz der begleitenden Reihe liegt deutlich vor. Die Vorzahlen der einzelnen Glieder sind die Bernoulli'schen Zahlen:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ \frac{691}{2730},\ \frac{7}{6},\ \frac{3617}{510},\ \ldots$$

Die Summe einer reciproken Potenzreihe mit abwechselnden Zeichen bestimmt sich durch folgende Gleichung:

2)

$$S'(m,k)^p = \frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+k)^p} + \frac{1}{(m+2k)^p} - \frac{1}{(m+3k)^p} + \ldots$$

$$= \frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+k)^p} + \frac{1}{(m+2k)^p} \ldots (-)^{n-1} \frac{1}{(m+nk-k)^p}$$

$$(-)^n \Big[\frac{1}{2(m+nk)^p} + \frac{pk}{4(m+k)^{p+1}} - \frac{[p]_3 k^3}{8(m+k)^{p+3}} + \frac{[p]_5 k^5}{4(m+nk)^{p+5}}$$

$$- \frac{17[p]_7 k^7}{16(m+nk)^{p+7}} + \frac{31[p]_9 k^9}{4(m+nk)^{p+9}} - \frac{691[p]_{11} k^{11}}{8(m+nk)^{p+11}} + \ldots \Big].$$

Die Vorzahlen der begleitenden Reihe sind die Vorzahlen

der Glieder der ersten negativen Aufstufung $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{17}{16}, \frac{31}{4}, \frac{691}{8}, \frac{4561}{4}, \ldots$

Bei Anwendung dieser Gleichungen wird es zweckmässig sein, die Zahl $(m+nk)$ in der begleitenden Reihe so zu wählen, dass sich die höhern Potenzen, worauf sie führt, bequem darstellen lassen, wozu sich die Zahlen 10, 20, 30.... und auch 25 ganz gut eignen, da $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$ ist.

Obgleich die Glieder der begleitenden Reihen nicht vollständig convergiren, so lassen sie sich doch ganz gut gebrauchen, um bei schicklicher Wahl von $(m+nk)$ den Werth des Summenausdrucks beliebig genau zu bestimmen, indem man so weit fortgehen kann, bis die Convergenz aufhört, was dadurch erkannt wird, dass man bei dem Fortschreiten der Glieder Werthe erhält, die theils kleiner, theils grösser als der gesuchte Summenausdruck sind.

Man kann eine Reihe mit abwechselnden Zeichen in zwei Reihen von einerlei, aber entgegengesetzten Zeichen auf folgende Weise zerlegen:

3)

$$S'(m, k)^p = S(m, 2k)^p - S(m+k, 2k)^p,$$

und dann nach der Gleichung Nr. 1) verfahren. Dadurch wird aber nichts gewonnen, denn die Arbeit verdoppelt sich.

Da im Folgenden die Summen der Potenzreihen mit verschiedenen Anfangsgliedern und Zunahmen nöthig werden, so sollen hier diejenigen bestimmt werden, welche die Grundlage zur Auffindung anderer bilden, wodurch sich das hier zu beobachtende Verfahren verdeutlicht. Um die Summe von $S(2, 3)^2$ zu bestimmen, hat man $m=2$, $n=6$, $k=3$, $p=2$ in Nr. 1) zu setzen. Hiernach ist:

4)

$$S(2, 3)^2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots \frac{1}{17^2} + \frac{1}{2.20} + \frac{1}{2.20^2} + \frac{2.3}{6.2.20^3}$$

$$-\frac{4.3^3}{30.4.20^5} + \frac{6.3^5}{6.42.20^7} - \frac{8.3^7}{30.8.20^9} + \frac{10.5.3^9}{66.10.20^{11}} - \frac{12.691.3^{11}}{2730.12.20^{13}} \ldots$$

Werden die angezeigten Werthe berechnet und zusammengezählt, so entsteht:

5)

$$S(2,3)^2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots = 0{,}3404306010398\ldots$$

Ebenso erhält man:

6)

$$S(2,3)^3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \ldots \frac{1}{17^3} + \frac{1}{2.20^2.3} + \frac{1}{2.20^3} + \frac{3.3}{6.2.20^4}$$

$$- \frac{10.3^3}{30.4.20^6} + \frac{21.3^5}{6.42.20^8} - \frac{36.3^7}{8.30.20^{10}} + \frac{55.5.3^9}{66.10.20^{12}} - \frac{78.691.3^{11}}{12.2730.20^{14}} + \ldots,$$

und hieraus:

7)

$$S(2,3)^3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \ldots = 0{,}1367562326834\ldots$$

Aus Nr. 2) erhält man für dieselben Werthe:

8)

$$S'(2,3)^2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} \ldots - \frac{1}{17^2} + \frac{1}{2.20^2} + \frac{2.3}{4.20^3} - \frac{4.3^3}{8.20^5} + \frac{6.3^5}{4.20^7}$$

$$- \frac{17.8.3^7}{16.20^9} + \frac{31.10.3^9}{4.20^{11}} - \frac{691.12.3^{11}}{8.20^{13}} + \ldots$$

$$= 0{,}2204359059284\ldots$$

9)

$$S'(2,3)^3 = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} \ldots - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{2.20^3} + \frac{3.3}{4.20^4} - \frac{10.3^3}{8.20^6} + \frac{21.3^5}{4.20^8}$$

$$- \frac{36.17.3^7}{16.20^{10}} + \frac{31.55.3^9}{4.20^{12}} - \frac{78.691.3^{11}}{8.20^{14}} + \ldots$$

$$= 0{,}1184387784250\ldots$$

Setzt man $m=1$, $k=4$, $n=6$, $p=2, 3$ in Nr. 1), so entsteht:

10)

$$S(1,4)^2 = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots \frac{1}{21^2} + \frac{1}{25.4} + \frac{1}{2.25^2} + \frac{2.4}{6.2.25^3} - \frac{4.4^3}{30.4.25^5}$$

$$+ \frac{6.4^5}{42.6.25^7} - \frac{8.4^7}{30.8.25^9} + \frac{10.5.4^9}{66.10.25^{11}} - \ldots$$

$$= 1{,}0748330721566\ldots$$

11)

$$S(1,4)^3 = 1 + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \dots \frac{1}{21^3} + \frac{1}{2.25^2.4} + \frac{1}{2.25^3} + \frac{3.4}{2.6.25^4} - \frac{10.4^3}{30.4.25^6}$$

$$+ \frac{21.4^5}{42.6.25^8} - \frac{36.4^7}{30.8.25^{10}} + \frac{55.5.4^9}{66.10.25^{12}} - \dots$$

$$= 1{,}0103729682620\dots$$

u. s. w. Die Werthberechnung dieser Summenausdrücke ist, wie man sieht, mit viel Mühe verbunden, namentlich wenn sie weiter ausgeführt und auf die verschiedenen Summen einer und derselben Zunahme ausgedehnt werden soll. Es wird daher gut sein, noch weitere Methoden anzugeben, welche ihre Auffindung erleichtern und die Arbeit auf ein Minimum zurückbringen. Diess soll im Folgenden geschehen.

§. 24.

Wir betrachten zuerst die reciproken Potenzreihen mit einerlei Zeichen und verschiedenen Zunahmen. Da die Zunahme jede ganze Zahl bedeuten kann, so kann man für jede so viele in's Unendliche fortlaufende Reihen bilden, als die Zunahme Einheiten enthält, so dass die Summenausdrücke sämmtlicher so entstandener Reihen zusammen so gross sind, als der Summenausdruck der reciproken Reihe von der gleichen Potenz besagt, deren Zunahme die Einheit ist. Hiernach hat man für die Zunahme 2 folgende Zerlegung:

$$S(1,1)^p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \dots + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \dots,$$

also nach Nr. 12) §. 21.:

1)

$$S(1,1)^p = S(1,2)^p + S(2,2)^p = S(1,2)^p + \frac{1}{2^p} S(1,1)^p$$

oder

2)

$$S(1,2)^p = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) S(1,1)^p,$$

und man kann $S(1,2)^p$ durch $S(1,1)^p$ darstellen. Für die Zunahme 3 erhält man folgende Zerlegung:

$$S(1,1)^p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{10^p} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{8^p} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{3^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{9^p} + \ldots$$

Hieraus folgt:

3)

$$S(1,1)^p = S(1,3)^p + S(2,3)^p + \frac{1}{3^p} S(1,1)^p,$$

4)

$$(1 - \frac{1}{3^p}) S(1,1)^p = S(1,3)^p + S(2,3)^p.$$

Ist nun eine der Summen $S(1,3)^p$ oder $S(2,3)^p$ bekannt, so lässt sich hieraus die andere, und somit alle drei der Zunahme 3 zugehörigen Summen bestimmen; da die Werthe für $S(1,1)^p$ bis zur 40sten Potenz aus der oben angeführten Abhandlung bekannt sind. Für $p=2$ ist aus Nr. 4) und Nr. 5) §. 23.:

5)

$$S(1,3)^2 = (1 - \tfrac{1}{9}) S(1,1)^2 - S(2,3)^2 = 1{,}1217330139364\ldots,$$
$$S(3,3)^2 = 0{,}1827704518720251\ldots$$

Eben so erhält man aus Nr. 7) §. 23. und Nr. 3) dieses Paragraphen:

6)

$$S(1,3)^3 = (1 - \tfrac{1}{27}) S(1,1)^3 - S(2,3)^3 = 1{,}0207800444332\ldots,$$
$$S(3,3)^3 = 0{,}0445206260429\ldots$$

Für die Zunahme 4 ergibt sich folgende Zerlegung:

7)

$$S(1,1)^p = S(1,4)^p + S(2,4)^p + S(3,4)^p + S(4,4)^p$$
$$= S(1,4)^p + \frac{1}{2^p} S(1,2)^p + S(3,4)^p + \frac{1}{4^p} S(1,1)^p,$$

und hieraus mit Rücksicht auf Nr. 2):

8)

$$(1 - \frac{1}{2^p}) S(1,1)^p = S(1,4)^p + S(3,4)^p.$$

Es zeigt sich, dass alle vier hierher gehörigen Summen bestimmt werden können, wenn einer der Summenausdrücke $S(1,4)^p$, $S(3,4)^p$ bekannt ist.

Die Fortsetzung dieser Untersuchung führt zu folgendem Gesetze für die Zunahme k:

9)

$$S(1,1)^p = S(1,k)^p + S(2,k)^p + S(3,k)^p + \ldots S(k-1,k)^p + \frac{1}{k^p} S(1,1)^p.$$

Diese Gleichung zeigt, dass vorerst nur zwei Summen aus den übrigen $(k-2)$, beziehungsweise nur eine abzuleiten sind. So lange k eine Primzahl ist, bleibt dieser Satz in voller Geltung, wie diess bei der Zunahme 5, 7, ... der Fall ist. Ist aber k keine Primzahl, dann werden noch weitere Reductionen zu machen sein, namentlich dann, wenn schon Summen für kleinere Zunahmen bekannt sind. Diess wird sich an den Summen für die Zunahme 6 zeigen. Hiefür ist:

$$S(1,1)^p = S(1,6)^p + S(2,6)^p + S(3,6)^p + S(4,6)^p + S(5,6)^p + S(6,6)^p$$

$$= S(1,6)^p + \frac{1}{2^p} S(1,3)^p + \frac{1}{3^p} S(1,2)^p + \frac{1}{2^p} S(2,3)^p + S(5,6)^p$$

$$+ \frac{1}{6^p} S(1,1)^p.$$

Nun ist aus Nr. 2) und Nr. 4):

$$\frac{1}{3^p} S(1,2)^p = \frac{1}{3^p} S(1,1)^p - \frac{1}{6^p} S(1,1)^p,$$

$$\frac{1}{2^p}(S(1,3)^p + S(2,3)^p) = \frac{1}{2^p} S(1,1)^p - \frac{1}{6^p} S(1,1)^p.$$

Werden diese Werthe eingeführt und geordnet, so erhält man:

10)

$$\left(1 + \frac{1}{6^p} - \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p}\right) S(1,1)^p = S(1,6)^p + S(5,6)^p.$$

Ist einer der Werthe $S(1,6)^p$ oder $S(5,6)^p$ bekannt, so lässt sich hieraus der andere finden, und es sind beide bekannt. Nun ist:

11)

$$S(2,6)^p = \frac{1}{2^p} S(1,3)^p = \frac{1}{2^p}\left(1 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{10^p} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2^p} S(1,6)^p + \frac{1}{2^p} S(4,6)^p.$$

Wird nun dieser Werth in die oben angegebenen Gleichungen eingeführt und wird geordnet, so entsteht:

12)

$$(1-\frac{1}{3^p})\,S(1,1)^p=(1+\frac{1}{2^p})\,S(1,6)^p+S(5,6)^p+(1+\frac{1}{2^p})\,S(4,6)^p.$$

Hieraus kann $S(4,6)^p$ gefunden werden. Ist auch dieser Werth gefunden, so lässt sich aus Nr. 11) auch der von $S(2,6)^p$ finden. Es ist daher zur Bestimmung der zur Zunahme 6 gehörigen Summen ausser $S(1,1)^p$ nur die Auffindung eines der Werthe $S(1,6)^p$ oder $S(5,6)^p$ nöthig.

Diese Methode ist aber, wie man sieht, nicht für alle Fälle zureichend. Es wird daher sachgemäss sein, noch eine andere Methode anzugeben, welche die Darstellung dieser Summen mindestens auf die Hälfte der Arbeit reducirt und die zugleich den Vortheil der Controle gewährt. Sie ist folgende.

§. 25.

Geht man von der bekannten Doppelreihe

1)

$$M=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+k}+\frac{1}{m+2k}+\dots \qquad =\frac{\pi}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{Tg}\frac{m\pi}{k}}$$
$$-\left(\frac{1}{k-m}+\frac{1}{2k-m}+\frac{1}{3k-m}+\dots\right)$$

aus und differenzirt wiederholt nach m, so erhält man die verschiedenen Potenzen der beiden in Nr. 1) angegebenen Reihen nebst den dazu gehörigen Summenausdrücken, welche durch Differenziation des Ausdrucks auf der rechten Seite entstehen. Hiernach ist:

2)

$$\frac{\partial M}{\partial m}=-\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+k)^2}+\frac{1}{(m+2k)^2}+\dots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{(k-m)^2}+\frac{1}{(2k-m)^2}+\frac{1}{(3k-m)^2}+\dots\right)$$
$$=-S(m,k)^2-S(k-m,k)^2=-\frac{\pi^2}{k^2}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right)^2,$$

3)

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial m)^2}=1.2S(m,k)^3-1.2S(k-m,k)^3=\frac{2.\pi^3}{k^3}\frac{\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3},$$

4)

$$\frac{\partial^3 M}{(\partial m)^3}=-1.2.3S(m,k)^4-1.2.3S(k-m,k)^4$$

$$=-\frac{\pi^4}{k^4}\left[\frac{6}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})}-\frac{4}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

5)

$$\frac{\partial^4 M}{(\partial m)^4}=1^{4|1}S(m,k)^6-1^{4|1}S(k-m,k)^6$$

$$=\frac{\pi^5}{k^6}\left[\frac{24.\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5}-\frac{8\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}\right],$$

6)

$$\frac{\partial^6 M}{(\partial m)^6}=-1^{5|1}S(m,k)^6-1^{5|1}S(k-m,k)^6$$

$$=-\frac{\pi^6}{k^6}\left[\frac{120}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6}-\frac{120}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4}+\frac{16}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

7)

$$\frac{\partial^6 M}{(\partial m)^6}=1^{6|1}S(m,k)^7-1^{6|1}S(k-m,k)^7$$

$$=\frac{\pi^7}{k^7}\left[\frac{720\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^7}-\frac{480\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5}+\frac{32\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}\right],$$

8)

$$\frac{\partial^7 M}{(\partial m)^7}=-1^{7|1}S(m,k)^6-1^{7|1}S(k-m,k)^6$$

$$=-\frac{\pi^8}{k^6}\left[\frac{5040}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6}-\frac{6720}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6}+\frac{2016}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4}-\frac{64}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

9)

$$\frac{\partial^8 M}{(\partial m)^8} = 1^{8|1} S(m, k)^9 - 1^{8|1} S(k-m, k)^9$$

$$= \frac{\pi^9}{k^9}\left[\frac{40320 \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^9} - \frac{40320 \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^7} + \frac{8064 \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} - \frac{128 \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}\right]$$

u. s. w. Diese Gleichungen findet man, wenn man bei der Entwickelung der verschiedenen Differenziale $(\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k})^2 = 1 - (\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2$ schreibt, so oft $(\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k})^2$ erscheint, und dann die Differenziation fortsetzt. Geschieht diese Reduction nicht, so erhält man viel ausgedehntere Ausdrücke.

Nach den hier aufgestellten Gleichungen reducirt sich die Auffindung der Summenausdrücke auf die möglichst geringe Arbeit. Setzt man, um diess zu zeigen, $k=5$, $m=1, 2, 3, 4$ und $p=2$, so entsteht aus Nr. 2):

10)

$$S(1, 5)^2 + S(4, 5)^2 = \frac{\pi^2}{5^2(\operatorname{Sin}\frac{1}{5}\pi)^2} = \frac{2(5+\sqrt{5})\pi^2}{5^3},$$

$$S(2, 5)^2 + S(3, 5)^2 = \frac{\pi^2}{5^2(\operatorname{Sin}\frac{2}{5}\pi)^2} = \frac{2(5-\sqrt{5})\pi^2}{5^3},$$

da $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}$ und $\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$ ist.

Hiernach hat man nur zwei Werthe zu bestimmen, um die vier Summen $S(1,5)^2$, $S(2,5)^2$, $S(3,5)^2$, $S(4,5)^2$ zu erhalten, da $S(5,5)^2$ bekannt ist.

Ist $k=6$, $p=2$ und $m=1, 2 \ldots .$, so entsteht aus Nr. 2):

11)

$$S(1, 6)^2 + S(5, 6)^2 = \frac{\pi^2}{6^2(\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6})^2} = \frac{\pi^2}{9},$$

$$S(2, 6)^2 + S(4, 6)^2 = \frac{\pi^2}{6^2(\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3})^2} = \frac{\pi^2}{27}.$$

Da nach Nr. 11) §. 24.:

$$S(2, 6)^2 = \tfrac{1}{4} S(1, 6)^2 + \tfrac{1}{4} S(4, 6)^2$$

ist, so ergibt sich durch Einführung dieses Werthes:

12)

$$S(4, 6)^2 = \frac{4\pi^2}{5.27} - \tfrac{5}{4} S(1, 6)^2.$$

Ist daher $S(1, 6)^2$ bekannt, so lässt sich hieraus $S(5, 6)^2$, dann $S(4, 6)^2$ und $S(2, 6)^2$ finden. Die übrigen Werthe $S(6, 6)^2 = \frac{1}{36} S(1, 1)^2$ und $S(3, 6)^2 = \frac{1}{9} S(1, 2)^2$ sind bekannt.

Bei der hier gezeigten Methode ist jedoch zu bemerken, dass die verschiedenen Potenzen der reciproken Reihen nicht nach derselben Gleichung, wie diess bei der in §. 24. gezeigten der Fall ist, behandelt werden können. Für jede Potenz werden besondere Formeln entstehen. Die Entwicklungsweise bleibt aber die gleiche.

Man kann nun die gefundenen Gleichungen leicht zu weiteren Darstellungen benutzen. Setzt man $k = 2$, $m = 1$, so wird $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\pi = 1$ und $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\pi = 0$, und die Summen der ungeraden reciproken Potenzreihen gehen in 0 über, können also auf diesem Wege nicht bestimmt werden. Die beiden Reihen vereinigen sich aber in dem vorliegenden Falle in eine, und es entstehen die geraden Potenzreihen mit den ungeraden Zahlen. Hiernach ist:

13)

$$S(1, 2)^2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$S(1, 2)^4 = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96},$$

$$S(1, 2)^6 = 1 + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{960},$$

$$S(1, 2)^8 = 1 + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \ldots = \frac{17\pi^8}{32.5040},$$

u. s. w.

Da nach §. 24. Nr. 2)

$$S(1, 1)^p = \frac{1.2^p}{2^p - 1} S(1, 2)^p$$

ist, so erhält man hieraus und aus Nr. 13):

14)

$$S(1,1)^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$S(1,1)^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$S(1,1)^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945},$$

$$S(1,1)^8 = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \ldots = \frac{\pi^8}{9450},$$

u. s. w.

§. 26.

Bei Untersuchung der reciproken Reihen mit abwechselnden Zeichen hat man zwischen einer geraden und ungeraden Zunahme zu unterscheiden und die Bemerkung festzuhalten, dass alle Glieder, welche gerade Zahlen in der Reihe $S'(1,1)^p$ führen, das negative, und die, welche ungerade führen, das positive Zeichen haben. Für die Zunahme 2 hat man daher folgende Zerlegung:

$$S'(1,1)^p = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} - \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{7^p} + \ldots - \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \ldots\right),$$

woraus sich folgende Gleichung ableitet:

1)

$$S'(1,1)^p = S(1,2)^p - \frac{1}{2^p} S(1,1)^p.$$

Für die Zunahme 4 und 6 erhält man folgende Zerlegung:

2)

$$S'(1,1)^p = S(1,4)^p - S(2,4)^p + S(3,4)^p - \frac{1}{4^p} S(1,1)^p,$$

$$S'(1,1)^p = S(1,6)^p - S(2,6)^p + S(3,6)^p - S(4,6)^p + S(5,6)^p - \frac{1}{6^p} S(1,1)^p$$

u. s. w. Diess führt zu folgendem Gesetze für die Zunahme $2k$:

3)

$$S'(1,1)^p = S(1,2k)^p - S(2,2k)^p + S(3,2k)^p - \ldots$$
$$+ S(2k-1,2k)^p - \frac{1}{(2k)^p} S(1,1)^p.$$

Nach diesem Gesetze lassen sich die reciproken Potenzreihen mit abwechselnden Zeichen und geraden Zunahmen auf die mit einerlei Zeichen zurückführen. Ihre Auffindung unterliegt daher, da die von $S'(1, 1)^p$ bis zur 40sten Potenz bekannt sind, dem in dieser Gleichung ausgesprochenen Gesetze. Die Methode fällt daher mit der in §. 24. und §. 25. angegebenen zusammen.

Anders verhält es sich mit den Potenzreihen von ungerader Zunahme. Für die Zunahme 3 erhält man folgende Zerlegung:

$$S'(1, 1)^p = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \ldots = 1 - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{10^p} \ldots$$
$$- \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{5^p} + \frac{1}{8^p} - \frac{1}{10^p} + \ldots\right) + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{6^p} + \frac{1}{9^p} - \frac{4}{12^p} \ldots$$

Diess führt zu folgender Gleichung:

4)

$$S'(1, 1)^p = S'(1, 3)^p - S'(2, 3)^p + \frac{1}{3^p} S'(1, 1)^p.$$

In gleicher Weise erhält man:

5)

$$S'(1, 1)^p = S'(1, 5)^p - S'(2, 5)^p + S'(3, 5)^p - S'(4, 5)^p + \frac{1}{5^p} S'(1, 1)^p$$

u. s. w. Hiedurch wird man zu folgendem Gesetze geführt:

6)

$$S'(1, 1)^p = S'(1, 2k+1)^p - S'(2, 2k+1)^p + S'(3, 2k+1)^p - \ldots$$
$$- S'(2k, 2k+1)^p + \frac{1}{(2k+1)^p} S'(1, 1)^p.$$

Die Reihen mit abwechselnden Zeichen und ungeraden Zunahmen lassen sich daher nur in Reihen mit abwechselnden Zeichen nach dem vorstehenden Gesetze zerlegen. Die Methode kommt hiebei nach den in §. 23. gemachten Bemerkungen zur Anwendung. Es wird daher auch hier sachgemäss sein, noch eine andere Methode für die Entwickelung der Summen dieser Reihen anzugeben. Ehe diess jedoch geschieht, setzen wir noch einige Sätze über Ableitung der Summenausdrücke von Reihen mit höheren Zunahmen aus denen mit niederen her. Es ist:

$$S(1, k)^p = 1 + \frac{1}{(1+2k)^p} + \frac{1}{(1+4k)^p} + \ldots + \frac{1}{(1+k)^p} + \frac{1}{(1+3k)} + \frac{1}{(1+5k)^p} \ldots$$
$$= S(1, 2k)^p + S(1+k, 2k)^p,$$

denn $S(1, k)^p$ lässt sich in zwei Reihen zerlegen. Hieraus hat man:

7)

$$S(1, 2k)^p = S(1, k)^p - S(1+k, 2k)^p.$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$S'(1, k)^p = 1 + \frac{1}{(1+2k)^p} + \frac{1}{(1+4k)^p} + \frac{1}{(1+6k)^p} + \dots$$

$$-\left(\frac{1}{(1+k)^p} + \frac{1}{(1+3k)^p} + \frac{1}{(1+5k)^p} + \dots\right) = S(1, 2k)^p - S(1+k, 2k)^p,$$

und hieraus:

8)

$$S(1, 2k)^p = S'(1, k)^p + S(1+k, 2k)^p.$$

Durch Vereinigung von Nr. 7) und Nr. 8) entsteht:

9)

$$S(1, 2k)^p = \tfrac{1}{2}S(1, k)^p + \tfrac{1}{2}S'(1, k)^p.$$

Ist k ungerade, so erhält man aus Nr. 7) und Nr. 8):

10)

$$S(1, 4k+2)^p = S(1, 2k+1)^p - \frac{1}{2^p}S(k+1, 2k+1)^p,$$

11)

$$S(1, 4k+2)^p = S'(1, 2k+1) + \frac{1}{2^p}S(k+1, 2k+1)^p.$$

Diese Gleichungen fördern in Verbindung mit den bisher gezeigten Methoden die Auffindung der Summen der reciproken Potenzreihen sehr und dienen unter sich zur Controle. Setzt man $k=1$ in Nr. 10) und Nr. 11) und $k=3$ in Nr. 9), so hat man:

12)

$$S(1, 6)^p = S(1, 3)^p - \frac{1}{2^p}S(2, 3)^p,$$

$$S(1, 6)^p = S'(1, 3)^p + \frac{1}{2^p}S(2, 3)^p,$$

$$S(1, 6)^p = \tfrac{1}{2}S(1, 3)^p + \tfrac{1}{2}S'(1, 3)^p,$$

und man kann auf dreierlei Art $S(1, 6)^p$ aus den Summen für die Zunahme 3 ableiten. Eben so ist:



13)

$$S(1, 10)^p = S(1, 5)^p - \frac{1}{2^p} S(3, 5)^p,$$

$$S(1, 10)^p = S'(1, 5)^p + \frac{1}{2^p} S(3, 5)^p,$$

$$S(1, 10)^p = \tfrac{1}{2} S(1, 5)^p + \tfrac{1}{2} S'(1, 5)^p,$$

u. s. w.

§. 27.

Die im vorigen Paragraphen angedeutete Methode ist folgende. Legt man die Doppelreihe zu Grunde:

1)

$$N = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+2k} - \dots \qquad = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k}}$$

$$+ \frac{1}{k-m} - \frac{1}{2k-m} + \frac{1}{3k-m} - \dots$$

und differenzirt wiederholt nach m, so erhält man:

2)

$$\frac{\partial N}{\partial m} = -\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+k)^2} + \frac{1}{(m+2k)^2} - \dots \qquad = -\frac{\pi^2}{k} \cdot \frac{\operatorname{Cos} \frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k})^2}\right.$$

$$+ \frac{1}{(k-m)^2} - \frac{1}{(2k-m)^2} + \frac{1}{(3k-m)^2} - \dots$$

$$= - S'(m, k)^2 + S'(k-m, k)^2,$$

3)

$$\frac{\partial^2 N}{(\partial m)^2} = 1.2 S'(m, k)^3 + 1.2 S'(k-m, k)^3 = \frac{\pi^3}{k^3}\left[\frac{2}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

4)

$$\frac{\partial^3 N}{(\partial m)^3} = -1^{3|1} S'(m, k)^4 + 1^{3|1} S'(k-m, k)^4$$

$$= -\frac{\pi^4}{k^4} \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{6}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

5)

$$\frac{\partial^4 N}{(\partial m)^4} = 1^{4|1} S'(m, k)^5 + 1^{4|1} S'(k-m, k)^5$$

$$= \frac{\pi^5}{k^5}\left[\frac{24}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} - \frac{20}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^3} + \frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

6)

$$\frac{\partial^5 N}{(\partial m)^5} = -1^{5|1} S'(m, k)^6 + 1^{5|1} S'(k-m, k)^6$$

$$= -\frac{\pi^6}{k^6}\,\mathrm{Cos}\,\frac{m\pi}{k}\left[\frac{120}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^6} - \frac{60}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} + \frac{1}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

7)

$$\frac{\partial^6 N}{(\partial m)^6} = 1^{6|1} S'(m, k)^7 + 1^{6|1} S'(k-m, k)^7$$

$$= \frac{\pi^7}{k^7}\left[\frac{720}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^7} - \frac{840}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} + \frac{182}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

8)

$$\frac{\partial^7 N}{(\partial m)^7} = -1^{7|1} S'(m, k)^8 + 1^{7|1} S'(k-m, k)^8$$

$$= -\frac{\pi^8}{k^8}\,\mathrm{Cos}\,\frac{m\pi}{k}\left[\frac{5040}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^8} - \frac{4200}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^6} + \frac{546}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

u. s. w. Diese Differenziale entstehen, wenn man

$$(\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{k})^2 = 1 - (\mathrm{Sin}\frac{m\pi}{k})^2$$

schreibt, so oft $(\mathrm{Cos}\frac{m\pi}{k})^2$ erscheint.

Die Anwendung der hier aufgefundenen Darstellungen auf Summirung der reciproken Potenzreihen mit abwechselnden Zeichen geschieht auf die in §. 25. angegebene Weise und unterliegt keiner weitern Schwierigkeit. Das Auffinden der Summenausdrücke für eine bestimmte Zunahme wird auf die Hälfte der Arbeit reducirt. Setzt man $k=2$, $m=1$, so gehen die Summenausdrücke für die geraden Potenzen in 0 über, da $\mathrm{Cos}\frac{1}{2}\pi=0$ ist, und man findet nur die der ungeraden Potenzen. Hiernach erhält man:

13)

$$S(1,10)^p = S(1,5)^p - \frac{1}{2^p} S(3,5)^p,$$

$$S(1,10)^p = S'(1,5)^p + \frac{1}{2^p} S(3,5)^p,$$

$$S(1,10)^p = \tfrac{1}{2} S(1,5)^p + \tfrac{1}{2} S'(1,5)^p,$$

u. s. w.

§. 27.

Die im vorigen Paragraphen angedeutete Methode ist folgende. Legt man die Doppelreihe zu Grunde:

1)

$$N = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+2k} - \dots \qquad = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k}}$$

$$+ \frac{1}{k-m} - \frac{1}{2k-m} + \frac{1}{3k-m} - \dots$$

und differenzirt wiederholt nach m, so erhält man:

2)

$$\frac{\partial N}{\partial m} = -\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+k)^2} + \frac{1}{(m+2k)^2} - \dots \qquad = -\frac{\pi^2}{k} \cdot \frac{\operatorname{Cos} \frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k})^2}\right.$$

$$+ \frac{1}{(k-m)^2} - \frac{1}{(2k-m)^2} + \frac{1}{(3k-m)^2} - \dots$$

$$= - S'(m,k)^2 + S'(k-m,k)^2,$$

3)

$$\frac{\partial^2 N}{(\partial m)^2} = 1.2 S'(m,k)^3 + 1.2 S'(k-m,k)^3 = \frac{\pi^3}{k^3} \left[\frac{2}{(\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k}} \right],$$

4)

$$\frac{\partial^3 N}{(\partial m)^3} = - 1^{3|1} S'(m,k)^4 + 1^{3|1} S'(k-m,k)^4$$

$$= -\frac{\pi^4}{k^4} \operatorname{Cos} \frac{m\pi}{k} \left[\frac{6}{(\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\operatorname{Sin} \frac{m\pi}{k})^2} \right],$$

5)

$$\frac{\partial^4 N}{(\partial m)^4} = 1^{4|1} S'(m, k)^5 + 1^{4|1} S'(k-m, k)^5$$

$$= \frac{\pi^5}{k^5}\left[\frac{24}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} - \frac{20}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3} + \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

6)

$$\frac{\partial^5 N}{(\partial m)^5} = -1^{5|1} S'(m, k)^6 + 1^{5|1} S'(k-m, k)^6$$

$$= -\frac{\pi^6}{k^6}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{120}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6} - \frac{60}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} + \frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

7)

$$\frac{\partial^6 N}{(\partial m)^6} = 1^{6|1} S'(m, k)^7 + 1^{6|1} S'(k-m, k)^7$$

$$= \frac{\pi^7}{k^7}\left[\frac{720}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^7} - \frac{840}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} + \frac{182}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

8)

$$\frac{\partial^7 N}{(\partial m)^7} = -1^{7|1} S'(m, k)^8 + 1^{7|1} S'(k-m, k)^8$$

$$= -\frac{\pi^8}{k^8}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{5040}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^8} - \frac{4200}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6} + \frac{546}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} - \frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

u. s. w. Diese Differenziale entstehen, wenn man

$$(\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k})^2 = 1 - (\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2$$

schreibt, so oft $(\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k})^2$ erscheint.

Die Anwendung der hier aufgefundenen Darstellungen auf Summirung der reciproken Potenzreihen mit abwechselnden Zeichen geschieht auf die in §. 25. angegebene Weise und unterliegt keiner weitern Schwierigkeit. Das Auffinden der Summenausdrücke für eine bestimmte Zunahme wird auf die Hälfte der Arbeit reducirt. Setzt man $k=2$, $m=1$, so gehen die Summenausdrücke für die geraden Potenzen in 0 über, da $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi = 0$ ist, und man findet nur die der ungeraden Potenzen. Hiernach erhält man:

9)

$$S'(1,2) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$S'(1,2)^3 = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \dots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$S'(1,2)^5 = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} \dots = \frac{5.\pi^5}{1536},$$

$$S'(1,2)^7 = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} \dots = \frac{61\pi^7}{184320},$$

u. s. w.

Für den Zusammenhang der reciproken Potenzreihen mit abwechselnden und einerlei Zeichen bei der Zunahme 1 gilt folgende, sich leicht rechtfertigende Gleichung:

10)

$$S'(1,1)^p = (1 - \frac{1}{2^{p-1}}) S(1,1)^p.$$

Für die Ableitung weiterer Reihen aus den hier und früher Gefundenen gilt die Gleichung Nr. 9) §. 26., und man hat, wenn $k = 2$ gesetzt wird:

11)

$$S(1,4)^3 = 1 + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \dots = \frac{\pi^3}{64} + \tfrac{1}{2} S(1,2)^3,$$

$$S(1,4)^5 = 1 + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{9^5} + \dots = \frac{5\pi^5}{3072} + \tfrac{1}{2} S(1,2)^5,$$

u. s. w.

Hiebei kann man noch folgende Gleichung benutzen:

12)

$$S(1,2)^p = (1 - \frac{1}{2^p}) S(1,1)^p.$$

Wir stellen nun die Summen einiger Reihen, die später zur Anwendung kommen werden und die nach den angegebenen Methoden für verschiedene Zunahmen berechnet sind, hier zusammen:

13)

$S(1,2)^2 = 1{,}233\ 700\ 550\ 136\ 1698,$

$S(2,2)^2 = 0{,}411\ 233\ 516\ 712\ 0566,$

$S(1,2)^3 = 1{,}051\ 799\ 790\ 264\ 6451,$

$S(2,2)^3 = 0{,}150\ 257\ 112\ 894\ 9492,$

$S(1,3)^2 = 1{,}121\ 733\ 013\ 9364,$
$S(2,3)^2 = 0{,}340\ 430\ 601\ 0398,$
$S(3,3)^2 = 0{,}182\ 770\ 451\ 8720,$

$S(1,3)^3 = 1{,}020\ 780\ 044\ 4332,$
$S(2,3)^3 = 0{,}136\ 756\ 232\ 6834,$
$S(3,3)^3 = 0{,}044\ 520\ 626\ 0429,$

$S(1,4)^2 = 1{,}074\ 833\ 072\ 156,$
$S(2,4)^2 = 0{,}308\ 425\ 137\ 53404,$
$S(3,4)^2 = 0{,}158\ 867\ 477\ 980,$
$S(4,4)^2 = 0{,}102\ 808\ 379\ 17801,$

$S(1,4)^3 = 1{,}010\ 372\ 968\ 262\ 0071,$
$S(2,4)^3 = 0{,}131\ 474\ 973\ 783\ 0806,$
$S(3,4)^3 = 0{,}041\ 426\ 822\ 002\ 6380,$
$S(4,4)^3 = 0{,}018\ 782\ 139\ 111\ 8717,$

$S(1,6)^2 = 1{,}036\ 625\ 363\ 6765,$
$S(2,6)^2 = 0{,}280\ 433\ 253\ 4841,$
$S(3,6)^2 = 0{,}137\ 077\ 838\ 90401,$
$S(4,6)^2 = 0{,}085\ 107\ 650\ 2599,$
$S(5,5)^2 = 0{,}059\ 997\ 347\ 5556,$
$S(6,6)^2 = 0{,}045\ 692\ 612\ 968006,$

$S(1,6)^3 = 1{,}003\ 685\ 515\ 3478,$
$S(2,6)^3 = 0{,}127\ 597\ 505\ 5541,$
$S(3,6)^3 = 0{,}038\ 955\ 547\ 7875,$
$S(4,6)^3 = 0{,}017\ 094\ 529\ 0854,$
$S(5,6)^3 = 0{,}009\ 158\ 727\ 1294,$
$S(6,6)^3 = 0{,}005\ 565\ 078\ 2553,$

$S'(1,2)^2 = 0{,}915\ 965\ 594\ 176,$
$S'(2,2)^2 = 0{,}205\ 616\ 758\ 35602,$

$S'(1,2)^3 = 0{,}968\ 946\ 146\ 259\ 369\ 380 = \frac{\pi^3}{32},$
$S'(2,2)^3 = 0{,}112\ 692\ 834\ 671\ 2119,$

$S'(1,3)^2 = 0{,}951\ 517\ 713\ 4165,$
$S'(2,3)^2 = 0{,}220\ 435\ 905\ 9284,$
$S'(3,3)^3 = 0{,}091\ 385\ 225\ 9360,$

$$S'(1,3)^3 = 0{,}986\,590\,986\,2624,$$
$$S'(2,3)^3 = 0{,}118\,438\,778\,4250,$$
$$S'(3,3)^3 = 0{,}033\,390\,469\,53221,$$

u. s. w.

§. 28.

Die in §. 25. und §. 27. gefundenen Resultate dienen noch zu andern Anwendungen. Nimmt man das Integral

$$\int \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1-x^k}\partial x = \frac{x^m}{m}+\frac{x^{k+m}}{k+m}+\frac{x^{2k+m}}{2k+m}+\ldots\ldots$$
$$-\left(\frac{x^{k-m}}{k-m}+\frac{x^{2k-m}}{2k-m}+\frac{x^{3k-m}}{3k-m}+\ldots\ldots\right)$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 und bringt es mit No. 1) §. 25. in Verbindung, so erhält man:

1)

$$M=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1-x^k}\partial x = \frac{1}{m}+\frac{1}{m+k}+\frac{1}{m+2k}+\ldots\ldots = \frac{\pi}{k\operatorname{Tg}\frac{mk}{k}}$$
$$-\left(\frac{1}{k-m}+\frac{1}{2k-m}+\frac{1}{3k-m}\ldots\ldots\right).$$

Wird nun die Darstellung Nr. 1) nach m wiederholt differenzirt, so entsteht mit Rücksicht auf die in §. 25. gefundenen Werthe:

2)

$$\frac{\partial M}{\partial m}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{k-m-1}}{1-x^k}\lg x\partial x = -S(m,k)^2 - S(k-m,k)^2$$
$$= -\frac{\pi^2}{k^2}\cdot\frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2},$$

3)

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial m)^2}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1-x^k}(\lg x)^2\partial x = 1.2S(m,k)^3 - 1.2S(k-m,k)^3$$
$$= \frac{2\pi^3\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{k^3(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3},$$

4)

$$\frac{\partial^3 M}{(\partial m^3)} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^3 \partial x$$

$$= -1^{3|1} S(m,k)^4 - 1^{3|1} S(k-m,k)^4 = -\frac{\pi^4}{k^4}\left[\frac{6}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} - \frac{4}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

5)

$$\frac{\partial^4 M}{(\partial m)^4} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^4 \partial x$$

$$= 1^{4|1} S(m,k)^5 - 1^{4|1} S(k-m,k)^5$$

$$= \frac{\pi^5}{k^5} \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{24}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} - \frac{8}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}\right],$$

6)

$$\frac{\partial^5 M}{(\partial m)^5} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^5 \partial x$$

$$= -1^{5|1} S(m,k)^6 - 1^{5|1} S(k-m,k)^6$$

$$= -\frac{\pi^6}{k^6}\left[\frac{120}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6} - \frac{120}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} + \frac{16}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

7)

$$\frac{\partial^6 M}{(\partial m)^6} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^6 \partial x$$

$$= 1^{6|1} S(m,k)^7 - 1^{6|1} S(k-m,k)^7$$

$$= \frac{\pi^7}{k^7} \operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{720}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^7} - \frac{480}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5} + \frac{32}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}\right],$$

8)

$$\frac{\partial^7 M}{(\partial m)^7} = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{k-m-1}}{1-x^k} (\lg x)^7 \partial x$$

$$= -1^{7|1} S(m,k)^8 - 1^{7|1} S(k-m,k)^8$$

$$= -\frac{\pi^8}{k^8}\left[\frac{5040}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^8} - \frac{6720}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6} + \frac{2016}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4} - \frac{64}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

9)

$$\frac{\partial^8 M}{(\partial m)^8}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1-x^k}(\lg x)^8\,\partial x$$

$$=1^{8|1}S(m,k)^9-1^{8|1}S(k-m,k)^9$$

$$=\frac{\pi^9}{k^9}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{40320}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^9}-\frac{40320}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^7}+\frac{8064}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5}-\frac{128}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}\right],$$

u. s. w.

§. 29.

Nimmt man das Integral

$$\int \frac{x^{m-1}+x^{k-m-1}}{1+x^k}\partial x=\Sigma_0^x(-)^u\frac{x^{m+uk}}{m+uk}+\Sigma_0^x(-)^{u-1}\frac{x^{uk-m}}{uk-m}$$

zwischen den Grenzen 0 und 1, so erhält man mit Rücksicht auf Nr. 1) §. 27.:

1)

$$N=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{k-m-1}}{1+x^k}\partial x=S'(m,k)^1+S'(k-m,k)=\frac{\pi}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}.$$

Wird diese Gleichung wiederholt nach m differenziirt, so entsteht:

2)

$$\frac{\partial N}{\partial m}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1+x^k}\lg x\partial x=-S'(m,k)^2+S'(k-m,k)^2$$

$$=-\frac{\pi^2}{k^2}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2},$$

3)

$$\frac{\partial^2 N}{(\partial m)^2}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{k-m-1}}{1+x^k}(\lg x)^2\partial x=1.2(S'(m,k)^3+S'(k-m,k)^3)$$

$$=\frac{\pi^3}{k^3}\left[\frac{2}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

4)

$$\frac{\partial^3 N}{(\partial m)^3}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1+x^k}(\lg x)^3\partial x=-1^{3|1}(S'(m,k)^4-S'(k-m,k)^4)$$

$$=-\frac{\pi^4}{k^4}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{6}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4}-\frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

5)

$$\frac{\partial^4 N}{(\partial m)^4}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{k-m-1}}{1+x^k}(\lg x)^4 \partial x = 1^{4|1}(S'(m,k)^5+S'(k-m,k)^5)$$
$$=\frac{\pi^5}{k^5}\left[\frac{24}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5}-\frac{20}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

6)

$$\frac{\partial^5 N}{(\partial m)^5}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1+x^k}(\lg x)^5 \partial x = -1^{6|1}(S'(m,k)^6-S'(k-m,k)^6)$$
$$=-\frac{\pi^6}{k^6}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{120}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6}-\frac{60}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4}+\frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

7)

$$\frac{\partial^6 N}{(\partial m)^6}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{k-m-1}}{1+x^k}(\lg x)^6 \partial x = 1^{6|1}(S'(m,k)^7+S'(k-m,k)^7)$$
$$=\frac{\pi^7}{k^7}\left[\frac{720}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^7}-\frac{840}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^5}+\frac{182}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^3}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k}}\right],$$

8)

$$\frac{\partial^7 N}{(\partial m)^7}=\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{k-m-1}}{1+x^k}(\lg x)^7 \partial x = -1^{7|1}(S'(m,k)^8-S'(k-m,k)^8)$$
$$=-\frac{\pi^8}{k^8}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{k}\left[\frac{5040}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^8}-\frac{4200}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^6}+\frac{546}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^4}-\frac{1}{(\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{k})^2}\right],$$

u. s. w.

§. 30.

Setzt man nun $\frac{m}{k}=\frac{1}{2}$, so erhält man aus den Gleichungen §. 28., da die geraden Potenzen von $\lg x$ ausfallen, weil $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi=0$ ist, folgende Integrale:

1)

$$\int_0^1 \frac{\lg x \partial x}{1-x^2}=-\frac{\pi^2}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3 \partial x}{1-x^2}=-\frac{\pi^4}{16},$$
$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^5 \partial x}{1-x^2}=-\frac{\pi^6}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^7 \partial x}{1-x^2} = -\frac{17\pi^8}{32},$$

u. s. w.

Euler gibt $\int_0^1 \frac{(\lg x)^7 \partial x}{1-x^2} = \frac{79\pi^8}{32}$ a. a. O. an, was auf einem Versehen zu beruhen scheint. Aus §. 29. erhält man unter der nämlichen Voraussetzung folgende:

2)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^4 \partial x}{1+x^2} = \frac{5\pi^5}{64},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^6 \partial x}{1+x^2} = \frac{61\pi^7}{256},$$

u. s. w.

Setzt man $\frac{m}{k} = \frac{1}{3}$, so ergibt sich aus §. 28.:

3)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \lg x \partial x = -\frac{4\pi^2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{8\pi^3}{81.\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^3 \partial x}{1-x^3} = -\frac{16\pi^4}{3^5},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^4 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{32\pi^5}{3^5.\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^5 \partial x}{1-x^3} = -\frac{832\pi^6}{3^8},$$

u. s. w.

Aus §. 29. entsteht:

4)

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \lg x \partial x = -\frac{2\pi^2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{1-x+x^2} = \frac{10\pi^3}{3^4 . \sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)(\lg x)^3 \partial x}{1+x^3} = -\frac{14\pi^4}{3^5},$$

u. s. w.

Diese Darstellungen können beliebig fortgesetzt werden. Man erkennt jedoch aus dem hier Mitgetheilten, dass die Formeln, so interessante Aufschlüsse sie auch im Einzelnen geben, grosse Lücken lassen, und dass die meisten, in Frage kommenden Integrale nicht auf dem gegebenen Wege gefunden werden. Diess bestätigt sich noch mehr, wenn man $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$,.... statt $\frac{m}{k}$ setzt. Es entstehen dann noch grössere Lücken. Zur Entfernung dieser Schranke wird die nachfolgende allgemeinere Methode dienen.

(Fortsetzung in einem der nächsten Hefte.)

XX.

Elementare Beweise einiger Sätze, welche für die Lehre von den regelmässigen Polygonen von Wichtigkeit sind.

Von

Herrn Professor Dr. *Hessel*

in Marburg.

§. 1.

Aufgabe. In Taf. III. Fig. 1. sei $BEKL$ ein Rectangel, M sei sein Schwerpunkt, durch ihn seien die Linien AG und DQ parallel den betreffenden Seiten gelegt und $\alpha\gamma$ sei eine andere durch ihn gelegte gerade Linie, welche die Seiten BL und EK schneidet. Es ist gegeben $MA = MG = r$ und $MD = MQ = b$ und Winkel $\alpha MA = \varDelta$ oder dessen Tangente, so dass $\operatorname{tg} \varDelta = \tau$ ist; man soll den Abstand $ot = x$ von AG und den Abstand $ol = y$ von der x-Axe DQ bestimmen, wenn o der Schwerpunkt von $\alpha BE\gamma$ ist.

Auflösung. Man ziehe durch α die αe parallel mit BE, so wird der Flächeninhalt F von $\alpha BE\gamma$ in ein Rectangel $f = \alpha BEe$ und in ein Dreieck $\varphi = \alpha e\gamma$ zertheilt.

Es ist dann:

1) $$f = 2r.(b - r\,\mathrm{tg}\,\varDelta) = 2r.b - 2r^2.\tau,$$

und

2) $$\varphi = \tfrac{1}{2}(2r.2r\,\mathrm{tg}\,\varDelta) = 2r^2\mathrm{tg}\,\varDelta = 2r^2.\tau.$$

Dabei haben die Abstände des Schwerpunktes σ für f von der y-Axe und von der x-Axe die Werthe:

3) $$\xi_1 = \sigma M = A\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha B = r\,\mathrm{tg}\,\varDelta + \tfrac{1}{2}(b - r\,\mathrm{tg}\,\varDelta) = \tfrac{1}{2}(b + r\tau),$$

4) $$\psi_1 = 0;$$

und die Abstände des Schwerpunktes i des Dreiecks φ von den genannten Axen die Werthe:

5) $$\xi_2 = iq = \tfrac{1}{3}A\alpha = \tfrac{1}{3}r.\mathrm{tg}\,\varDelta = \tfrac{1}{3}r.\tau,$$

6) $$\psi_2 = iv = \tfrac{1}{3}MG = \tfrac{1}{3}r.$$

Nach den elementaren Gesetzen der Statik hat man aber für die betreffenden statischen Momente die Gleichungen:

7) $$(f + \varphi).x = f.\xi_1 + \varphi.\xi_2,$$

8) $$(f + \varphi).y = f.\psi_1 + \varphi.\psi_2.$$

Setzen wir in diesen zwei Gleichungen, statt der darin vorkommenden Grössen, ihre bereits gefundenen Werthe, so ist die Aufgabe gelöst. Wir erhalten dabei die Gleichungen:

9) $$x = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{6}\frac{r^2}{b}.\tau^2,$$

10) $$y = \tfrac{1}{3}\frac{r^2}{b}.\tau.$$ *)

§. 2.

Aufgabe. In einem Kreise vom Mittelpunkt M und vom Radius R (Taf. III. Fig. 2.) ist ein regelmässiges $2n$seitiges Po-

*) Dass diese Gleichungen, durch Elimination von τ, zu einer Gleichung zwischen x und y führen, aus der man sofort erkennt, dass, während das äussere Ende α des Strahles $M\alpha$ sich von L bis B bewegt, das äussere Ende o des Strahles Mo eine Parabel beschreibt, deren Scheitel in der x-Axe MD liegt, mag hier bloss erwähnt werden. Vergleiche die Abhandlung „Ueber gewisse statische und mechanische Eigenschaften der Raumgebilde, welche einen Schwerpunkt haben. Von Hessel. Marburg. 1862.“

lygon beschrieben, BL und EK sind zwei parallele Seiten desselben; DQ ist der, diesen Seiten parallele, AG der zu ihnen senkrechte (sie halbirende) Durchmesser, dessen Länge $2r = 2R\cos\frac{360^0}{4n} = 2R\cos a$ ist; $\alpha\gamma = H$ ist ein anderer Durchmesser des Polygons, welcher die erwähnten Seiten schneidet; r, n (also a) und Winkel $\alpha MA = \Delta$, mithin $\operatorname{tg}\Delta = \tau$, sind gegeben, man soll für den Schwerpunkt o der in $\alpha BDE\gamma$ liegenden Hälfte des Polygons, sie heisse F, die Abstände $ot = x$ und $ol = y$ desselben von den betreffenden Coordinatenaxen AG beziehungsweise DQ finden. Auch soll dann der Abstand des Schwerpunktes o von der Theilungslinie $\alpha\gamma$ für jeden Werth von Δ, der $\overline{\overline{>}}\ 0$ und $\overline{\overline{<}}\ a$ ist, insbesondere aber für jene beiden Fälle bestimmt werden, in welchen die Theilungslinie $\alpha\gamma$ entweder mit dem kleinsten Durchmesser $AG = 2r$, oder mit dem grössten Durchmesser BK zusammenfällt. Ausserdem aber soll für jene Fälle, in denen $\Delta > 0$ und $< a$ ist, der Abstand des Schwerpunktes o der berücksichtigten Polygonhälfte von demjenigen Durchmesser h bestimmt werden, der zu dem theilenden Durchmesser $\alpha\gamma$ senkrecht ist.

Auflösung. Man ziehe BE, so wird F zertheilt in das Paralleltrapez $\alpha BE\gamma = \varphi$ und in den Theil, welcher in BDE liegt, den wir $= f$ setzen wollen.

Es ist dabei:

1) $$\varphi = ABEG = 2r.r\operatorname{tg}a = 2r^2\operatorname{tg}a,$$

2) $$f = F - \varphi = 2n.\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{tg}a - 2r^2\operatorname{tg}a = (n-2)r^2\operatorname{tg}a.$$

Es hat dabei der Schwerpunkt σ von f einen Abstand ξ_1 von der y-Axe, dessen Werth ist:

$$\xi_1 = \sigma M,$$

und einen Abstand ψ_1 von der x-Axe, dessen Werth ist:

$$\psi_1 = 0 = \text{Null}.$$

Ebenso aber hat auch der Schwerpunkt i von φ seine Abstände $\xi_2 = iq$ und $\psi_2 = iv$ von den Coordinatenaxen AG und DQ.

Beachten wir, dass b in der vorigen Aufgabe $= AB$, also hier $= r\operatorname{tg}a$, und dass x und y in der vorigen Aufgabe hier $= \xi_2$ beziehungsweise $= \psi_2$ sind, so haben wir sofort:

1) $$\xi_2 = \tfrac{1}{2}r\operatorname{tg}a - \tfrac{1}{6}\frac{r^2}{r.\operatorname{tg}a}.\tau^2$$
$$= \tfrac{1}{6}r\left(\frac{3\operatorname{tg}a^2 - \tau^2}{\operatorname{tg}a}\right),$$

2) $$\psi_2 = \frac{1}{3}\frac{r^2}{r\,\mathrm{tg}\,a}\tau = \tfrac{1}{3}r.\cot a.\tau.$$

Nehmen wir nun vorerst ξ_1 als bekannt an, so würden (nach den bereits von uns benutzten Lehren der Statik) die Gleichungen gelten:

3) $$(f+\varphi)x = f.\xi_1 + \varphi.\xi_2,$$

4) $$(f+\varphi)y = f.\psi_1 + \varphi.\psi_2 = \varphi.\psi_2;$$

und auch in diesen beiden Gleichungen ausser x und y lauter bekannte Grössen vorhanden sein.

Beachten wir, dass

$$f+\varphi = (n-2)r^2\mathrm{tg}\,a + 2r^2\mathrm{tg}\,a = nr^2\mathrm{tg}\,a$$

ist, so haben wir aus 3) und 4) die Gleichungen:

$$nr^2\mathrm{tg}\,a.x = (n-2)r^2\mathrm{tg}\,a.\xi_1 + 2r^2\mathrm{tg}\,a\left[\tfrac{1}{3}r\left(\frac{3\,\mathrm{tg}\,a^2-\tau^2}{\mathrm{tg}\,a}\right)\right],$$

also:

5) $$nx = (n-2)\xi_1 + \tfrac{2}{3}r\left(\frac{3\,\mathrm{tg}\,a^2-\tau^2}{\mathrm{tg}\,a}\right),$$

und:

$$nr^2\mathrm{tg}\,a.y = 2r^2\mathrm{tg}\,a.(\tfrac{1}{3}r\cot a.\tau),$$

6) $$n.y = \tfrac{2}{3}r\cot a.\tau.$$

Berücksichtigen wir nun, dass der Schwerpunkt o von F zwar nicht bei jeder Lage, welche der das Polygon theilende Durchmesser $\alpha\gamma$ annehmen kann, in einem zu ihm senkrechten Radius MoS liegt, dass diess aber, wegen der regelmässigen Beschaffenheit des Polygons, dann der Fall ist, wenn $\alpha\gamma$ die Lage eines kleinsten Durchmessers wie AG, oder die Lage eines grössten Durchmessers, wie BK, hat, und dass, wenn $\alpha\gamma$ mit BK zusammenfällt, der Winkel $oMD = a$ ist, so dass für diesen speciellen Fall, wenn wir für ihn $ot = x_1$ und $ol = y_1$ und $\tau = \mathrm{tg}\,a$ setzen:

7) $$y_1 = x_1.\mathrm{tg}\,oMD = x_1.\mathrm{tg}\,a$$

und (gemäss 6) auch:

8) $$y_1 = \frac{2}{3n}r.\cot a.\mathrm{tg}\,a = \frac{2}{3n}r,$$

also:

9) $$x_1 = \frac{2}{3n}r\frac{1}{\mathrm{tg}\,a} = \frac{2}{3n}r.\cot a$$

ist, so können wir, wenn wir in 5) statt τ den Werth $\tau = \operatorname{tg} a$ und statt x den Werth $x_1 = \frac{2r}{3n} \cdot \cot a$ setzen, sofort ξ_1 finden. Es ist nämlich dann:

$$n \cdot \frac{2r}{3n} \cot a = (n-2)\xi_1 + \tfrac{1}{3}r \cdot \frac{3 \operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg} a^2}{\operatorname{tg} a},$$

also:

10) $$\xi_1 = \frac{2r}{3(n-2)}(\cot a - \operatorname{tg} a).$$

Man hat daher aus 5) und 10):

11) $$x = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2r}{3(n-2)}(\cot a - \operatorname{tg} a) + \frac{r}{3n} \cdot \frac{3 \operatorname{tg} a^2 - \tau^2}{\operatorname{tg} a},$$

so dass für jeden Werth von τ, der $\overline{\geqq}\, 0$ und $\overline{\leqq} \operatorname{tg} a$ ist, die Werthe von x und y gemäss 11) und 6) bestimmt sind durch die zwei Gleichungen:

12) $$\begin{cases} x = \frac{2r}{3n}\left[(\cot a + \frac{1}{2} \operatorname{tg} a) - \frac{1}{2} \cot a . \tau^2\right], \\ y = \frac{2r}{3n} \cdot \cot a . \tau. \end{cases}$$

Drücken wir hier $\cot a$ aus durch $\frac{1}{\operatorname{tg} a}$, so haben wir nach leichter Reduction:

12,I) $$\begin{cases} x = \frac{r}{3n . \operatorname{tg} a}[2 + \operatorname{tg} a^2 - \tau^2], \\ y = \frac{r}{3n . \operatorname{tg} a} . 2\tau . \end{cases}$$

Es ist hierdurch der eine Theil der Aufgabe gelöst. Um nun aber auch den Abstand des Punktes o von der Theilungslinie $\alpha\gamma$ allgemein gültig zu bestimmen, haben wir, wenn wir ihn mit z bezeichnen, sofort aus Taf. III. Fig. 2. den Werth:

$$z = Mo . \sin oM\gamma = Mo . \sin(oMt + tM\gamma),$$

also, wenn wir den Winkel oMt mit w bezeichnen und beachten, dass $tM\gamma = \varDelta$ ist:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}(\sin w . \cos \varDelta + \cos w . \sin \varDelta)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} . \cos \varDelta + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} . \sin \varDelta\right),$$

$$z = x.\cos\Delta + y.\sin\Delta = (x + y\,\mathrm{tg}\,\Delta)\cos\Delta$$

$$= (x + y.\tau)\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

$$= \frac{r}{3n\,\mathrm{tg}\,a}(2 + \mathrm{tg}\,a^2 - \tau^2 + 2\tau^2)\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

13)

$$z = \frac{r}{3n\,\mathrm{tg}\,a}(2 + \mathrm{tg}\,a^2 + \tau^2)\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \frac{r}{3n}\left(\frac{2 + \mathrm{tg}\,a^2 + \tau^2}{\mathrm{tg}\,a}\right)\cos\Delta.$$

Es ist dieses der gesuchte, für jeden der oben angegebenen Werthe von τ gültige Werth von z.

Um nun insbesondere jene beiden Werthe von z zu finden, welche den Fällen entsprechen, in denen $\alpha\gamma$ entweder mit AG oder mit BK zusammenfällt, so setzen wir für den ersteren dieser beiden Werthe, welcher z_1 heissen möge, $\tau = 0$ und erhalten:

13,I) $$z_1 = \frac{r}{3n\,\mathrm{tg}\,a}(2 + \mathrm{tg}\,a^2) = \frac{2r}{3n}(\cot a + \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,a),$$

und für den anderen, welchen wir mit z_2 bezeichnen wollen, $\tau = \mathrm{tg}\,a$, so ist:

$$z_2 = \frac{2r(1 + \mathrm{tg}\,a^2)}{3n\,\mathrm{tg}\,a}\cos a,$$

13,II) $$z_2 = \frac{2r}{3n}\cdot\frac{\cos a}{\sin a\cos a} = \frac{2r}{3n}\cdot\frac{1}{\sin a} = \frac{2r}{3n}\,\mathrm{cosec}\,a.$$

Bezeichnen wir nun den Abstand des Schwerpunktes o von dem zur Theilungslinie $\alpha\gamma$ senkrechten Durchmesser h mit ϱ, so ist:

$$\varrho = Mo.\cos oM\gamma = Mo.\cos(w + \Delta) = Mo.(\cos w\cos\Delta - \sin w\sin\Delta),$$

also:

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\Delta - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Delta\right)$$

$$= y\cos\Delta - x\sin\Delta = (y - x\,\mathrm{tg}\,\Delta)\cos\Delta$$

$$= (y - x\tau)\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \frac{r}{3n\,\mathrm{tg}\,a}.(2\tau - (2\tau + \mathrm{tg}\,a^2.\tau - \tau^3)),$$

14)
$$\begin{cases} \varrho = -\frac{r}{3n\,\mathrm{tg}\,a}\cdot(\mathrm{tg}\,a^2-\tau^2)\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}, \\ \varrho = -\frac{r}{3n\,\mathrm{tg}\,a}(\mathrm{tg}\,a^2-\mathrm{tg}\,\varDelta^2)\sin\varDelta\,^{*)}. \end{cases}$$

§. 3.

Aufgabe. Ein regelmässiges Polygon von gerader Seitenzahl $2n$ **) ist durch seine n Eckdurchmesser in $2n$ gleichschenklige Dreiecke D_1, D_2, $D_3 \ldots. D_{2n}$ getheilt und von einer beliebigen geraden Linie H, z. B. mittelst des Durchmessers $\alpha\gamma$, so durchschnitten, dass dabei die Dreiecke D_1 und D_{n+1} durchschnitten werden; es ist insbesondere dadurch das Dreieck $D_1 = E_{2n}CE_1$ so getheilt, dass Winkel $E_1C\gamma \overline{\gtrless} E_{2n}C\gamma$ ist; man soll, wenn der kleinste Durchmesser AG des Polygons $= 2r$ und der Winkel $\gamma CG = \varDelta$, also $\mathrm{tg}\,\varDelta = \tau$, und die Zahl n, also auch der Winkel $GCE_1 = GCE_{2n} = \frac{360^0}{4n} = a$ gegeben ist, von den Schwerpunkten o_1, o_2, $o_3 \ldots. o_n$ der Dreiecke D_1, D_2, $D_3 \ldots. D_n$ Perpendikel fällen, einerseits auf die Theilungslinie H, das heisst auf $\alpha\gamma$, und andererseits auf eine zu $\alpha\gamma$ senkrechte Durchschnittslinie h, und die arithmetische Summe

$$\Sigma_{1H} = p_1 + p_2 + p_3 \ldots. + p_n$$

jener Perpendikel nnd auch die algebraische Snmme

$$\Sigma_{2h} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 \ldots. + \mathfrak{p}_n$$

dieser Perpendikel bestimmen, wenn unter der algebraischen Summe der letzteren eine solche Summe verstanden wird, bei welcher die entgegengesetzt gerichteten Perpendikel auch mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung kommen.

I. **Auflösnng des ersten Theiles der Aufgabe.** Bezeichnen wir das Dreieck γCE_1 mit d_1 und das Dreieck $\alpha CE_n = \gamma CE_{2n}$ mit d_{n+1} und, wenn $\alpha\gamma$ die Umdrehungsaxe ist,

*) Der Umstand, dass ϱ einen negativen Werth hat, giebt an, dass der Winkel $oM\gamma$ in Taf. III. Fig. 2., obgleich er kleiner ist, als der Winkel $DM\gamma$, doch, so lange $\varDelta > 0$ und $< a$ ist, stets grösser als ein rechter Winkel ist. Die Figur 2. stellt ihn, aus leicht ersichtlichen Gründen, als einen spitzigen Winkel dar.

**) Vergl. Taf. III. Fig. 3, wo $n = 5$, also $2n = 10$ ist.

die statischen Momente für die Dreiecke d_1, D_2, D_3, $D_4 \ldots\ldots D_n$, d_{n+1} mit $\mathfrak{M}_1$, M_2, M_3, $M_4 \ldots\ldots M_n$, $\mathfrak{M}_{n+1}$, und das statische Moment für das halbe Polygon $\gamma E_1 E_2 E_3 \ldots\ldots E_n \alpha$ mit m, so ist:

$$1) \qquad m = \mathfrak{M}_1 + M_2 + M_3 + M_4 \ldots\ldots + M_n + \mathfrak{M}_{n+1},$$

so dass, wenn wir setzen:

$$2) \qquad m = (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{n+1}) + \sigma,$$

die Grösse σ den Werth

$$3) \qquad \sigma = M_2 + M_3 + M_4 \ldots\ldots + M_n$$

hat.

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt eines der Dreiecke D_1, D_2, $D_3 \ldots\ldots$ mit D, so ist:

$$4) \qquad D = r^2 . \operatorname{tg} a,$$

also nach Nr. 13) in der vorigen Aufgabe:

$$m = n . D . z = (n . r^2 . \operatorname{tg} a) . \left[\frac{r}{3n \operatorname{tg} a}(2 + \operatorname{tg} a^2 + \tau^2) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right],$$

$$5) \qquad m = \tfrac{1}{3} r^3 . (2 + \operatorname{tg} a^2 + \operatorname{tg} \Delta^2) \cos \Delta.$$

Es ist aber dann auch:

$$\sigma = r^2 . \operatorname{tg} a (p_2 + p_3 + p_4 \ldots\ldots + p_n),$$

$$6) \qquad \sigma = r^2 . \operatorname{tg} a [\Sigma_1 - p_1];$$

folglich, gemäss 2):

$$m = (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{n+1}) + r^2 \operatorname{tg} a [\Sigma_1 - p_1],$$

mithin:

$$7) \qquad \Sigma_{1H} = p_1 + \frac{m - (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{n+1})}{r^2 . \operatorname{tg} a}.$$

Man hat daher die Werthe von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_{n+1}$ zu bestimmen.

Bedeutet nun $E_1 C E_{2n}$ in Taf. III. Fig. 4. ein solches Dreieck wie $E_1 C E_{2n}$ in Taf. III. Fig. 3 und ist $C\gamma$ die Theilungslinie, so ist in Taf. III. Fig. 4. das Dreieck $E_1 C\gamma = d_1$ und das Dreieck $E_{2n} C\gamma = d_{n+1}$, und man findet für die Inhalte dieser zwei Dreiecke die Werthe:

$$8) \qquad d_1 = \tfrac{1}{2} r^2 (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \Delta),$$

$$9) \qquad d_{n+1} = \tfrac{1}{2} r^2 (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \Delta).$$

Macht man nun $Co = \frac{2}{3} CG = \frac{2}{3} r$ und zieht man durch o die $e_1 e_{2n}$ parallel mit $E_1 E_{2n}$, so schneidet sich die $e_1 e_{2n}$ mit $C\gamma$ in einem Punkte i. Wird dann jeder der beiden Theile ie_1, ie_{2n} halbirt, so sind die Halbirungspunkte t und l die Schwerpunkte von $E_1 C\gamma$ beziehungsweise von $E_{2n} C\gamma$, und es ist:

10) $$it = \tfrac{1}{2} ie_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} E_1 \gamma = \tfrac{1}{3} r(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \Delta).$$

11) $$il = \tfrac{1}{2} ie_{2n} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} E_{2n} \gamma = \tfrac{1}{3} r(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \Delta).$$

Fällt man dann von t und von l aus die Perpendikel tk beziehungsweise lq auf die Theilungslinie $C\gamma$, so ist, weil die rechtwinkligen Dreiecke tik, liq, cio einander und dem Dreieck $C\gamma G$ ähnlich sind, dessen Winkel bei C den Werth Δ hat:

12) $$tk = it . \cos \Delta = \tfrac{1}{3} r(\operatorname{tg} a + \tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

13) $$lq = il . \cos \Delta = \tfrac{1}{3} r(\operatorname{tg} a - \tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Es sind daher die statischen Momente der Dreiecke $E_1 C\gamma$ und $E_{2n} C\gamma$, welche der Umdrehungsaxe entsprechen (die in $\alpha\gamma$ liegt), bestimmt durch:

$$\mathfrak{M}_1 = d_1 . tk = \tfrac{1}{2} r^2 (\operatorname{tg} a + \tau) . \tfrac{1}{3} r(\operatorname{tg} a + \tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

14) $$\mathfrak{M}_1 = \tfrac{1}{6} r^3 (\operatorname{tg} a + \tau)^2 . \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

und ebenso:

15) $$\mathfrak{M}_{n+1} = \tfrac{1}{6} r^3 (\operatorname{tg} a - \tau)^2 . \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Man hat daher:

16) $$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{n+1} = \tfrac{1}{3} r^3 (\operatorname{tg} a^2 + \tau^2) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Setzt man die Werthe m (aus 5)) und $(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{n+1})$ (aus 16)) in die Gleichung 7), so erhält man:

$$\Sigma_{1H} = p_1 + \frac{r}{3 \operatorname{tg} a} [(2 + \operatorname{tg} a^2 + \tau^2) - (\operatorname{tg} a^2 + \tau^2)] \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

mithin, weil auch $p_1 = \frac{2}{3} r . \sin \Delta = \frac{2}{3} r \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$ (siehe Taf. III. Fig.3):

17) $$\Sigma_{1H} = \frac{2r}{3\sqrt{1+\tau^2}}(\tau + \cot a) = \tfrac{2}{3} r(\cot a + \operatorname{tg}\Delta)\cos\Delta.$$

Beachtet man, dass diese Gleichung dasselbe sagt, wie die Gleichung

$$\Sigma_{1H} = \tfrac{2}{3} r\left(\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}\right)\cos\Delta,$$

d. h. wie

$$\Sigma_{1H} = \tfrac{2}{3} r \frac{\cos a\cos\Delta + \sin a\sin\Delta}{\sin a},$$

so kann man sie auch ausdrücken durch:

18) $$\Sigma_{1H} = \tfrac{2}{3} r\left(\frac{1}{\sin a}\right)\cos(a-\Delta) = \tfrac{2}{3} r \operatorname{cosec} a . \cos(a-\Delta).$$

II) **Auflösung des zweiten Theiles der Aufgabe.** Es ist hierdurch der eine Theil der Aufgabe gelöst. Um aber auch den anderen zu lösen, bezeichnen wir, wenn der zu $\alpha\gamma$ senkrechte Durchmesser des Polygons die Umdrehungsaxe ist, mit $\mathfrak{M}'_1$, M'_2, M'_3, $M'_4 \ldots\ldots M'_n$, $\mathfrak{M}'_{n+1}$ die statischen Momente der Dreiecke

$$d_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4 \ldots\ldots D_n,\ d_{n+1}$$

und mit m' das statische Moment für das halbe Polygon $\gamma E_1 E_2 E_3 \ldots\ldots E_n \alpha$, so ist:

$$m' = \mathfrak{M}'_1 + M'_2 + M'_3 + M'_4 \ldots\ldots + M'_n - \mathfrak{M}'_{n+1},$$

und, weil nach Nr. 13) in der vorigen Aufgabe

$$\varrho = -\frac{r}{3n\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg}\Delta^2)\sin\Delta$$

war, und:

$$m' = n . D . \varrho$$

ist, auch:

$$m' = -(nr^2 \operatorname{tg} a) . \frac{r}{3n\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg}\Delta^2)\sin\Delta,$$

also:

5,I) $$m' = -\tfrac{1}{3} r^3 . (\operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg}\Delta^2)\sin\Delta.$$

Bezeichnen wir dann ferner mit σ' die Summe

$$\sigma' = M'_2 + M'_3 + M'_4 \ldots\ldots + M'_n,$$

so ist:

$$m' = (\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}'_{n+1}) + \sigma',$$

und es ist dann (analog der Gleichung 6):

$$\sigma' = r^2 \operatorname{tg} a\,(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{P}_4 \ldots . + \mathfrak{P}_n),$$

6,I) $$\sigma' = r^2 \operatorname{tg} a\,[\Sigma_{2h} - \mathfrak{P}_1],$$

mithin (analog der Gleichung 7):

7,I) $$\Sigma_{2h} = \mathfrak{P}_1 + \frac{m' - (\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}'_{n+1})}{r^2 . \operatorname{tg} a}.$$

Es ist aber hier:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}'_1 &= d_1 . CK, \\ \mathfrak{M}'_{n+1} &= d_{n+1} . Cq; \end{aligned}\right\}$$ (siehe Taf. III. Fig. 4.),

aber:

$$CK = Ci - Ki,$$

$$CK = \tfrac{2}{3} r . \frac{1}{\cos \Delta} - it \sin \Delta$$ (vergl. Nr. 12).

Es ist also:

$$CK = \tfrac{1}{3} r \left(2\sqrt{1+\tau^2} - (\operatorname{tg} a + \tau)\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\right) = \tfrac{1}{3} r \left(\frac{2 + 2\tau^2 - \tau . \operatorname{tg} a - \tau^2}{\sqrt{1+\tau^2}}\right),$$

12,I) $$CK = \tfrac{1}{3} r (2 - (\operatorname{tg} a - \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}};$$

und ebenso:

$$Cq = \tfrac{2}{3} r \frac{1}{\cos \Delta} + il \sin \Delta = \tfrac{1}{3} r \left(2\sqrt{1+\tau^2} + (\operatorname{tg} a - \tau)\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\right),$$

13,I)

$$Cq = \tfrac{1}{3} r (2 + \tau^2 + \tau \operatorname{tg} a) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \tfrac{1}{3} r (2 + (\operatorname{tg} a + \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}};$$

folglich:

$$\mathfrak{M}'_1 = \tfrac{1}{2} r^2 (\operatorname{tg} a + \tau) . \tfrac{1}{3} r (2 - (\operatorname{tg} a - \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

14,I) $$\mathfrak{M}'_1 = \tfrac{1}{6} r^3 (2(\operatorname{tg} a + \tau) - \tau(\operatorname{tg} a^2 - \tau^2)) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

und

$$\mathfrak{M}'_{n+1} = \tfrac{1}{2} r^2 (\operatorname{tg} a - \tau) . \tfrac{1}{3} (2 + (\operatorname{tg} a + \tau)\tau) \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}};$$

also:

15,I) $$\mathfrak{M}'_{n+1} = \tfrac{1}{6} r^3 [2(\operatorname{tg} a - \tau) + \tau(\operatorname{tg} a^2 - \tau^2)] \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

mithin:

16,I) $$\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}'_{n+1} = \tfrac{1}{6} r^3 [2 - (\operatorname{tg} a^2 - \tau^2)] \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$$
$$= \tfrac{1}{6} r^3 [2 - (\operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg} \varDelta^2)] \sin \varDelta.$$

Es ist daher:

$$m' - (\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}'_{n+1}) = \tfrac{1}{6} r^3 . \sin \varDelta [-(\operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg} \varDelta^2) - (2 - (\operatorname{tg} a^2 - \operatorname{tg} \varDelta^2))]$$
$$= -\tfrac{2}{3} r^3 \sin \varDelta.$$

Da nun $\mathfrak{P}_1 = \tfrac{2}{3} r \cos \varDelta$ und $\Sigma_{2h} = \mathfrak{P}_1 + \left(\frac{-\frac{2}{3} r^3 \sin \varDelta}{r^2 \operatorname{tg} a}\right)$ (vergleiche 7,I), so ist:

17,I) $$\Sigma_{2h} = \tfrac{2}{3} r(\cos \varDelta - \frac{\sin \varDelta}{\operatorname{tg} a}) = \tfrac{2}{3} r(\cot \varDelta - \cot a) \sin \varDelta.$$

Es ist also auch:

$$\Sigma_{2h} = \tfrac{2}{3} r \left(\frac{\cos \varDelta}{\sin \varDelta} - \frac{\cos a}{\sin a}\right) \sin \varDelta = \tfrac{2}{3} r \frac{\sin(a - \varDelta)}{\sin a},$$

folglich:

18,I) $$\Sigma_{2h} = \tfrac{2}{3} r \operatorname{cosec} a . \sin(a - \varDelta).$$

Es ist dabei zu beachten, dass für $\varDelta = a$ beide Formeln 17,I) und 18,I) den Werth $\Sigma_{2h} = 0$ geben, dass aber, für $\varDelta = 0$, die Gleichung 17,I) übergeht in

$$\Sigma_{2h} = \tfrac{2}{3} r(\cot 0 - \cot a) . \sin 0 = \infty . 0,$$

während die Gleichung 18,I) übergeht in

$$\Sigma_{2h} = \tfrac{2}{3} r \operatorname{cosec} a . \sin(a - 0) = \tfrac{2}{3} r \frac{\sin a}{\sin a},$$

das heisst in

$$\Sigma_{2h} = \tfrac{2}{3} r.$$

Soll aber auch für $\varDelta = 0$ das Zeichen Σ_{2h} die Bedeutung der algebraischen Summe:

$$\Sigma_{2h} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n = \Sigma_{2h}(n)$$

haben und setzen wir die algebraischen Summen:

$$(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n) + \mathfrak{P}_{n+1} = \Sigma_{2h}(n+1),$$
$$(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{P}_4 + \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n = \Sigma_{2h}(n-1);$$

so sehen wir leicht ein (vergleiche Taf. III. Fig. 6,I. und Fig. 7,I.), dass, wenn $\mathfrak{P}_1 = +\frac{2}{3}r (= Co_1)$ ist, auch $\mathfrak{P}_{n+1} = -\frac{2}{3}r (= Co_{n+1})$ ist, und dass

$$\Sigma_{2h}(n+1) = \Sigma_{2h}(n-)1 = 0,$$

also:

$$\Sigma_{2h} = \Sigma_{2hn} = \Sigma_{2h}(n-1) + \mathfrak{P}_1 = 0 + \tfrac{2}{3}r = \tfrac{2}{3}r\ ^{*)}$$

ist.

Man hat hier also, für $\varDelta = 0$, besonders zu beachten die Werthe:

$$\Sigma_{2h}(n \pm 1) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma_{2h} = \Sigma_{2h}(n) = \tfrac{2}{3}r.$$

§. 4.

Bedeutung der im vorstehenden Paragraphen enthaltenen Formeln 17) und 18); 17,I) und 18,I). Construiren wir in einem Kreise vom Radius $\mathfrak{R} = \frac{2}{3}r$ ein regelmässiges $2n$seitiges Polygon, theilen es mittelst eines solchen Durchmessers H, der mit einem seiner Eckdurchmesser Winkel $= \varDelta$ bildet, die $\overline{\overline{>}}\, 0$ und $\overline{\overline{<}}\, \frac{1}{2}\left(\frac{360}{2n}\right)^0$ d. h. $\leqq a$ sind, und fällen wir in der einen der so entstandenen Hälften, von den Eckpunkten derselben aus, die Perpendikel auf den Durchmesser H, so haben diese die Werthe $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$, und ihre Abstände vom Mittelpunkte haben die Werthe $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3 \ldots\ldots \mathfrak{P}_n$, und es ist die arithmetische Summe

$$p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots + p_n = \Sigma_{1H} = \mathfrak{R}.(\cot a + \operatorname{tg}\varDelta)\cos\varDelta = \mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\cos(a - \varDelta),$$

und, für $\varDelta > 0$ und $\overline{\overline{<}}\, a$, die algebraische Summe:

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n = \Sigma_{2h} = \mathfrak{R}.(\cot\varDelta - \cot a)\sin\varDelta = \mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\sin(a - \varDelta).$$

(Vergleiche Taf. III. Fig. 9. mit Rücksicht auf Taf. III. Fig. 3.)

Für $\varDelta = 0$ ist die algebraische Summe:

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n = \mathfrak{R},$$

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n + \mathfrak{P}_{n+1} = 0.$$

Ist daher in Taf. III. Fig. 5. die $C\gamma_1 = \mathfrak{R}$ und $\angle gC\gamma_1 = \varDelta$

---

*) Ebenso ist:

$$\Sigma_{2h} = \Sigma_{2h}(n) = \Sigma_{2h}(n+1) - \mathfrak{P}_{n+1} = 0 - (-\tfrac{2}{3}r) = \tfrac{2}{3}r.$$

und $Cg = \mathfrak{R}.\cos\varDelta = \mathfrak{r}_1$, und $\angle N_1 Cg = 90^0 - a$, so ist, weil $\angle N_1 C\gamma_1 = N_1 Cg + gC\gamma_1$ und $N_1 g\gamma_1$ senkrecht zu Cg ist, auch

$$N_1\gamma_1 = \mathfrak{r}_1(\cot a + \operatorname{tg}\varDelta) = \mathfrak{R}.\cos\varDelta(\cot a + \operatorname{tg}\varDelta) = \Sigma_{1H}.$$

Es ist dann aber auch $g\gamma_1 = \mathfrak{R}.\sin\varDelta = \mathfrak{r}_2$ und $Cg = g\gamma_1.\operatorname{tg} g\gamma_1 C = \mathfrak{r}_2.\cot\varDelta$. Zieht man daher $\gamma_1 m$ parallel CN, so ist $\angle gm\gamma_1 = \angle gCN = a$, also $\angle g\gamma_1 m = 90^0 - a$, und daher

$$gm = \mathfrak{r}_2.\operatorname{tg} g\gamma_1 m = \mathfrak{r}_2 \cot a,$$

mithin:

$$Cm = Cg - gm = \mathfrak{r}_2(\cot\varDelta - \cot a) = \Sigma_{2h}.$$

Ist ferner in Taf. III. Fig. 8. die $Cl = \mathfrak{R}$ und die $CK = \mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a = \varrho$ und es ist in dem Kreise vom Radius ϱ der Centriwinkel $\gamma_1 CN = gCN - gC\gamma_1 = a - \varDelta$, und man hat $\gamma_1 \nu$ senkrecht zu CN gezogen, so ist:

$$C\nu = \varrho.\cos(a-\varDelta) = \mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\cos(a-\varDelta) = \Sigma_{1H},$$

und

$$\nu\gamma_1 = \varrho.\sin(a-\varDelta) = \mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\sin(a-\varDelta),$$

also, falls $\varDelta > 0$ und $\overline{\overline{<}}\, a$ ist:

$$\nu\gamma_1 = \Sigma_{2h}.$$

§. 5.

Sätze, die aus vorstehender Untersuchung sich ergeben.

I) Ist in einem Kreise vom beliebigen Radius $\mathfrak{R}$ ein regelmässiges $2n$seitiges Polygon $\varPhi$ beschrieben und mittelst eines **beliebigen** Durchmessers H so halbirt, dass dieser Durchmesser mit dem nächstnachbarlichen **Eckdurchmesser** Winkel $= \varDelta$ bildet, die > 0 und $< \frac{1}{2}\left(\frac{360}{2n}\right)^0$ d. h. $< a$ sind, so ist

I) die arithmetische Summe Σ_{1H} der, aus den Eckpunkten der einen Hälfte von $\varPhi$ auf den theilenden Durchmesser H möglichen Perpendikel sowohl **erstens:** gleich der Summe der in einem Hülfskreise vom Radius $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{R}.\cos\varDelta$ construirten Tangentenlinien der beiden Winkel $(90^0 - a)$ und $\varDelta$

I,1) $\Sigma_{1H} = (\mathfrak{R}\cos\varDelta)(\cot a + \operatorname{tg}\varDelta)$,

als auch zweitens: gleich der in einem Hülfskreise vom Radius $\varrho = \mathfrak{R}\operatorname{cosec} a$ construirten Cosinuslinie des Winkels $(a - \varDelta)$;

I,2) $\Sigma_{1H} = (\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a).\cos(a - \varDelta)$.

II) Die algebraische Summe Σ_{2h} der, aus den Eckpunkten der einen Hälfte von Φ auf den, zu dem halbirenden Durchmesser H **senkrechten** Radius sowohl **erstens**: gleich der Differenz der, in einem Hülfskreise vom Radius $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{R}.\sin\varDelta$ construirten Tangentenlinien der Winkel $(90 - \varDelta)$ und $(90 - a)$;

II,1) $\Sigma_{2h} = (\mathfrak{R}.\sin\varDelta)(\cot\varDelta - \cot a)$,

als auch zweitens: gleich der, in einem Hülfskreise vom Radius $\varrho = \mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a$ construirten **Sinuslinie** des Winkels $(a - \varDelta)$;

II,2) $\Sigma_{2h} = (\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a).\sin(a - \varDelta)$.

2) Ist irgend ein regelmässiges $2n$ seitiges Polygon Φ vom Eckradius $= \mathfrak{R}$ mittelst eines grössten Durchmessers H halbirt, so ist die arithmetische Summe der Abstände der Eckpunkte, in je einer der zwei Hälften des Polygons Φ, von dem theilenden Durchmesser H gleich der dem Radius entsprechenden Cotangentenlinie des halben Centriwinkels (vergl. Taf. III. Fig. 7, I), und die algebraische Summe der Abstände dieser Ecken von dem zu der Theilungslinie H senkrechten Durchmesser h, wenn bei jeder der beiden Hälften von Φ nur einer der beiden in H liegenden Eckpunkte von Φ berücksichtigt wird, gleich dem Radius;

wenn aber beide in H liegenden Eckpunkte bei jeder der beiden Hälften von Φ berücksichtigt werden sollen, gleich Null.

Das heisst es ist bei $\varDelta = 0$:

$$\text{III)}\quad \begin{cases} \Sigma_{1H} = \mathfrak{R}.\cot a, \\ \Sigma_{2h} = \Sigma_{2h}(n) = \mathfrak{R}, \\ \Sigma_{2h}(n+1) = 0. \end{cases}$$

3) Ist ein regelmässiges $2n$ seitiges Polygon Φ vom Eckradius $= \mathfrak{R}$ mittelst eines kleinsten Durchmessers H

halbirt, so ist die arithmetische Summe der Abstände der Eckpunkte in je einer der beiden Hälften des Polygons Φ von dem theilenden Durchmesser H gleich der dem Radius $\mathfrak{R}$ entsprechenden **Consecantenlinie** des halben Centriwinkels (vergleiche Taf. III. Fig. 7,2), und die algebraische Summe der Abstände dieser Eckpunkte von dem zur Theilungslinie H senkrechten Durchmesser h ist dann $=$ Null. Das heisst bei $\varDelta = a$ ist:

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} \Sigma_{1H} = \mathfrak{R} . \operatorname{cosec} a, \\ \Sigma_{2h} = 0. \end{cases}$$

§. 6.

Vergleichung zweier zu einander senkrechten Durchmesser H und h des $2n$seitigen Polygons in fraglicher Beziehung.

Ist ein regelmässiges $2n$seitiges Polygon Φ vom Eckradius $\mathfrak{R}$ mittelst zweier zu einander senkrechter Durchmesser H und h durchschnitten und hat H dabei eine solche beliebige Lage in Φ, bei welcher H mit dem nächsten Eckdurchmesser Winkel $\varDelta$ bildet, die $\overset{>}{=} 0$ und $\overset{=}{<} \frac{1}{2}\left(\frac{360}{2n}\right)^{\circ}$ d. h. $\overset{=}{<} a$ sind, so hat der Winkel, den der Durchmesser h mit je einem der beiden ihm nächstnachbarlichen Eckradien von Φ bildet:

1) falls n eine gerade Zahl $=2\nu$ ist, einen Werth, der $=\varDelta$ ist.

2) falls aber n eine ungerade Zahl $=2\nu+1$ ist, einen Werth δ, so dass:

$$\delta = a - \varDelta$$

und $\overset{=}{>} 0$ und $\overset{=}{<} a$ ist. (Vergl. Taf. III. Fig. 9.)

Es sei daher, um den zweiten dieser beiden Fälle näher zu betrachten, das mittelst der zwei zu einander senkrechten Durchmesser H und h in 4 Quadranten (quadrantenartige Theile) zertheilte Polygon Φ vom Eckradius $\mathfrak{R}$ ein solches regelmässiges Polygon $o_1 o_2 o_3 \ldots . \; o_{4\nu+2}$, dessen Seitenzahl $2n$ das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $= 2(2\nu+1)$ ist (vergl. Taf. III. Fig. 9.). Wir wollen diejenigen 2 Ecken, welche dem Durchmesser H zunächst liegen, als die mit o_1 und $o_{2\nu+1}$ bezeichneten betrachten, und der Allgemeinheit wegen annehmen, dass ihr Abstand von H,

d. h. $\mathfrak{R}\sin\Delta$, **grösser als Null** sei, und dass der Winkel Δ kleiner als $\frac{1}{2}\left(\frac{360}{2n}\right)^{0}$ d. h. $<\alpha$ sei, und denjenigen Quadranten den

1sten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten

nennen, in welchem die Ecken

$$o_1, \quad o_{2\nu+1}, \; o_{2\nu+2}, \; o_{4\nu+1}$$

liegt.

Es seien dann in dem Polygon Φ zwei andere Polygone dargestellt, deren jedes die **ungerade Seitenzahl** $2\nu+1$ und den Eckradius $\mathfrak{R}$ hat; das eine sei $o_1 o_3 o_5 \ldots. \; o_{4\nu+1} = f_1$ und das andere $o_2 o_4 o_6 \ldots. \; o_{4\nu+2} = f_2$.

Man bezeichne dann die Werthe der arithmetischen Summen der sämmtlichen Perpendikel, welche aus den Eckpunkten gefällt werden können,

		im 1sten,	2ten,	3ten,	4ten Quadranten
auf H	in f_1 mit	V_1,	X_1,	Y_1,	Z_1,
	in f_2 mit	Y_2,	Z_2,	X_2,	V_2,
auf h	in f_1 mit	v_1,	x_1,	y_1,	z_1,
	in f_2 mit	y_2,	z_2,	x_2,	v_2, *)

was wir uns durch folgende zwei Schemata (in denen die Ordnungszahlen weggelassen sind) versinnlichen können:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{H} \\ X+Z & Y+V \\ \hline V+Y & Z+X \\ \multicolumn{2}{c}{H} \end{array} \qquad h \; \begin{array}{c|c} x+z & y+v \\ \hline v+y & z+x \end{array} \; h$$

Diess vorausgeschickt, so sind, den vorstehenden Lehren gemäss, für das $2(2\nu+1)$seitige Polygon Φ folgende Gleichungen gültig:

---

*) Es versteht sich dabei von selbst, dass hier

$$V_1 = V_2; \quad X_1 = X_2; \quad Y_1 = Y_2; \quad Z_1 = Z_2$$

und

$$v_1 = v_2; \quad x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2; \quad z_1 = z_2$$

ist, so dass die Ordnungszahlen (1, 2) nur dazu dienen, auf das berücksichtigte Polygon f_1 beziehungsweise f_2, mithin auch auf den berücksichtigten Quadranten hinzuweisen.

$$\left.\begin{aligned}(V_1+Y_2)+(X_1+Z_2) &= (\mathfrak{H}.\cos\Delta).(\cot a+\operatorname{tg}\Delta)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\cos(a-\Delta)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\cos\delta\end{aligned}\right\} = \Sigma_{1H},$$

$$\left.\begin{aligned}(v_1+y_2)-(x_1+z_2) &= (\mathfrak{H}.\sin\Delta).(\cot\Delta-\cot a)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\sin(a-\Delta)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\sin\delta\end{aligned}\right\}. = \Sigma_{2h}.$$

Es folgen daraus, wenn h statt H, und δ statt Δ (und umgekehrt) gesetzt wird, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(v_2+y_1)+(z_1+x_2) &= (\mathfrak{H}.\cos\delta).(\cot a+\operatorname{tg}\delta)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\cos(a-\delta)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\cos\Delta\end{aligned}\right\} = \Sigma_{1h},$$

$$\left.\begin{aligned}(V_2+Y_1)-(Z_2+X_1) &= (\mathfrak{H}.\sin\delta).(\cot\delta-\cot a)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\sin(a-\delta)\\ &= (\mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a).\sin\delta\end{aligned}\right\} = \Sigma_{2H}\text{*}).$$

§. 7.

Aufgabe. Man soll, unter Beibehaltung der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen, auch für das regelmässige Polygon f_1, dessen Seitenzahl ungerade ($=2\nu+1$) ist, die Werthe:

$$V_1+X_1 = S_{1H} \quad \text{und} \quad v_1-x_1 = S_{2h}$$

bestimmen, und auch die analogen Werthe:

$$x_1+y_1 = S_{1h} \quad \text{und} \quad X_1-Y_1 = S_{2H}$$

angeben.

Auflösung. Denken wir uns, es habe jeder der Eckpunkte o_1, o_3, o_5.... $o_{4\nu+1}$ des an sich nicht schweren Polygons f_1 (siehe Taf. III. Fig. 9.) das Gewicht g, so ist, wenn H die Umdrehungsaxe ist und für jeden Werth von m durch p_m das Perpendikel von o_m auf H bezeichnet wird, als Gleichung der statischen Momente gültig die Gleichung:

$$g(p_1+p_3+p_5\ldots.+p_{2\nu+1}) = g(p_{2\nu+3}+p_{2\nu+5}+p_{2\nu+7}\ldots.+p_{4\nu+1}),$$

*) Man kann aus diesen vier Gleichungen auch folgende Gleichungen ableiten:

$$(V_1+Y_2) = \tfrac{1}{2}(\Sigma_{1H}+\Sigma_{2H}), \qquad (v_1+y_2) = \tfrac{1}{2}(\Sigma_{1h}+\Sigma_{2h}),$$
$$(X_1+Z_2) = \tfrac{1}{2}(\Sigma_{1H}-\Sigma_{2H}), \qquad (x_1+z_2) = \tfrac{1}{2}(\Sigma_{1h}-\Sigma_{2h}),$$

oder:

$$p_1 + p_3 + p_5 \ldots + p_{2v+1} = p_{2v+3} + p_{2v+5} + p_{2v+7} \ldots + p_{4v+1}.$$

Da aber (vergl. Taf. III. Fig. 9.) $p_{2v+3} = p_2$ und $p_{2v+5} = p_4$ u. s. w., so ist auch:

$$p_{2v+3} + p_{2v+5} + p_{2v+7} \ldots + p_{4v+1} = p_2 + p_4 + p_6 \ldots + p_{2v}.$$

Es ist also auch:

$$p_1 + p_3 + p_5 \ldots + p_{2v+1} = p_2 + p_4 + p_6 \ldots + p_{2v},$$

mithin jede dieser beiden Summen $= \frac{1}{2} \Sigma_{1H}$, so dass

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2} \Sigma_{1H}.$$

Es ist daher:

$$V_1 + X_1 = Y_1 + Z_1 = S_{1H} = \tfrac{1}{2} \Sigma_{1H},$$

mithin:

I) $$S_{1H} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R} . \operatorname{cosec} a) . \cos(a - \Delta).$$

Ebenso ist:

$$x_1 + y_1 = v_1 + z_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma_{1h},$$

also:

II) $$S_{1h} = \tfrac{1}{2} \Sigma_{1h} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{R} . \operatorname{cosec} a . \cos(a - \delta) = \tfrac{1}{2} \mathfrak{R} . \operatorname{cosec} a . \cos \Delta.$$

Da nun aber auch demgemäss:

$$(x_1 + y_1) - (v_1 + z_1) = 0,$$

und auch, wie bereits oben gezeigt ist,

$$(v_1 + y_2) - (x_1 + z_2) = \Sigma_{2h},$$

so folgt durch Subtraction dieser beiden Gleichungen:

$$2(v_1 - x_1) = \Sigma_{2h},$$

und durch Addition:

$$2(y_1 - z_1) = \Sigma_{2h},$$

so dass

$$v_1 - x_1 = y_1 - z_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma_{2h}; \quad v_1 - y_1 = X_1 - Z_1,$$

also:

III) $$S_{2h} = \tfrac{1}{2} \Sigma_{2h} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{R} . \operatorname{cosec} a . \sin \delta = \tfrac{1}{2} \mathfrak{R} . \operatorname{cosec} a . \sin(a - \Delta).$$

Ebenso ist:

$$X_1 - Y_1 = Z_1 - V_1 = \tfrac{1}{4}\Sigma_{2H},$$

also:

IV) $S_{2H} = \tfrac{1}{2}\Sigma_{2H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\sin(a-\delta) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\sin\Delta.$

Ist daher in einem Kreise ein regelmässiges Polygon f_1 von ungerader Seitenzahl $(2\nu+1)$ und ein anderes Φ von doppelt so grosser Seitenzahl $2(2\nu+1)$ concentrisch so dargestellt, dass die abwechselnden Eckpunkte von diesem zugleich auch die Eckpunkte von jenem sind, und es sind beide Polygone mittelst eines und desselben beliebigen Durchmessers H des Kreises getheilt, so ist

die **arithmetische** Summe der Abstände der Eckpunkte von dem **theilenden Durchmesser** H in beiden Theilen von f_1 **gleich gross** und **halb so gross** als in je einem der beiden Theile des Polygons Φ; und

die **algebraische** Summe der Abstände der Eckpunkte von dem, zum **theilenden Durchmesser** H **senkrechten Durchmesser** h in beiden Theilen von f_1 **gleich gross** und in jedem **halb so gross** als in je einem der beiden Theile von Φ.

Hat daher der Winkel Δ, den der theilende Durchmesser H mit dem nächstnachbarlichen gemeinschaftlichen Eckradius (Co_1) macht, den Werth $\Delta \overset{=}{>} 0$ und $\overset{=}{<} \tfrac{1}{2}\frac{360^0}{2(2\nu+1)}$ d. h. $\overset{=}{<} a$, und ist der Eckradius $=\mathfrak{R}$, so hat jene arithmetische Summe den Werth:

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2}\Sigma_{1H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\cos(a-\Delta),$$

und die erwähnte algebraische Summe den Werth:

$$S_{2h} = \tfrac{1}{2}\Sigma_{2h} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a.\sin(a-\Delta).$$

Ist $\Delta = a$, das heisst, ist der theilende Durchmesser H zu einem das Polygon f_1 symmetrisch theilenden Durchmesser senkrecht, so wird jene arithmetische Summe zu

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}.\operatorname{cosec} a,$$

und die berücksichtigte algebraische Summe zu

$$S_{2h} = 0.$$

Ist $\Delta = 0$, d. h. ist der theilende Durchmesser H selbst ein symmetrisch theilender Durchmesser für f_1, so geht die in Rede stehende arithmetische Summe über in

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.\cot a,$$

und die berücksichtigte algebraische Summe in

$$S_{2h} = S_{2h}(\nu + 1) = \tfrac{1}{2}\Sigma_{2h}(2\nu + 1) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.$$

Es ist daher z. B. bei einem gleichseitigen Dreieck f_1, wo $a = 30^0$, also $\sin a = \frac{1}{2}$; $\cos a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cot a = \sqrt{3}$ und $\operatorname{cosec} a = 2$ ist, bei $\varDelta > 0$ und $< a$:

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.2.\cos(a - \varDelta) = \mathfrak{M}.\cos(30^0 - \varDelta) = \mathfrak{M}.(\cos\varDelta.\sqrt{\tfrac{3}{4}} + \tfrac{1}{2}\sin\varDelta),$$

$$S_{2h} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.2.\sin(a - \varDelta) = \mathfrak{M}.\sin(30^0 - \varDelta) = \mathfrak{M}.(\tfrac{1}{2}\cos\varDelta - \sin\varDelta.\sqrt{\tfrac{3}{4}}).$$

Bei $\varDelta = a$, d. h. wenn der theilende Durchmesser H senkrecht zu einem symmetrisch theilenden Durchmesser ist:

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.\operatorname{cosec} 30^0 = \mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{M},$$

$$S_{2h} = 0;$$

bei $\varDelta = 0$, d. h. wenn H ein symmetrisch theilender Durchmesser ist:

$$S_{1H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.\cot 30^0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\sqrt{3} = \mathfrak{M}\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \mathfrak{M}.\sin 60^0,$$

$$S_{2h} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} = \mathfrak{M} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}.$$

§. 8.

Sonstige Beweise der in Rede stehenden Sätze. Man kann natürlich die hier auf **elementarem** Wege bewiesenen Sätze, dass für $a = \frac{1}{2}\left(\frac{360}{2\nu}\right)^0$ und für $\varDelta \overline{\gtrless} 0$ und $\overline{\lessgtr}\, a$ die Gleichungen bestehen:

$$\sin\varDelta + \sin(\varDelta + 2a) + \sin(\varDelta + 4a) + \sin(\varDelta + 6a) \ldots + \sin(\varDelta + (2\nu - 1)2a)$$
$$= \operatorname{cosec} a.\cos(a - \varDelta),$$

$$\cos\varDelta + \cos(\varDelta + 2a) + \cos(\varDelta + 4a) + \cos(\varDelta + 6a) \ldots + \cos(\varDelta + (2\nu - 1)2a)$$
$$= \operatorname{cosec} a.\sin(a - \varDelta);$$

$$\sin\varDelta + \sin(\varDelta + 4a) + \sin(\varDelta + 8a) \ldots + \sin(\varDelta + \nu.4a) = \tfrac{1}{2}\operatorname{cosec} a.\cos(a - \varDelta),$$

$$\cos\varDelta + \cos(\varDelta + 4a) + \cos(\varDelta + 8a) \ldots + \cos(\varDelta + \nu.4a) = \tfrac{1}{2}\operatorname{cosec} a.\sin(a - \varDelta);$$

und die sonstigen daraus folgenden Sätze (von denen hier nur einige angedeutet worden sind) auch aus den betreffenden allgemeineren Sätzen:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) \ldots + \sin[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta . \sin[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\sin\frac{1}{2}\beta},$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+3\beta) \ldots + \cos[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta . \cos[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

ableiten, welche in den Lehrbüchern der Analysis, z. B. in den „Vorlesungen über höhere Mathematik von Ettingshausen (Wien 1827)“ im ersten Bande Seite 125, Nr. 110. bewiesen werden.

Der interessanteste und noch dazu höchst elementare Beweis der beiden Fundamentalsätze, auf die es hier ankommt, scheint mir aber der folgende zu sein.

Es sei ein regelmässiges $2n$ seitiges Polygon $f = o_1 o_2 o_3 \ldots o_{2n}$ (siehe Taf. III. Fig. 9.), dessen Eckradius $= \mathfrak{R}$ und dessen Mittelpunkt C ist, mittelst zweier beliebiger, zu einander senkrechter Durchmesser H_1 und h_1 durchschnitten, so dass H_1 mit dem Eckradius Co_1 den beliebigen Winkel $\varDelta \overset{=}{>} 0$ und $\overset{=}{<} \frac{1}{2}\left(\frac{360}{2n}\right)^0$ d. h. $\overset{=}{<} a$ bildet. In ihm seien von den Eckpunkten $o_1, o_2, o_3 \ldots o_n$ einerseits die Perpendikel $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ auf H und andererseits die Perpendikel $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3 \ldots \mathfrak{P}_n$ auf h gefällt. Man construire ein anderes regelmässiges $2n$ seitiges Polygon F so, dass dessen Seiten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_{2n}$ der Ordnung nach parallel den Eckradien $Co_1, Co_2, Co_3 \ldots Co_{2n}$ in f sind und die Länge $\sigma = \mathfrak{R}$ haben, ziehe in F zwei zu einander senkrechte Durchmesser H_1 und h_1 parallel mit H beziehungsweise mit h, projicire dann die Seiten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n$ (durch Fällung von Perpendikeln aus den Endpunkten derselben auf den betreffenden Durchmesser) das eine Mal auf den Durchmesser h_1 und das andere Mal auf den Durchmesser H_1. Bezeichnet man dann für die Seiten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n$ die so entstehenden Projectionen, welche in h_1 liegen, mit $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$, welche in H_1 liegen, mit $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_n$, und den Eckradius in F mit R, so ist allgemein:

$$q_m = \sigma_m . \cos(90^0 - (\varDelta + [m-1] . 2a]) = \sigma . \sin(\varDelta + (m-1) . 2a)$$
$$= \mathfrak{R} . \sin(\varDelta + (m-1) . 2a),$$

also:

$$q_m = p_m,$$

d. h.

$$q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n = p_1 + p_2 + p_3 \ldots + p_n,$$

und

$$Q_m = \sigma_m . \cos(\varDelta + (m-1)2a) = \mathfrak{R} . \cos(\varDelta + (m-1).2a),$$

also:

$$Q_m = \mathfrak{P}_m,$$

d. h. es ist die algebraische Summe:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 \ldots Q_n = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots + \mathfrak{P}_n.$$

Es sind dabei die in h_1 liegenden Projectionen so zu einer geraden Linie Σ_{1H} verbunden, dass diese ihre arithmetische Summe $q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n$ darstellt, und man sieht dann aus der Construction sofort, dass

$$\Sigma_{1H} = R\cos(a - \varDelta) + R\cos(a - \varDelta) = 2R\cos(a - \varDelta)$$

ist.

Ebenso aber bilden auch die in H_1 entstandenen Projectionen eine solche Zusammenstellung, in welcher man sofort ihre algebraische Summe

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 \ldots + Q_n = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \ldots + \mathfrak{P}_n$$

in Form einer begrenzten geraden Linie Σ_{2h} erkennen kann, und man ersieht aus der Construction sofort, dass

$$\Sigma_{2h} = R\sin(a - \varDelta) + R\sin(a - \varDelta) = 2R\sin(a - \varDelta)$$

ist.

Wäre nämlich das Polygon $o_1 o_2 o_3 \ldots o_{10}$, Taf. III. Fig. 9., abgesehen von seiner bisherigen Bedeutung, das Polygon F für einen Fall, in welchem dessen Seitenzahl $= 10$ ist, und wären $o_6 o_5$, $o_5 o_4$, $o_4 o_3$, $o_3 o_2$, $o_2 o_1$ der Ordnung nach die Seiten σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, so würde die arithmetische Summe der Projectionen dieser Seiten auf den beliebigen Durchmesser $\alpha\gamma$, wenn dieser die Seite σ, ohne dass sie verlängert ist, schneidet, gleich sein der Summe $CG.\cos FC\gamma + CA.\cos AC\alpha$ und die algebraische Summe ihrer Projectionen auf den zu $\alpha\gamma$ senkrechten Durchmesser wäre dann ebenso gleich der Summe

$$CG.\sin GC\gamma + CA.\sin AC\alpha.$$

Wäre nun $\alpha\gamma$ der zu H_1 senkrechte Durchmesser h_1, und es bildete σ_1 mit H_1 den Winkel $\varDelta$, der $\overline{\gtrless}\, 0$ und $\overline{<}\, \frac{1}{2}\left(\frac{360}{10}\right)^\circ$ d. h.

$\leqq a$ ist, so würde σ_1 mit h_1 einen Winkel $= 90^0 - \varDelta$ bilden. Es würde aber dann der zu σ_1 senkrechte Radius mit h_1 einen Winkel $= \varDelta$ einschliessen. Daraus folgt aber, dass der zu h_1 nächstnachbarliche Eckradius mit h einen Winkel $= (a - \varDelta)$ bilden müsste, dass also Winkel $AC\alpha = GC\gamma = (a - \varDelta)$ sein müsste. Ist aber diess der Fall, so ist auch:

$$\Sigma_{1H} = 2R\cos(a - \varDelta) \quad \text{und} \quad \Sigma_{2h} = 2R\sin(a - \varDelta).$$

Da nun aber auch

$$R : \tfrac{1}{2}\sigma = R : \tfrac{1}{2}\mathfrak{H} = 1 : \sin a, \quad \text{also} \quad R = \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}\operatorname{cosec} a$$

ist, so ist auch:

$$\Sigma_{1H} = 2R\cos(a - \varDelta) = \mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a.\cos(a - \varDelta),$$
$$\Sigma_{2h} = 2R\sin(a - \varDelta) = \mathfrak{H}.\operatorname{cosec} a.\sin(a - \varDelta).$$

XXI.

Allgemeine Form der Fourier'schen Reihen. Anwendung auf die Berechnung bestimmter Integrale und die Summirung der Reihen.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Dienger*
am Polytechnikum in Karlsruhe.

Die Formel, von der ich im Nachstehenden ausgehen will, ist die folgende:

(1)

$$\sum_1^\infty \int_{-c}^{+c} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} \partial z = -\tfrac{1}{2}\int_{-c}^{+c} f(z)\partial z + cf(x), \quad -c < x < +c.$$

Für $x = +c$ oder $= -c$ muss die zweite Seite dieser Gleichung heissen:

$$-\tfrac{1}{2}\int_{-c}^{+c} f(z)\partial z + \tfrac{1}{2}c[f(c) + f(-c)]. \qquad (1')$$

Der Beweis dieser Formeln findet sich etwa in meiner „Differential- und Integralrechnung, zweite Auflage", S. 227. Dabei ist nur zu bemerken, dass, wenn $f(x)$ für einen zwischen $-c$ und $+c$ liegenden Werth von x doppelwerthig ist, man auf der zweiten Seite in (1) die halbe Summe beider Werthe von $f(x)$ statt dieser Grösse zu nehmen hat. Ist an den Gränzen $(x = \pm c) f(x)$ doppelwerthig, so ist in (1') für $f(c)$ oder $f(-c)$ der innere Werth (d. h. der gegen das Intervall $-c$ zu $+c$ gewendete) zu wählen. Das Σ-Zeichen bezieht sich auf die Werthe von μ von 1 durch die positiven ganzen Zahlen bis ∞.

§. 1.

Seien α, β zwei (reelle) Zahlen zwischen $-c$ und $+c$, so dass

$$-c<\alpha<\beta<+c; \qquad (2)$$

sei ferner $f(z)$ so beschaffen, dass von $z=-c$ bis $z=\alpha$ und von $z=\beta$ bis $z=+c$ diese Funktion beständig Null, dagegen von $z=\alpha$ bis $z=\beta$ immer $=F(z)$; alsdann folgt aus (1), wenn man beachtet, dass hiernach für $z=\alpha$ und $z=\beta$ die $f(z)$ doppelwerthig ist:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z\\
&=-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z+cF(x),\quad \alpha<x<\beta;\\
&=-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z+\frac{c}{2}F(x),\quad x=\alpha \text{ oder } =\beta;\\
&=-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z,\quad \text{wenn } -c\leqq x<\alpha,\ \beta<x\leqq+c;\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

wo für $x=-c$ oder $x=+c$ die letzte Gleichung nach (1') noch gilt, indem $f(c)=f(-c)=0$.

Ist $f(z)$ nur Null von $z=-c$ bis $z=\alpha$, dagegen $F(z)$ von $z=\alpha$ bis $z=+c$, so folgt aus (1) und (1'):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \int_\alpha^c F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z\\
&=-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z+cF(x),\quad \alpha<x<c;\\
&=-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z+\frac{c}{2}F(x),\quad x=\alpha \text{ und } =+c;\\
&=-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z,\quad -c<x<\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ist endlich $f(z)$ Null von $z=\beta$ bis $z=+c$, dagegen $F(z)$ von $z=-c$ bis β:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^\infty \int_{-c}^{\beta} F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z\\
&= -\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z + cF(x), \quad -c<x<\beta,\\
&= -\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial z + \frac{c}{2}F(x), \quad x=-c \text{ oder } =\beta,\\
&= -\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta F(z)\partial x, \quad \beta<x<c.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Bei Doppelwerthigkeit gilt immer die bereits früher schon gemachte Bemerkung.

In (4) erhält man für $x=-c$ denselben Werth wie für $x=+c$; in (5) für $x=+c$ denselben wie für $x=-c$.

§. 2.

Man setze in (1): $z=z'-a-c$, wo a ganz beliebig. Alsdann erhält man (wenn man z statt z' schreibt):

$$\sum_1^\infty \int_a^{a+2c} f(z-a-c)\cos\frac{\mu\pi(z-a-c-x)}{c}\partial z$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_a^{a+2c} f(z-a-c)\partial z + cf(x), \quad -c<x<+c.$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_a^{a+2c} f(z-a-c)\partial z + \frac{c}{2}[f(c)+f(-c)], \quad x=\pm c,$$

Setzt man hier $f(u)=\Phi(u+a+c)$, so ergibt sich:

$$\sum_1^\infty \int_a^{a+2c} \Phi(z)\cos\frac{\mu\pi(z-a-c-x)}{c}\partial z$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_a^{a+2c} \Phi(z)\partial z + c\Phi(x+a+c), \quad -c<x<+c,$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_a^{a+2c} \Phi(z)\partial z + \frac{c}{2}[\Phi(a+2c)+\Phi(a)], \quad x=\pm c.$$

Setzt man endlich $x=x'-a-c$ und beachtet, dass die Bedingung $-c<x'-a-c<+c$ jetzt heisst: $a<x'<a+2c$, so erhält man leicht:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \int_a^{a+2c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_a^{a+2c} f(z)\,\partial z + cf(x),\quad a<x<a+2c,\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_a^{a+2c} f(z)\,\partial z + \frac{c}{2}[f(a+2c)+f(a)],\\ &\qquad x=a \text{ oder } = a+2c.\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

Ist b zwischen a und $a+2c$, $f(z)$ Null von $z=b$ bis $z=a+2c$, dagegen $F(z)$ von $z=a$ bis $z=b$, so folgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \int_a^{b} F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_a^{b} F(z)\,\partial z + cF(x),\quad a<x<b,\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_a^{b} F(z)\,\partial z + \frac{c}{2}F(x),\quad x=a \text{ oder } =b,\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_a^{b} F(z)\,\partial z,\quad b<x<a+2c.\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

Für $x=a+2c$ erhält man denselben Werth wie für $x=a$. Hier ist $b-a<2c$, sonst a und b beliebig.

Setzt man in (6) $a+2mc$ für a, $x+2mc$ für x, wo m eine ganze (positive oder negative) Zahl, so folgt wegen

$$\cos\frac{\mu\pi(z-x-2mc)}{c} = \cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}:$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \int_{a+2mc}^{a+2mc+2c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_{a+2mc}^{a+2mc+2c} f(z)\,\partial z + cf(x+2mc),\quad a<x<a+2c,\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_{a+2mc}^{a+2mc+2c} f(z)\,\partial z + \frac{c}{2}[f(a+2mc+2c)+f(a+2mc)],\\ &\qquad x=a \text{ oder } =a+2c.\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

Setzt man eben so in (7) $a+2mc$ für a, $b+2mc$ für b, $x+2mc$ für x, wo noch $b+2mc-(a+2mc)<2c$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z)\,\partial z + cf(x+2mc), \quad a<x<b,\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z)\,\partial z + \frac{c}{2}f(x+2mc), \quad x=a \text{ oder } =b,\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_{a+2mc}^{b+2mc} f(z)\,\partial z, \quad b<x<a+2c.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Für $x=a+2c$ erhält man denselben Werth wie für $x=a$. Dabei muss $b-a<2c$ sein.

§. 3.

Sei $B>A$, $B-A=2nc+\varrho$, wo n eine positive ganze Zahl (Null eingeschlossen), ϱ zwischen 0 und $2c$. Alsdann ist:

$$\sum_1^\infty \int_A^B f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z$$

$$= \sum_1^\infty \int_A^{A+2c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z + \sum_1^\infty \int_{A+2c}^{A+4c} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z + \ldots$$

$$+ \sum_1^\infty \int_{A+2(n-1)c}^{A+2nc} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z + \sum_1^\infty \int_{A+2nc}^{A+2nc+\varrho} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\,\partial z.$$

Von den Grössen zweiter Seite ist nun die erste nach (6):

$$-\tfrac{1}{2}\int_A^{A+2c} f(z)\,\partial z + cf(x), \quad A<x<A+2c,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_A^{A+2c} f(z)\,\partial z + \frac{c}{2}[f(A+2c)+f(A)], \quad x=A \text{ oder } =A+2c;$$

die zweite nach (8):

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2c}^{A+4c} f(z)\,\partial z + cf(x+2c), \quad A<x<A+2c,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2c}^{A+4c} f(z)\,\partial z + \frac{c}{2}[f(A+4c)+f(A+2c)], \quad x=A \text{ oder } A+2c;$$

die dritte nach (8):

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+4c}^{A+6c} f(z)\partial z + cf(x), \quad A < x < A+2c,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+4c}^{A+6c} f(z)\partial z + \frac{c}{2}[f(A+6c)+f(A+4c)], \quad x = A \text{ od. } = A+2c;$$

u. s. w.

die vorletzte nach (8):

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2(n-1)c}^{A+2nc} f(z)\partial z + cf[x+2(n-1)c], \quad A < x < A+2c,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2(n-1)c}^{A+2nc} f(z)\partial z + \frac{c}{2}[f(A+2nc)+f(A+2nc-2c)],$$

$$x = A \quad \text{oder} \quad = A+2c;$$

die letzte ist Null, wenn $\varrho = 0$; dieselbe ist für $0 < \varrho < 2c$ nach (9):

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2nc}^{B} f(z)\partial z + cf(x+2nc), \quad A < x < A+\varrho,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2nc}^{B} f(z)\partial z + \frac{c}{2}f(x+2nc), \quad x = A \quad \text{oder} \quad A+\varrho,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2nc}^{B} f(z)\partial z, \quad A+\varrho < x < A+2c,$$

für $x = A+2c$ dasselbe wie für $x = A$;

sie ist für $\varrho = 2c$ nach (8):

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2nc}^{B} f(z)\partial z + cf(x+2nc), \quad A < x < A+2c,$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{A+2nc}^{B} f(z)\partial z + \frac{c}{2}[f(B)+f(A+2nc)], \quad x = A \quad \text{oder} \quad = A+2c.$$

Hieraus folgt, dass man drei Fälle: $\varrho = 0$, $< 2c$, $= 2c$, unterscheiden müsse, so wie im zweiten Falle x von A bis $A+\varrho = B-2nc$, und von $A+\varrho$ bis $A+2c$ gehen zu lassen habe.

I. Sei $B-A = 2nc$, n positiv ganz.

Es ist

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{A}^{B} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{A}^{B} f(z)\partial z+c[f(x)+f(x+2c)+f(x+4c)+\ldots+f(x+2nc-2c)],$$

$$A<x<A+2c;$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{A}^{B} f(z)\partial z+c[\tfrac{1}{2}f(A)+f(A+2c)+f(A+4c)+\ldots.$$

$$\ldots.+f(A+2nc-2c)+\tfrac{1}{2}f(A+2nc)],$$

$$x=A \text{ oder } =A+2c.$$

II. Sei $B-A>2nc$ aber $<2(n+1)c$.

Es ist

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{A}^{B} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{A}^{B} f(z)\partial z+c[f(x)+f(x+2c)+\ldots.+f(x+2nc-2c)+f(x+2nc)],$$

$$A<x<B-2nc;$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{A}^{B} f(z)\partial z+c[f(x)+fx+2c)+\ldots.+f(x+2nc-2c)+\tfrac{1}{2}f(x+2nc)],$$

$$x=B-2nc;$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{A}^{B} f(z)\partial z+c[\tfrac{1}{2}f(A)+f(A+2c)+\ldots+f(A+2nc-2c)+f(A+2nc)],$$

$$x=A \text{ oder } =A+2c;$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{A}^{B} f(z)\partial z+c[f(x)+f(x+2c)+\ldots.+f(x+2nc-2c)],$$

$$B-2nc<x<A+2c.$$

III. Sei $B-A=2(n+1)c$.

Da dieser Fall aus I. folgt, wenn man dort $n+1$ statt n setzt, so ist er nicht besonders aufzuführen; doch ergibt er sich ganz unmittelbar aus dem Vorhergehenden.

Will man den Werth von

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{A}^{B} f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z$$

für ein ganz beliebiges x kennen, so bestimme man x' zwischen

0 und $2c$ so, dass $x - A = 2sc + x'$, wo s eine ganze Zahl; alsdann liegt $A + x'$ zwischen A und $A + 2c$, und wenn

$$x - A = 2sc + x', \quad A + x' = \xi;$$

so ist:

$$\sum_1^\infty \int_A^B f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-x)}{c} \partial z = \sum_1^\infty \int_A^B f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-\xi-2sc)}{c} \partial z$$

$$= \sum_1^\infty \int_A^B f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-\xi)}{c} \partial z.$$

Da man nun letztere Grösse zu bestimmen weiss, so ist auch die erste bestimmt (bei beliebigem x).

§. 4.

Der Fall I. liefert ($x = a$, $A = a$, $B = a + 2nc$):

$$\int_a^{a+2nc} f(z) \partial z = 2c[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+2c) + \ldots + f(a+2nc-2c) + \tfrac{1}{2}f(a+2nc)]$$

$$- 2 \sum_1^\infty \int_a^{a+2nc} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-a)}{c} \partial z.$$

Für den besonderen Fall, da $n = 1$, heisst die zweite Seite wegen (6):

$$2c[\tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{2}f(a+2c)] - 2 \sum_1^\infty \int_a^{a+2c} f(z) \cos \frac{\mu\pi(z-a)}{c} \partial z.$$

Setzt man hier $2c = h$, $a + 2nc = a + nh = b$:

(10)

$$\int_a^b f(z) \partial z = h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h) + \tfrac{1}{2}f(b)]$$

$$- 2 \sum_1^\infty \int_a^b f(z) \cos \frac{2\mu\pi(z-a)}{h} \partial z,$$

wo $b - a = nh$, n positiv ganz;

(10')

$$\int_a^{a+h} f(z) \partial z = \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a+h)] - 2 \sum_1^\infty \int_a^{a+h} f(z) \cos \frac{2\mu\pi(z-a)}{h} \partial z.$$

Die Bedingung $b-a=nh$ sagt aus, dass h ein aliquoter Theil von $b-a$ sein muss. Die Formel (10) ist die Formel zur **näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals.** Sie rührt ursprünglich von **Poisson** her.

Man hat durch theilweise Integration:

$$\int F(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

$$=\frac{h}{2\mu\pi}F(z)\sin\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}-\frac{h}{2\mu\pi}\int F'(z)\sin\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

$$=\frac{h}{2\mu\pi}F(z)\sin\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}+\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}F'(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}$$

$$-\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}\int F''(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z.$$

Da $b=a+2nc$ und n ganz, so folgt hieraus:

$$\int_a^b F(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

$$=\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}[F'(b)-F'(a)]-\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}\int_a^b F''(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z;$$

daraus dann:

$$\int_a^b F''(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

$$=\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}[F^3(b)-F^3(a)]-\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}\int_a^b F^4(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z,$$

$$\int_a^b F^4(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

$$=\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}[F^5(b)-F^5(a)]-\frac{h^2}{(2\mu\pi)^2}\int_a^b F^6(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z,$$

u. s. w.

Auf diese Weise folgt aus (10):

$$\int_a^b f(z)\partial z=h[\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots.+f(b-h)+\tfrac{1}{2}f(b)]$$

$$-\frac{2h^2}{(2\pi)^2}[f'(b)-f'(a)]\Sigma\frac{1}{\mu^2}+\frac{2h^4}{(2\pi)^4}[f^3(b)-f^3(a)]\Sigma\frac{1}{\mu^4}-\ldots.$$

$$\ldots.\pm\frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}}\mp R,$$

wenn

$$R = \frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \Sigma \frac{1}{\mu^{2m}} \int_a^b f^{2m}(z) \cos \frac{2\mu\pi(z-a)}{h} \partial z. \quad (11)$$

Dabei ist m eine beliebige positive, ganze Zahl. Für $m=0$ hätte man kurzweg die (10).

Setzen wir noch:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\mu^{2r}} = \frac{2^{2r-1}\pi^{2r}}{1.2\ldots 2r} B_{2r-1}, \quad (12)$$

so ergibt sich endlich:

(13)

$$\int_a^b f(z)\partial z = h[\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b-h)+\tfrac{1}{2}f(b)]$$
$$-\frac{h^2B_1}{1.2}[f'(b)-f'(a)]+\frac{h^4B_3}{1.2.3.4}[f^3(b)-f^3(a)]-\ldots$$
$$\ldots \pm \frac{h^{2m}B_{2m-1}}{1.2\ldots 2m}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)] \mp R,$$

wo R durch (11) gegeben ist. Dabei ist m wie oben beschaffen, und $h=\frac{b-1}{n}$. Die Zahlen B_1, B_3,.... sind die Bernoullischen Zahlen.

Wäre $n=1$, also $h=b-a$, so würde auf der zweiten Seite in der ersten eingeklammerten Summe bloss $\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$ stehen; sonst bliebe Alles ungeändert, nur dass natürlich $b=a+h$ wäre. Für $m=0$ fielen alle Glieder mit den B_1, B_3,.... weg, und R wäre mit dem Vorzeichen — zu nehmen, nach (10).

§. 5.

Wir wollen nun den Werth von R näher untersuchen. Zu dem Ende unterscheiden wir zwei Fälle.

I. $f^{2m}(z)$ behält dasselbe Zeichen von $z=a$ bis $z=b$ und bleibt endlich.

Da $\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}$ als äusserste Werthe $+1$ und -1 hat, so liegt die Grösse

$$\int_a^b f^{2m}(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

zwischen

$$-\int_a^b f^{2m}(z)\partial z \quad \text{und} \quad +\int_a^b f^{2m}(z)\partial z,$$

d. h. zwischen

$$-[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)] \quad \text{und} \quad +[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)].$$

Da dies für alle μ in derselben Weise gilt, d. h. für alle μ die erste Grösse etwa kleiner und die zweite grösser ist als das genannte Integral, alle Glieder in R ferner addirt sind, so ist offenbar

R zwischen

$$-\frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]\,\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}}$$

und

$$+\frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]\,\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}},$$

d. h. wegen (12):

R zwischen

$$-\frac{h^{2m}B_{2m-1}}{1.2\ldots.2m}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]$$

und

$$+\frac{h^{2m}B_{2m-1}}{1.2\ldots.2m}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)].$$

Man hat also folgenden Satz:

Ist $h=\frac{b-a}{n}$, wo n eine beliebige positive und ganze Zahl ($b>a$ gedacht), so ist:

(14)

$$\int_a^b f(x)\partial x = h[f(a)+f(a+h)+\ldots.+f(b-h)]+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]$$

$$-\frac{B_1h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)]+\frac{B_3h^4}{1..4}[f^3(b)-f^3(a)]-\ldots.$$

$$\pm\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1\ldots2m}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]+\frac{\theta B_{2m-1}h^{2m}}{1\ldots2m}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)],$$

wenn θ zwischen -1 und $+1$ liegt, m eine beliebige positive ganze Zahl ist, und $f^{2m}(x)$ dasselbe Zeichen behält, wenn x von a bis b geht.

Für $m = 1$ hätte man:

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = h[f(a)+\ldots.+f(b-h)]+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]$$
$$-\frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)]+\frac{\theta B_1 h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)].$$

Für $m = 0$ liesse sich ebenfalls die Formel bilden; sie hat aber dann keinen Werth.

II. $f^{2m}(z)$ bleibt endlich von $z = a$ bis $z = b$.

Da

$$\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h} = 1-2\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h},$$

so ist:

$$\int_a^b f^{2m}(z)\cos\frac{2\mu\pi(z-a)}{h}\partial z = \int_a^b f^{2m}(z)\left[1-2\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\right]\partial z$$
$$= f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)-2\int_a^b f^{2m}(z)\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\partial z.$$

Demnach ist:

$$R = \frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]\,\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}}$$
$$-\frac{4h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}}\int_a^b f^{2m}(z)\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\partial z,$$

und also:

$$\int_a^b f(z)\partial z = h[f(a)+\ldots+f(b-h)]+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)]+\ldots$$
$$\ldots\mp\frac{B_{2m-3}h^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}[f^{2m-3}(b)-f^{2m-3}(a)]\pm R',$$

$$R' = \frac{4h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}}\int_a^b f^{2m}(z)\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\partial z.$$

Da $\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}$ stets positiv, so liegt das Integral

$$\int_a^b f^{2m}(z)\sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\partial z$$

zwischen

$$G\int_a^b \sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\partial z \quad \text{und} \quad K\int_a^b \sin^2\frac{\mu\pi(z-a)}{h}\partial z,$$

d. h. zwischen

$$\frac{G(b-a)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{K(b-a)}{2},$$

wenn G und K den grössten und kleinsten Werth von $f^{2m}(z)$ für z von a bis b bedeuten. Also liegt

$$R' \text{ zwischen } \frac{2h^{2m}(b-a)}{(2\pi)^{2m}}G\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}} \quad \text{und} \quad \frac{2h^{2m}(b-a)}{(2\pi)^{2m}}K\Sigma\frac{1}{\mu^{2m}},$$

d. h.

$$R' \text{ zwischen } \frac{B_{2m-1}h^{2m}(b-a)G}{1.2\ldots 2m} \quad \text{und} \quad \frac{B_{2m-1}h^{2m}(b-a)K}{1.2\ldots 2m}.$$

Demnach ist:

$$R' = \frac{B_{2m-1}h^{2m}(b-a)}{1.2\ldots 2m}f^{2m}(a+n\theta h), \quad \theta \text{ zwischen } 0 \text{ und } 1.$$

Man hat also, wenn man noch $m+2$ statt m setzt, neben (14):

(15)

$$\int_a^b f(x)\partial x = h[f(a)+f(a+h)+\ldots.+f(b-h)]$$
$$+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{B_1h^2}{1.2}[f'(b)-f'(a)]+\ldots.$$
$$\ldots.\mp\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1\ldots 2m}[f^{2m-1}(b)-f^{2m-1}(a)]$$
$$\pm\frac{B_{2m+1}h^{2m+2}(b-a)}{1\ldots 2m+2}f^{2m+2}[a+\theta(b-a)],$$

wenn $f^{2m+2}(x)$ von a bis b endlich ist. Dabei ist θ zwischen 0 und 1.

Die Sätze (14) und (15) sind von **Malmsten** in anderer Weise aufgestellt worden.

Für $m=0$ heisst der Satz (15):

$$\int_a^b f(x)\partial x = h[f(a)+f(a+h)+\ldots.+f(b-h)]$$
$$+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{B_1 h^2(b-a)}{1.2}f^2[a+\theta(b-a)],$$

wenn $f^2(x)$ von a bis b endlich bleibt.

§. 6.

Setzt man in (14) a und b positiv voraus, $b=a+nh$, ferner $f(x)=x^r$, so folgt daraus:

(16)

$$a^r+(a+h)^r+(a+2h)^r+\ldots.+(a+nh)^r$$
$$=\frac{(a+nh)^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)h}+\frac{(a+nh)^r+a^r}{2}+\frac{B_1 rh}{1.2}[(a+nh)^{r-1}-a^{r-1}]-\ldots$$
$$\pm B_{2m-1}\frac{r(r-1)\ldots.(r-2m+2)h^{2m-1}}{1.2\ldots.2m}[(a+nh)^{r-2m+1}-a^{r-2m+1}]$$
$$+\frac{\theta B_{2m-1}r\ldots(r-2m+2)h^{2m-1}}{1.2\ldots.2m}[(a+nh)^{r-2m+1}-a^{r-2m+1}],$$

wo θ zwischen -1 und $+1$. Ist r eine ganze positive Zahl, so fällt das letzte Glied weg, sobald $m \overset{=}{>} \frac{r+2}{2}$.

Diese Formel gilt auch für $n=1$, wie wir oben gesehen. Setzen wir also $a=1$, $h=1$, $n=1$ und nehmen r als ganze positive Zahl, so ist:

(17)

$$\frac{rB_1}{1.2}(2^{r-1}-1)-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3.4}B_3(2^{r-3}-1)$$
$$+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1.2\ldots6}B_5(2^{r-5}-1)-\ldots.=\frac{2^r+1}{2}-\frac{2^{r+1}-1}{r+1},$$

aus welcher Formel sich $B_1, B_3, \ldots.$ rücklaufend berechnen lassen, wenn man nach einander $r=2, 4, \ldots.$ setzt.

Für $r=-1$ kann man (16) nicht zulassen, weil wir $\int x^r \partial x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ setzten, das jetzt $= l(x)$ ist. Demnach:

(18)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+h}+\frac{1}{a+2h}+\cdots+\frac{1}{a+nh}$$

$$=\frac{1}{h}\log\text{nat}\left(\frac{a+nh}{a}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a+nh}+\frac{1}{a}\right)+\frac{B_1 h}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+nh)^2}\right)-\cdots$$

$$\cdots\pm\frac{B_{2m-1}h^{2m-1}}{2m}\left(\frac{1}{a^{2m}}-\frac{1}{(a+nh)^{2m}}\right)$$

$$+\frac{\theta B_{2m-1}h^{2m-1}}{2m}\left(\frac{1}{a^{2m}}-\frac{1}{(a+nh)^{2m}}\right),$$

wo a und h positiv, θ zwischen -1 und $+1$.

Wir begnügen uns hier mit dieser Anwendung, die wir nur der Formel (17) wegen gemacht haben, welche uns behufs eines theoretischen Abschlusses nothwendig war. Unsere Absicht war, aus der gebräuchlichen Darstellung der Fourier'schen Reihen, wie sie in ihrem Ergebniss in (1) vorliegt, die wichtigen Sätze (14) und (15) abzuleiten, wobei wir einer genauen Formulirung der in §. 3. aufgeführten Sätze bedurften. Die Sätze selbst sind an sich nicht neu; ob sie schon in ähnlicher Weise abgeleitet worden, wissen wir nicht.

XXII.

Die Anwendung der stereographischen Projection zur Entwickelung der Theorie des sphärischen Dreiecks und des sphärischen Vierecks.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wenn auch die Anwendung der stereographischen Projection zur Vereinfachung vieler geometrischer Untersuchungen wohl im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden darf, so glaube ich doch, dass namentlich die, jedenfalls besondere Beachtung verdienende Anwendung auf das sphärische Dreieck und sphärische Viereck noch nicht so bekannt ist, wie man im Interesse dieses nicht unwichtigen Gegenstandes wünschen muss, und will daher diese Anwendungen im Folgenden etwas ausführlicher entwickeln, ohne übrigens dieselben erschöpfen zu wollen, indem ich vielmehr durch das Folgende nur zur noch weiteren Bearbeitung dieses interessanten Gegenstandes anzuregen beabsichtige. Ich werde dabei, wenn auch nicht vollständig, doch im Wesentlichen, dem vielfach ausgezeichneten Buche von **Paul Serret**: „**Des methodes en Géométrie.**" **Paris.** 1855. p. 30. folgen.

Die beiden Haupteigenschaften der stereographischen Projection:

1. dass die Projection jedes Kugelkreises ein Kreis ist;

2. dass die Projectionen der Kugelkreise sich unter denselben Winkeln schneiden wie die Kreise selbst;

müssen im Folgenden als bekannt vorausgesetzt werden. Ich lasse jedoch diesem Aufsatze unmittelbar einen anderen folgen, in welchem ich eine neue analytische Entwickelung der Eigenschaften

der stereographischen Projection gegeben habe, welche, wie ich glaube, mehreres Eigenthümliche enthält, und sich, insofern man zunächst bloss die gewöhnlichen Haupteigenschaften der genannten Projectionsart kennen zu lernen beabsichtigt, besonders empfehlen dürfte. Ausserdem verweise ich auf meine frühere Abhandlung über diese Projection in Thl. XXXII. Nr. XXV., die aber, ausser der Entwickelung der bekannten Haupteigenschaften der stereographischen Projection noch eine andere besondere, aus ihr von selbst ersichtliche Tendenz verfolgt. Die geometrische Begründung dieser Haupteigenschaften ist bekanntlich namentlich auch in neuerer Zeit mehrfach mit Glück versucht worden, wie man u. A. in Thl. XXX. S. 354. und Thl. XXXI. S. 217. sehen kann.

§. 2.

In Taf. III. Fig. 10. sei ABC ein auf einer aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugelfläche liegendes sphärisches Dreieck, dessen Winkel und Seiten wir wie gewöhnlich durch A, B, C und a, b, c bezeichnen. Durch A ziehe man einen Durchmesser der Kugel, bezeichne den Punkt, in welchem von diesem Durchmesser die Kugelfläche zum zweiten Male geschnitten wird, durch $\mathfrak{A}$, versetze das Auge in $\mathfrak{A}$, und projicire das sphärische Dreieck ABC auf die in dem Mittelpunkte O der Kugel auf dem Durchmesser $A\mathfrak{A}$ senkrecht stehende Ebene. Ist nun $OB'C'$ die auf diese Weise erhaltene Projection, so sind offenbar OB' und OC' gerade Linien und die Seite $B'C'$ der Projection ist nach den Eigenschaften der stereographischen Projection ein Kreisbogen. Die an den Punkten O, B', C' liegenden Winkel des geradlinigen Dreiecks $OB'C'$ sollen durch A', B', C' und die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten dieses geradlinigen Dreiecks durch a', b', c' bezeichnet werden. Bezeichnen wir nun die an denselben Punkten liegenden Winkel der Projection des sphärischen Dreiecks ABC selbst durch A_1, B_1, C_1; so ist nach den Eigenschaften der stereographischen Projection:

$$A_1 = A,\quad B_1 = B,\quad C_1 = C;$$

und ausserdem ist offenbar $A_1 = A'$, also auch $A' = A$.

In dem geradlinigen Dreiecke $\mathfrak{A}B'C'$ ist nach den Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$B'C'^2 = \mathfrak{A}B'^2 + \mathfrak{A}C'^2 - 2.\mathfrak{A}B'.\mathfrak{A}C'.\cos B'\mathfrak{A}C';$$

offenbar ist aber:

$$\mathfrak{A}B' = r\sec\tfrac{1}{2}c,$$
$$\mathfrak{A}C' = r\sec\tfrac{1}{2}b,$$
$$\cos B'\mathfrak{A}C' = \frac{\mathfrak{A}B^2 + \mathfrak{A}C^2 - BC^2}{2.\mathfrak{A}B.\mathfrak{A}C};$$

ferner, wie leicht erhellen wird:

$$\mathfrak{A}B = 2r\sin\tfrac{1}{2}\{360^0 - (180^0 + c)\} = 2r\sin(90^0 - \tfrac{1}{2}c) = 2r\cos\tfrac{1}{2}c,$$
$$\mathfrak{A}C = 2r\sin\tfrac{1}{2}\{360^0 - (180^0 + b)\} = 2r\sin(90^0 - \tfrac{1}{2}b) = 2r\cos\tfrac{1}{2}b,$$
$$BC = 2r\sin\tfrac{1}{2}a;$$

also:

$$\cos B'\mathfrak{A}C' = \frac{\cos\tfrac{1}{2}b^2 + \cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2}{2\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\left(\frac{a'}{r}\right)^2 = \sec\tfrac{1}{2}b^2 + \sec\tfrac{1}{2}c^2 - \sec\tfrac{1}{2}b\sec\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}b^2 + \cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2}{\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

woraus man mittelst leichter Rechnung sogleich den für das Folgende sehr wichtigen Ausdruck:

$$a' = \frac{r\sin\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

erhält. Da nun ferner offenbar:

$$OC' = O\mathfrak{A}.\tan g\tfrac{1}{2}b, \quad OB' = O\mathfrak{A}.\tan g\tfrac{1}{2}c$$

ist, so haben wir die drei folgenden Formeln:

$$a' = \frac{r\sin\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}, \quad b' = r\tan g\tfrac{1}{2}b, \quad c' = r\tan g\tfrac{1}{2}c.$$

Der Einfachheit wegen werden wir im Folgenden r als Einheit annehmen, wodurch die vorstehenden Formeln die Gestalt:

$$a' = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}, \quad b' = \tan g\tfrac{1}{2}b, \quad c' = \tan g\tfrac{1}{2}c$$

erhalten.

Aus der Gleichung

$$a' = \frac{r\sin\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

erhält man nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\frac{B'C'}{O\mathfrak{A}} = \frac{BC}{2.O\mathfrak{A}}\cdot\frac{2.O\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}C}\cdot\frac{2.O\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}B}.$$

also:

$$B'C' = 2.\overline{O\mathfrak{A}}^2.\frac{BC}{\mathfrak{A}B.\mathfrak{A}C},$$

was hier noch beiläufig bemerkt sein mag.

§. 3.

Bezeichnen wir den Excess des sphärischen Dreiecks ABC durch E, so ist:

$$E = A + B + C - 180^0,$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$E = A_1 + B_1 + C_1 - 180^0.$$

Ziehen wir, wie Taf. III. Fig. 11. zeigt, in der Projectionsebene durch B' und C' an den Bogen $B'C'$ Berührende, welche sich in O' schneiden, und bezeichnen den Winkel $B'O'C'$ durch O', so ist in dem Vierecke $OB'O'C'$:

$$A_1 + B_1 + C_1 + O' = 2.180^0,$$

woraus sich, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht, sogleich:

$$E = 180^0 - O'$$

ergiebt. Bezeichnen wir die gleichen Winkel, unter denen die durch B' und C' gezogenen Berührenden gegen die Sehne $B'C'$ geneigt sind, durch x, so ist:

$$O' = 180^0 - 2x,$$

also:

$$E = 2x, \quad x = \tfrac{1}{2}E.$$

Weil nun offenbar:

$$B' = B_1 - x, \quad C' = C_1 - x$$

ist, so ist nach dem Vorstehenden und mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraphen:

$$A' = A, \quad B' = B - \tfrac{1}{2}E, \quad C' = C - \tfrac{1}{2}E.$$

Denkt man sich den Bogen $B'C'$ über B' hinaus erweitert, bis von demselben die über O verlängerte OC' zum zweiten Male in C'' geschnitten wird, und zieht $B'C''$, so ist, wenn man den Winkel $B'C''C'$ durch C'' bezeichnet, nach einem bekannten geometrischen Satze offenbar $C'' = x$; also nach dem Obigen:

$$C'' = \tfrac{1}{2}E.$$

Denkt man sich den Bogen $B'C'$ über C' hinaus erweitert, bis von demselben die über O verlängerte OB' in B'' geschnitten wird, so ist ganz eben so:

$$B'' = \tfrac{1}{2}E.$$

Weil $OB'C''$ offenbar die Projection des sphärischen Dreiecks ist, welches mit ABC die Seite AB gemein hat, und dessen zwei andere Seiten die Seiten AC und BC zu 180° ergänzen; so ist nach dem in §. 2. Bewiesenen offenbar:

$$B'C'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(180^0 - a)}{\cos\frac{1}{2}(180^0 - b)\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$OC'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(180^0 - b) = \cot\tfrac{1}{2}b,$$

$$OB' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c.$$

Auf ganz ähnliche Art ist:

$$C'B'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(180^0 - a)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(180^0 - c)} = \frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},$$

$$OC' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b,$$

$$OB'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(180^0 - c) = \cot\tfrac{1}{2}c.$$

Weil

$$C'C'' = OC' + OC'',\quad B'B'' = OB' + OB''$$

ist, so ist:

$$C'C'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{2}{\sin b},$$

$$B'B'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c + \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{2}{\sin c}.$$

§. 4.

Jede Sehne eines Kreises ist offenbar gleich dem Durchmesser multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, welchen die durch den einen Endpunkt der Sehne an den Kreis gezogene Berührende mit der Sehne einschliesst; bezeichnen wir also den Halbmesser des Kreises in Taf. III. Fig. 11. durch ϱ, so ist offenbar:

$$B'B'' = 2\varrho\sin B,\quad C'C'' = 2\varrho\sin C;$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$2\varrho \sin B = \frac{2}{\sin c}, \quad 2\varrho \sin C = \frac{2}{\sin b};$$

folglich durch Division:

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c},$$

welches der bekannte erste Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie ist.

§. 5.

In dem geradlinigen Dreiecke $OB'C'$ (Taf. III. Fig. 11.) ist:

$$\cos A' = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'},$$

also nach §. 2.:

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}b^2 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c^2 - \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}a^2}{\cos \tfrac{1}{2}b^2 \cos \tfrac{1}{2}c^2}}{2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}b \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c},$$

woraus sogleich:

$$\cos A = \frac{\sin \tfrac{1}{2}b^2 \cos \tfrac{1}{2}c^2 + \cos \tfrac{1}{2}b^2 \sin \tfrac{1}{2}c^2 - \sin \tfrac{1}{2}a^2}{2 \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c},$$

also:

$$\cos A = \frac{(1-\cos b)(1+\cos c) + (1+\cos b)(1-\cos c) - 2(1-\cos a)}{2 \sin b \sin c},$$

und hieraus:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

folgt, welches die bekannte Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreiecks ist, aus welcher man ferner auf bekannte Weise mittelst des Supplementardreiecks die Relation zwischen den drei Winkeln und einer Seite erhält.

§. 6.

In dem geradlinigen Dreieck $OB'C''$ (Taf. III. Fig. 11.) ist nach der ebenen Trigonometrie:

$$\cos C'' = \frac{B'C''^2 + OC''^2 - OB'^2}{2 . B'C'' . OC''},$$

also nach §. 3.:

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}a^2}{\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2}+\cot\tfrac{1}{2}b^2-\tan\tfrac{1}{2}c^2}{2\dfrac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cot\tfrac{1}{2}b}$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\cos\frac{1}{2}a^2+\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2-\sin\frac{1}{2}b^2\sin\frac{1}{2}c^2}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

folglich nach bekannten Relationen:

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{1+\cos a+\frac{1}{2}(1+\cos b)(1+\cos c)-\frac{1}{2}(1-\cos b)(1-\cos c)}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

woraus sich mittelst der leichtesten Rechnung die bekannte Formel:

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

ergiebt.

Es ist:

$$\begin{aligned}OC''+OB'+B'C''&=\cot\tfrac{1}{2}b+\tan\tfrac{1}{2}c+\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)+\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{2\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-OC''+OB'+B'C''&=-\cot\tfrac{1}{2}b+\tan\tfrac{1}{2}c+\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{-\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{2\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}OC''-OB'+B'C''&=\cot\tfrac{1}{2}b-\tan\tfrac{1}{2}c+\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}OC''+OB'-B'C''&=\cot\tfrac{1}{2}b+\tan\tfrac{1}{2}c-\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)-\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.\end{aligned}$$

Das Product dieser Grössen ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}b^4\cos\frac{1}{2}c^4}.$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{2.OC''.B'C''}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b}.\frac{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}.$$

Multiplicirt man hiermit die Quadratwurzel aus dem vorhergehenden Product, so erhält man, weil

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\sin C''$$

ist, nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie den folgenden gleichfalls bekannten Ausdruck für den Sinus des halben sphärischen Excesses:

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

§. 7.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist:

$$(OC''+OB'+B'C'')(OC''-OB'+B'C'')$$

$$=\frac{4\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a-b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2},$$

$$(-OC''+OB'+B'C'')(OC''+OB'-B'C'')$$

$$=\frac{4\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2}.$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{4.OC''.B'C''}=\frac{\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{(OC''+OB'+B'C'')(OC''-OB'+B'C'')}{4.OC''.B'C''}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a-b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{(-OC''+OB'+B'C'')(OC''+OB'-B'C'')}{4.OC''.B'C''}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Nach den bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie ist aber:

$$\cos\tfrac{1}{2}C''=\cos\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{(OC''+OB'+B'C'')(OC''-OB'+B'C'')}{4.OC''.B'C''}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C''=\sin\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{(-OC''+OB'+B'C'')(OC''+OB'-B'C'')}{4.OC''.B'C''}};$$

also nach dem Vorbergehenden:

$$\cos\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\sin\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}};$$

und hieraus:

$$\tan\tfrac{1}{4}E$$

$$=\sqrt{\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{4}(-a+b+c)\tan\tfrac{1}{4}(a-b+c)\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)},$$

wie bekannt ist.

§. 8.

Wir wollen nun das sphärische Viereck $ABCD$ betrachten, dessen Seiten und Diagonalen AB, BC, CD, DA und AC, BD wir nach der Reihe durch a, b, c, d und f, g bezeichnen werden. Die an den Punkten A, B, C, D liegenden Winkel dieses sphärischen Vierecks bezeichnen wir beziehungsweise durch A, B, C, D. Durch A ziehen wir einen Durchmesser der Kugel, bezeichnen den Punkt, in welchem von diesem Durchmesser die Kugelfläche zum zweiten Male geschnitten wird, durch $\mathfrak{A}$, versetzen das Auge in $\mathfrak{A}$ und projiciren das sphärische Viereck $ABCD$ auf die in dem Mittelpunkte O der Kugel auf dem Durchmesser $A\mathfrak{A}$ senkrecht stehende Ebene. Ist nun $OB'C'D'$ die auf diese Weise erhaltene Projection, so sind OB' und OD' gerade Linien und die Seiten $B'C'$ und $C'D'$ sind nach den Eigenschaften der stereographischen Projection Kreisbogen. Die an den Punkten O, B', C', D' liegenden Winkel des geradlinigen Vierecks $OB'C'D'$ sollen durch A', B', C', D' und die Seiten OB',

$B'C'$, $C'D'$, $D'O$ dieses geradlinigen Vierecks durch a', b', c', d' bezeichnet werden. Bezeichnen wir nun die an denselben Punkten liegenden Winkel der Projection selbst durch A_1, B_1, C_1, D_1; so ist nach den Eigenschaften der stereographischen Projection:

$$A_1 = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C, \quad D_1 = D;$$

und ausserdem ist offenbar $A_1 = A'$, also auch $A' = A$. Die Projection der Diagonale AC ist offenbar eine gerade Linie, die der Diagonale BD ein Kreisbogen; die durch O und B' gehenden Diagonalen des geradlinigen Vierecks $OB'C'D'$ sollen durch f' und g' bezeichnet werden.

§. 9.

Wenn das sphärische Viereck $ABCD$ in einen Kreis beschrieben ist, so ist nach den Eigenschaften der stereographischen Projection das geradlinige Viereck $OB'C'D'$ (Taf. III. Fig. 12.) auch in einen Kreis beschrieben.

Folglich hat man in dem geradlinigen Vierecke $OB'C'D'$ die bekannte Relation:

$$a'c' + b'd' = f'g'.$$

Nach §. 2. ist aber offenbar:

$$a' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a, \quad b' = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}f}, \quad c' = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f}, \quad d' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}d$$

und:

$$f' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}f, \quad g' = \frac{\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d};$$

also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f} + \frac{\sin\frac{1}{2}b\operatorname{tang}\frac{1}{2}d}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}f} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d};$$

und multiplicirt man nun diese Gleichung mit

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}f,$$

so erhält man auf der Stelle die merkwürdige Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d = \sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g.$$

In dem geradlinigen Viereck $OB'C'D'$ ist ferner nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie:

$$\frac{f'}{g'}=\frac{a'd'+b'c'}{a'b'+c'd'}$$

oder

$$f'(a'b'+c'd')=g'(a'd'+b'c').$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$a'b'+c'd'=\frac{\tang\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}f}+\frac{\sin\frac{1}{2}c\tang\frac{1}{2}d}{\cos\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d^2+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}a^2}{\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}d^2\cos\frac{1}{2}f},$$

und folglich:

$$f'(a'b'+c'd')=\frac{\sin\frac{1}{2}f(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d^2+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}a^2)}{\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}d^2\cos\frac{1}{2}f^2}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$a'd'+b'c'=\tang\tfrac{1}{2}a\tang\tfrac{1}{2}d+\frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f^2}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f^2+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f^2},$$

und folglich:

$$g'(a'd'+b'c')=\frac{\sin\frac{1}{2}g(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}f^2+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c)}{\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}d^2\cos\frac{1}{2}f^2}.$$

Also haben wir nach dem Obigen die folgende Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}f(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d^2+\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}a^2)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}g(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}f^2+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c),$$

welche man leicht auf nachstehende Form bringt:

$$\sin\tfrac{1}{2}f(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d\sin\tfrac{1}{2}f(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}g(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d\sin\tfrac{1}{2}f.\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g;$$

also ist, weil nach dem vorher Bewiesenen

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d=\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g$$

ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}f(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d)=\sin\tfrac{1}{2}g(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c)$$

oder:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}f}{\sin\frac{1}{2}g}=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d}.$$

§. 10.

Wir wollen nun den Excess E des sphärischen Vierecks, d. h. den Ueberschuss der Summe seiner vier Winkel über 360°, so dass also

$$E=A+B+C+D-360^0,$$

folglich nach §. 8.

$$E=A_1+B_1+C_1+D_1-360^0$$

ist, betrachten.

Wenn wir in Taf. III. Fig. 12. die Bogen $B'C'$ und $C'D'$ bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte C'' mit der über O hinaus verlängerten Geraden OC' verlängern, und dann die Geraden $B'C''$ und $D'C''$ ziehen, welche den Winkel $B'C''D'$ mit einander einschliessen, den wir durch C'' bezeichnen werden; so ist nach §. 3. offenbar:

$$C''=\tfrac{1}{2}E.$$

Also ist nach den Lehren der ebenen Trigonometrie:

$$\sin\tfrac{1}{2}C''^2=\sin\tfrac{1}{4}E^2=\frac{(B'D'+B'C''-D'C'')(B'D'+D'C''-B'C'')}{4.B'C''.D'C''},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C''^2=\cos\tfrac{1}{4}E^2=\frac{(B'D'+B'C''+D'C'')(B'C''+D'C''-B'D')}{4.B'C''.D'C''}.$$

Nach §. 2. und §. 3. ist aber:

$$B'D'=\frac{\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d},\quad B'C''=\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}f},\quad D'C''=\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f};$$

also:

$$B'D'+B'C''-D'C''=\frac{\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}+\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}f}-\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f},$$

$$B'D'+D'C''-B'C''=\frac{\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}+\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f}-\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}f}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g-\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f},$$

$$B'C''.D'C''=\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f^2};$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{(\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c)\times(\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g-\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c)}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}.$$

Ferner ist:

$$B'D'+B'C''+D'C''=\frac{\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}+\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}f}+\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f},$$

$$B'C''+D'C''-B'D'=\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}f}+\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f}-\frac{\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}$$

$$=\frac{-\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f},$$

$$B'C''.D'C''=\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f^2},$$

folglich:

$$\cos\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{(\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c)\times(-\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c)}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}.$$

Weil

$$\sin\tfrac{1}{2}E=2\sin\tfrac{1}{4}E\cos\tfrac{1}{4}E$$

ist, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d)\\ \times(-\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d)\\ \times(\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d)\\ \times(\sin\frac{1}{2}f\sin\frac{1}{2}g+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d)\end{array}\right\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}.$$

Es würde keine Schwierigkeit haben, noch andere Formeln aus den vorhergehenden abzuleiten.

Ist das Viereck in einen Kreis beschrieben, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g=\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}c+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d,$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(a-c)+\cos\tfrac{1}{2}(b-d)=2\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b-c+d),$$

$$-\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(a+c)+\cos\tfrac{1}{2}(b+d)=2\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g-\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d$$

$$=-\cos\tfrac{1}{2}(a+c)+\cos\tfrac{1}{2}(b-d)=2\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(a-c)-\cos\tfrac{1}{2}(b+d)=2\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d).$$

Setzt man:

$$a+b+c+d=2s,$$

so ist:

$$\begin{aligned}-a+b+c+d&=2(s-a),\\ a-b+c+d&=2(s-b),\\ a+b-c+d&=2(s-c),\\ a+b+c-d&=2(s-d);\end{aligned}$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g-\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d=2\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-d),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d=2\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-c);$$

und daher nach dem Obigen:

$$\sin\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)\sin\tfrac{1}{2}(s-d)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d}}.$$

Bezeichnen wir die halben Summen und halben Differenzen der gegenüberliegenden Seiten durch σ', σ'' und δ', δ''; und setzen also:

$$a+c=2\sigma',\quad b+d=2\sigma'';$$
$$a-c=2\delta',\quad b-d=2\delta'';$$

so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d=2\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\cos\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta''),$$

$$-\sin\tfrac{1}{2}f\sin\tfrac{1}{2}g+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d$$
$$=2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'');$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\cos\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta'')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'')}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d}}.$$

Hieraus würden sich wiederum verschiedene andere Formeln ableiten lassen.

XXIII.

Neue analytische Darstellung der Haupteigenschaften der stereographischen Projection.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wir nehmen die durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Tafel als Ebene der xy, den Mittelpunkt der Kugel als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, und setzen das Auge in den Punkt, in welchem die Oberfläche der Kugel von dem positiven Theile der Axe der z geschnitten wird; den Halbmesser der Kugel wollen wir wie gewöhnlich durch r bezeichnen.

Ein Punkt auf der Kugelfläche sei (uvw), und $(u'v'w')$ sei dessen Projection auf der Tafel; es ist:

1) . . . . $u^2+v^2+w^2=r^2$.

Von dem Auge, dessen Coordinaten 0, 0, r sind, ziehe man nach dem Punkte (uvw) eine Gerade, und bezeichne die von derselben mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ; so sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$2) \quad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z-r}{\cos\gamma},$$

also, weil der Punkt (uvw) in dieser Geraden liegt:

$$3) \quad \frac{u}{\cos\alpha}=\frac{v}{\cos\beta}=\frac{w-r}{\cos\gamma}=G;$$

woraus sich:

$$4) \quad u=G\cos\alpha,\quad v=G\cos\beta,\quad w=r+G\cos\gamma;$$

folglich nach 1) die Gleichung:

$$G^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)+2Gr\cos\gamma+r^2=r^2,$$

also nach einer bekannten Relation die Gleichung:

$$G(G+2r\cos\gamma)=0$$

ergiebt, welche ferner zu

$$G=0 \quad \text{oder} \quad G+2r\cos\gamma=0$$

führt. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen würde nach 1) sich $u=0$, $v=0$, $w=r$ ergeben, und der Punkt (uvw) würde also mit dem Auge zusammenfallen, von welchem Falle natürlich hier abzusehen ist; daher ist nach dem Obigen:

$$G+2r\cos\gamma=0,\quad G=-2r\cos\gamma;$$

also nach 4):

$$5) \quad \left\{\begin{array}{l} u=-2r\cos\alpha\cos\gamma, \\ v=-2r\cos\beta\cos\gamma, \\ w=r(1-2\cos\gamma^2)=-r\cos2\gamma \end{array}\right.$$

zu setzen.

Für das Bild ($u'v'w'$), in welchem die als Ebene der xy angenommene Tafel von der von dem Auge nach (uvw) gezogenen Geraden geschnitten wird, ist nach 2):

$$\frac{u'}{\cos\alpha}=\frac{v'}{\cos\beta}=-\frac{r}{\cos\gamma},$$

also:

$$6) \; . \; . \; . \; . \quad u' = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r, \quad v' = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r, \quad w' = 0.$$

Nach 5) und 6) finden also zwischen dem Punkte (uvw) und seinem Bilde $(u'v'w')$ immer die durch die folgenden Gleichungen ausgedrückten Relationen Statt:

$$7) \left\{ \begin{array}{ll} u = -2r\cos\alpha\cos\gamma, & u' = -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r, \\ v = -2r\cos\beta\cos\gamma, & v' = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}r, \\ w = r(1-2\cos\gamma^2) = -r\cos 2\gamma; & w' = 0; \end{array} \right.$$

welche die hauptsächlichste Grundlage unserer folgenden Betrachtungen bilden.

Leicht leitet man aus diesen Relationen auch die Gleichung:

$$8) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad uu' + vv' + ww' = 2r^2\sin\gamma^2$$

ab.

§. 2.

Wir wollen nun die Coordinaten u', v', w' des Bildes durch die Coordinaten u, v, w des entsprechenden Punktes ausdrücken.

Aus den Gleichungen 7) ergiebt sich auf der Stelle:

$$9) \; . \; . \; . \; . \; . \quad u' = \frac{u}{2\cos\gamma^2}, \quad v' = \frac{v}{2\cos\gamma^2}, \quad w' = 0;$$

nun ist aber:

$$w = r(1-2\cos\gamma^2), \quad \cos\gamma^2 = \frac{r-w}{2r};$$

also nach 9):

$$10) \; . \; . \; . \; . \; . \quad u' = \frac{ru}{r-w}, \quad v' = \frac{rv}{r-w}, \quad w' = 0.$$

Nach 1) ist:

$$w = \pm\sqrt{r^2-u^2-v^2},$$

also:

$$11) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \left\{ \begin{array}{l} u' = \dfrac{ru}{r\mp\sqrt{r^2-u^2-v^2}}, \\ v' = \dfrac{rv}{r\mp\sqrt{r^2-u^2-v^2}}, \\ w' = 0. \end{array} \right.$$

Nennen wir die Halbkugel, in welcher das Auge liegt, nicht liegt, respective die positive, negative Halbkugel, so ist offenbar w positiv oder negativ, jenachdem der Punkt (uvw) in der positiven oder negativen Halbkugel liegt; also müssen wir in den Formeln 11) die oberen oder unteren Vorzeichen nehmen, jenachdem der Punkt (uvw) in der positiven oder negativen Halbkugel liegt.

§. 3.

Umgekehrt wollen wir nun auch die Coordinaten u, v, w des Punktes (uvw) durch die Coordinaten u', v', w' seines Bildes ausdrücken.

Nach 10) ist:

$$u=\frac{r-w}{r}u', \quad v=\frac{r-w}{r}v';$$

also nach 1):

$$\left(\frac{r-w}{r}\right)^2(u'^2+v'^2)+w^2=r^2,$$

welche Gleichung man leicht auf die Form:

$$w^2-\frac{2r(u'^2+v'^2)}{r^2+u'^2+v'^2}w=r^2\frac{r^2-u'^2-v'^2}{r^2+u'^2+v'^2},$$

also, wie man leicht findet, auf die Form:

$$\left\{w-\frac{r(u'^2+v'^2)}{r^2+u'^2+v'^2}\right\}^2=\frac{r^6}{(r^2+u'^2+v'^2)^2}$$

bringt, woraus sich:

$$w=\pm r\frac{r^2\pm(u'^2+v'^2)}{r^2+(u'^2+v'^2)}$$

ergiebt. Nehmen wir die oberen Zeichen, so erhalten wir $w=r$ und folglich nach dem Obigen $u=0$, $v=0$, was auf das Auge führen würde, wovon hier keine Rede sein kann, weshalb wir die unteren Zeichen nehmen, folglich:

$$w=-r\frac{r^2-(u'^2+v'^2)}{r^2+(u'^2+v'^2)}=\frac{u'^2+v'^2-r^2}{u'^2+v'^2+r^2}r$$

setzen müssen, woraus sich:

$$r-w=\frac{2r^3}{u'^2+v'^2+r^2}$$

ergiebt; also haben wir nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$12) \ldots\ldots \begin{cases} u = \dfrac{2r^2u'}{u'^2+v'^2+r^2}, \\ v = \dfrac{2r^2v'}{u'^2+v'^2+r^2}, \\ w = \dfrac{u'^2+v'^2-r^2}{u'^2+v'^2+r^2}r. \end{cases}$$

§. 4.

Wir wollen jetzt die Projection eines Kugelkreises betrachten, dessen Ebene durch die Gleichung

$$13) \ldots\ldots Ax+By+Cz+D=0$$

charakterisirt werden mag. Liegen also alle durch (uvw) dargestellte Punkte der Kugelfläche in dieser Ebene, so ist nach 7):

$$2r(A\cos\alpha+B\cos\beta)\cos\gamma-Cr(1-2\cos\gamma^2)-D=0.$$

Nun ist aber ferner nach 7):

$$\cos\alpha=-\frac{u'}{r}\cos\gamma,\quad \cos\beta=-\frac{v'}{r}\cos\gamma;$$

folglich:

$$A\cos\alpha+B\cos\beta=-\frac{Au'+Bv'}{r}\cos\gamma,$$

und daher nach dem Vorhergehenden, wie man leicht übersieht:

$$2\{Cr-(Au'+Bv')\}\cos\gamma^2=Cr+D,$$

also:

$$\cos\gamma^2=\frac{Cr+D}{2\{Cr-(Au'+Bv')\}};$$

folglich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden:

$$\cos\alpha^2=\frac{u'^2}{r^2}\cdot\frac{Cr+D}{2\{Cr-(Au'+Bv')\}},$$

$$\cos\beta^2=\frac{v'^2}{r^2}\cdot\frac{Cr+D}{2\{Cr-(Au'+Bv')\}},$$

$$\cos\gamma^2=\frac{Cr+D}{2\{Cr-(Au'+Bv')\}}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, weil

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

ist, durch Addition die Gleichung:

$$\frac{u'^2+v'^2}{r^2}+1=\frac{2\{Cr-(Au'+Bv')\}}{Cr+D},$$

also:

$$\frac{u'^2+v'^2}{r^2}+\frac{2(Au'+Bv')}{Cr+D}=\frac{Cr-D}{Cr+D},$$

und hieraus:

$$\frac{u'^2}{r^2}+\frac{2Ar}{Cr+D}\cdot\frac{u'}{r}+\frac{A^2r^2}{(Cr+D)^2}\quad+\frac{v'^2}{r^2}+\frac{2Br}{Cr+D}\cdot\frac{v'}{r}+\frac{B^2r^2}{(Cr+D)^2}$$

$$=\frac{Cr-D}{Cr+D}+\frac{(A^2+B^2)r^2}{(Cr+D)^2};$$

also:

$$\left(\frac{u'}{r}+\frac{Ar}{Cr+D}\right)^2+\left(\frac{v'}{r}+\frac{Br}{Cr+D}\right)^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)r^2-D^2}{(Cr+D)^2},$$

oder:

$$14)\quad (u'+\frac{Ar^2}{Cr+D})^2+(v'+\frac{Br^2}{Cr+D})^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)r^2-D^2}{(Cr+D)^2}r^2.$$

Bezeichnen wir das von dem Mittelpunkte der Kugel als dem Anfange der Coordinaten auf die durch die Gleichung 13) charakterisirte Ebene gefällte Perpendikel durch P, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$P^2=\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2},$$

und soll nun die Kugelfläche von dieser Ebene in einem Kreise wirklich geschnitten oder von derselben wenigstens berührt werden, so muss $P \overline{\lt} r$, also:

$$\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2}\overline{\lt} r^2,$$

folglich:

$$(A^2+B^2+C^2)r^2-D^2 \overline{\gt} 0$$

sein. Unter dieser Voraussetzung ist also nach 14) die **Projection oder das Bild unsers Kugelkreises ein Kreis**; die Coordinaten des Mittelpunkts der Projection sind:

$$-\frac{Ar^2}{Cr+D},\quad -\frac{Br^2}{Cr+D};$$

und der Halbmesser der Projection ist:

$$r\sqrt{\frac{(A^2+B^2+C^2)r^2-D^2}{(Cr+D)^2}}$$

oder:

$$\pm\frac{r}{Cr+D}\sqrt{(A^2+B^2+C^2)r^2-D^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $Cr+D$ positiv oder negativ ist.

Wenn man die sogenannten Parameter der Ebene, worunter man namentlich in der Krystallographie die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen der x, y, z von dem Anfange der Coordinaten versteht, respective durch a, b, c bezeichnet; so kann man, wie man sogleich übersieht:

$$A=\frac{1}{a},\quad B=\frac{1}{b},\quad C=\frac{1}{c},\quad D=-1$$

setzen, und erhält dann für die Coordinaten des Mittelpunkts der Projection unsers Kreises aus dem Obigen die Ausdrücke:

$$\frac{cr^2}{a(c-r)},\quad \frac{cr^2}{b(c-r)};$$

für den Halbmesser der Projection aber den Ausdruck:

$$\pm\frac{cr}{c-r}\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)r^2-1}\,.$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\frac{c}{c-r}$ positiv oder negativ ist.

§. 5.

Vom Mittelpunkte der Kugel, welcher der Anfang der Coordinaten ist, fällen wir auf die durch die Gleichung 13) charakterisirte Ebene ein Perpendikel, und bezeichnen dessen Durchschnittspunkte mit der Kugelfläche durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$. Die Gleichungen dieses Perpendikels sind nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C},$$

und zur Bestimmung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ haben wir also die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}}{A}=\frac{\mathfrak{y}}{B}=\frac{\mathfrak{z}}{C},\quad \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2=r^2;$$

aus denen sich:

$$15)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{x}=\pm\dfrac{Ar}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \mathfrak{y}=\pm\dfrac{Br}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \mathfrak{z}=\pm\dfrac{Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{array}\right.$$

ergiebt. Die Gleichungen der vom Auge nach $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ gezogenen Geraden sind hiernach:

$$\frac{x}{\pm\dfrac{Ar}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}=\frac{y}{\pm\dfrac{Br}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}=\frac{z-r}{\pm\dfrac{Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-r},$$

also offenbar:

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z-r}{C\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und ist nun $(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')$ das Bild von $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, so ist:

$$\frac{\mathfrak{x}'}{A}=\frac{\mathfrak{y}'}{B}=-\frac{r}{C\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

also:

$$16)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{x}'=-\dfrac{Ar}{C\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \mathfrak{y}'=-\dfrac{Br}{C\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \mathfrak{z}'=0.\end{array}\right.$$

Legt man durch den Mittelpunkt der Tafel und den Mittelpunkt des Bildes unsers Kugelkreises eine Gerade, so ist deren Gleichung:

$$\frac{x}{-\dfrac{Ar^2}{Cr+D}}=\frac{y}{-\dfrac{Br^2}{Cr+D}},$$

also:

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B},$$

und man sieht nun auf der Stelle, dass diese Gleichung befriedigt wird, wenn man für x, y die obigen Werthe von $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ setzt, woraus man schliesst, dass der Mittelpunkt der Tafel, der Mittelpunkt des Bildes unsers Kugelkreises und die Bilder der Punkte, in denen die Kugelfläche von dem von dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene des Kugelkreises gefällten Perpendikel geschnitten wird, jederzeit in **einer** geraden Linie liegen.

§. 6.

Durch den Punkt (uvw) auf der Kugelfläche, dessen Coordinaten bekanntlich:

$$u = -2r\cos\alpha\cos\gamma,$$
$$v = -2r\cos\beta\cos\gamma,$$
$$w = r(1-2\cos\gamma^2) = -r\cos2\gamma$$

sind, denken wir uns eine beliebige Gerade gelegt, deren Gleichungen:

$$17)\qquad \frac{x+2r\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\theta} = \frac{y+2r\cos\beta\cos\gamma}{\cos\omega} = \frac{z+r\cos2\gamma}{\cos\varpi}$$

sein mögen, wo θ, ω, ϖ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen, welche der eine der beiden von dem Punkte (uvw) ausgehenden Theile unserer Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst.

Die Gleichungen des nach dem Punkte (uvw) gezogenen Kugelhalbmessers sind:

$$18)\;.\;.\;.\;.\;.\;\frac{x}{2\cos\alpha\cos\gamma} = \frac{y}{2\cos\beta\cos\gamma} = \frac{z}{\cos2\gamma}.$$

Soll die erstere Gerade, wie wir nun annehmen wollen, auf diesem Kugelhalbmesser senkrecht stehen oder die Kugelfläche berühren, so muss nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung:

$$19)\quad 2\cos\alpha\cos\gamma\cos\theta + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\omega + \cos2\gamma\cos\varpi = 0$$

oder:

$$20)\quad 2(\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\varpi)\cos\gamma = \cos\varpi$$

Statt finden.

Das Bild von (uvw) ist $(u'v'w')$, wo bekanntlich

$$u' = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r, \quad v' = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r, \quad w' = 0$$

ist. Durch dieses Bild legen wir eine beliebige Ebene, deren Gleichung:

$$\mathfrak{A}(x + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r) + \mathfrak{B}(y + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r) + \mathfrak{C}z = 0$$

sein mag. Soll nun aber diese Ebene durch die erste, durch den Punkt (uvw) gezogene Gerade gehen, oder diese durch die Gleichungen 17) charakterisirte Gerade in der Ebene liegen, so muss, wenn wir

$$x = \frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}}(z + r\cos 2\gamma) - 2r\cos\alpha\cos\gamma,$$

$$y = \frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}}(z + r\cos 2\gamma) - 2r\cos\beta\cos\gamma;$$

also, wie man leicht findet:

$$x + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r = \frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}}(z + r\cos 2\gamma) - r\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos 2\gamma,$$

$$y + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r = \frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}}(z + r\cos 2\gamma) - r\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos 2\gamma;$$

oder:

$$x + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r = \frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}}z + r\left(\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}} - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)\cos 2\gamma,$$

$$y + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r = \frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}}z + r\left(\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}} - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos 2\gamma$$

setzen, für jedes z:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{A}\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}} + \mathfrak{B}\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}} + \mathfrak{C})z \\ + r\{\mathfrak{A}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}} - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}} - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\}\cos 2\gamma\end{array}\right\} = 0$$

sein, woraus sich die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{A}\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}} + \mathfrak{B}\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}} + \mathfrak{C} = 0,$$

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}} - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}} - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) = 0$$

ergeben, so dass man also, wenn $\mathfrak{G}$ einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{G}\left(\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}}-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right),$$

$$\mathfrak{B}=-\mathfrak{G}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}}-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right),$$

$$\mathfrak{C}=-\mathfrak{G}\frac{\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta}{\cos\gamma\cos\overline{\omega}};$$

oder auch bloss:

$$\mathfrak{A}=\frac{\cos\omega}{\cos\overline{\omega}}-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

$$\mathfrak{B}=-\left(\frac{\cos\theta}{\cos\overline{\omega}}-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right),$$

$$\mathfrak{C}=-\frac{\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta}{\cos\gamma\cos\overline{\omega}};$$

offenbar auch bloss:

$$21)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\mathfrak{A}=\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega,\\ \mathfrak{B}=\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega},\\ \mathfrak{C}=\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta\end{cases}$$

setzen kann. Daher ist die Gleichung unserer Ebene:

$$22)\ \ldots\ \left.\begin{array}{l}(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\left(x+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r\right)\\ +(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega})\left(y+\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}r\right)\\ +(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)z\end{array}\right\}=0.$$

Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Tafel ist das Bild oder die Projection der ersten durch den Punkt (uvw) gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden, und die Gleichung dieses Bildes oder dieser Projection ist also:

$$23)\ \ldots.\ \left.\begin{array}{l}(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\left(x+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r\right)\\ +(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega})\left(y+\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}r\right)\end{array}\right\}=0$$

oder:

$$24)\ldots\frac{x+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r}{\cos\alpha\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\theta}=\frac{y+\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}r}{\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega}.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden von dem Punkte $(u'v'w')$ ausgehenden Theile des durch die vorstehenden Gleichungen charakterisirten Bildes mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch θ', ω', $\bar{\omega}'$; so ist, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet, nach 24):

$$\cos\theta'=G'(\cos\alpha\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\theta),$$
$$\cos\omega'=G'(\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega),$$
$$\cos\bar{\omega}'=0;$$

also, wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt:

$$1=G'^2\{(\cos\alpha\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\theta)^2+(\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)^2\},$$

welche Gleichung man mit Hülfe der beiden Gleichungen:

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,\quad \cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\bar{\omega}^2=1$$

leicht auf die Form:

$$1=G'^2\left\{\begin{array}{l}\cos\gamma^2\\ -[2(\cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\bar{\omega})\cos\gamma-\cos\bar{\omega}]\cos\bar{\omega}\end{array}\right\},$$

also nach 20) auf die Form

$$1=G'^2\cos\gamma^2$$

bringt, woraus sich

$$G'=\pm\frac{1}{\cos\gamma},$$

und daher nach dem Obigen:

$$25)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\theta'=\pm\dfrac{\cos\alpha\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\theta}{\cos\gamma},\\ \cos\omega'=\pm\dfrac{\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega}{\cos\gamma},\\ \cos\bar{\omega}'=0\end{array}\right.$$

ergiebt.

Es entsteht nun die Frage, wie man in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen hat, wenn die Winkel θ', ω', $\bar{\omega}'$ dem Theile

des Bildes der durch den Punkt (uvw) gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden entsprechen sollen, welcher als das Bild des Theils dieser Geraden zu betrachten ist, dem die Winkel θ, ω, ϖ entsprechen. Diese Frage kann auf folgende Art beantwortet werden.

Von dem Punkte (uvw) aus schneiden wir auf dem durch die Winkel θ, ω, ϖ bestimmten Theile der durch diesen Punkt gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden ein beliebiges Stück R ab, und bezeichnen durch X, Y, Z die Coordinaten des Endpunkts dieses Stücks; so ist:

$$X = -2r\cos\alpha\cos\gamma + R\cos\theta,$$

$$Y = -2r\cos\beta\cos\gamma + R\cos\omega,$$

$$Z = -r\cos 2\gamma + R\cos\varpi = -r(2\cos\gamma^2 - 1) + R\cos\varpi.$$

Von dem Auge ziehen wir nach dem Punkte (XYZ) eine Gerade, bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem Bilde der durch den Punkt (uvw) gelegten, durch die Gleichungen 17) charakterisirten Geraden durch $(X'Y'Z')$, und die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte $(u'v'w')$ durch R'; so ist:

$$X' = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r + R'\cos\theta',$$

$$Y' = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r + R'\cos\omega',$$

$$Z' = 0.$$

Die Gleichungen der durch das Auge und den Punkt (XYZ) gelegten Geraden sind:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z-r}{Z-r},$$

und es ist also:

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = -\frac{r}{Z-r},$$

woraus:

$$X' = -\frac{rX}{Z-r}, \quad Y' = -\frac{rY}{Z-r}$$

folgt; also nach dem Obigen:

$$X' = -\frac{2r\cos\alpha\cos\gamma - R\cos\theta}{2r\cos\gamma^2 - R\cos\varpi}r, \quad Y' = -\frac{2r\cos\beta\cos\gamma - R\cos\omega}{2r\cos\gamma^2 - R\cos\varpi}r.$$

Folglich ist nach dem Obigen:



$$-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}r+R'\cos\theta'=-\frac{2r\cos\alpha\cos\gamma-R\cos\theta}{2r\cos\gamma^2-R\cos\overline{\omega}}r,$$

$$-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}r+R'\cos\omega'=-\frac{2r\cos\beta\cos\gamma-R\cos\omega}{2r\cos\gamma^2-R\cos\overline{\omega}}r;$$

also:

$$26)\ldots\left\{\begin{array}{l}R'\cos\theta'=-\dfrac{(\cos\alpha\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\theta)Rr}{\cos\gamma(2r\cos\gamma^2-R\cos\overline{\omega})},\\[2ex] R'\cos\omega'=-\dfrac{(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)Rr}{\cos\gamma(2r\cos\gamma^2-R\cos\overline{\omega})};\end{array}\right.$$

und daher nach 25) offenbar:

$$R'=\mp\frac{Rr}{2r\cos\gamma^2-R\cos\overline{\omega}},$$

oder:

$$R'=\pm\frac{Rr}{R\cos\overline{\omega}-2r\cos\gamma^2}.$$

Nun kann man aber das ganz willkührliche R offenbar immer so klein annehmen, dass die Grösse $R\cos\overline{\omega}-2r\cos\gamma^2$ negativ wird, wobei man zu beachten hat, dass $2r\cos\gamma^2$ stets eine positive Grösse ist; und wollte man nun in den Gleichungen 25), also auch in der vorstehenden Gleichung die oberen Zeichen nehmen, so würde R' negativ ausfallen, was ungereimt ist, woraus sich ergiebt, dass man in den Gleichungen 25) die unteren Zeichen nehmen, also:

$$27)\ldots\left\{\begin{array}{l}\cos\theta'=-\dfrac{\cos\alpha\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\theta}{\cos\gamma},\\[2ex] \cos\omega'=-\dfrac{\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega}{\cos\gamma},\\[2ex] \cos\overline{\omega}'=0;\end{array}\right.$$

oder:

$$27^*)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\cos\theta'=\cos\theta-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\overline{\omega},\\[2ex] \cos\omega'=\cos\omega-\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\overline{\omega},\\[2ex] \cos\overline{\omega}'=0\end{array}\right.$$

setzen muss. Führt man diese Ausdrücke von $\cos\theta'$, $\cos\omega'$, $\cos\overline{\omega}'$ in die ganz allgemein gültigen Gleichungen 26) ein, so erhält man:

$$28)\ldots\ldots\ldots R'=\frac{Rr}{2r\cos\gamma^2-R\cos\overline{\omega}}.$$

Aus dem Punkte (uvw) lassen wir jetzt eine zweite auf dem nach (uvw) gezogenen Kugelhalbmesser senkrecht stehende Gerade ausgehen, und bezeichnen die von derselben mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$; so ist nach 27) für das Bild dieser Geraden:

$$29) \ldots \left\{\begin{aligned} \cos\theta_1' &= -\frac{\cos\alpha\cos\overline{\omega}_1 - \cos\gamma\cos\theta_1}{\cos\gamma}, \\ \cos\omega_1' &= -\frac{\cos\beta\cos\overline{\omega}_1 - \cos\gamma\cos\omega_1}{\cos\gamma}, \\ \cos\overline{\omega}_1' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir ferner den von den beiden von (uvw) ausgehenden, durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ und θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ bestimmten Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Ω, den von den Bildern dieser beiden Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Ω', so ist:

$$\cos\Omega = \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1,$$
$$\cos\Omega' = \cos\theta'\cos\theta_1' + \cos\omega'\cos\omega_1' + \cos\overline{\omega}'\cos\overline{\omega}_1'.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} & (\cos\alpha\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\theta)(\cos\alpha\cos\overline{\omega}_1 - \cos\gamma\cos\theta_1) \\ & + (\cos\beta\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\omega)(\cos\beta\cos\overline{\omega}_1 - \cos\gamma\cos\omega_1) \\ = \; & (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1 \\ & + \cos\gamma^2(\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1) \\ & - (\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega)\cos\gamma\cos\overline{\omega}_1 \\ & - (\cos\alpha\cos\theta_1 + \cos\beta\cos\omega_1)\cos\gamma\cos\overline{\omega} \\ = \; & (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1 \\ & + \cos\gamma^2(\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1) \\ & - (\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega})\cos\gamma\cos\overline{\omega}_1 \\ & - (\cos\alpha\cos\theta_1 + \cos\beta\cos\omega_1 + \cos\gamma\cos\overline{\omega}_1)\cos\gamma\cos\overline{\omega} \\ & + 2\cos\gamma^2\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1 \\ = \; & (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1 \\ & + \cos\gamma^2(\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1) \\ & - (\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega})\cos\gamma\cos\overline{\omega}_1 \\ & - (\cos\alpha\cos\theta_1 + \cos\beta\cos\omega_1 + \cos\gamma\cos\overline{\omega}_1)\cos\gamma\cos\overline{\omega} \\ = \; & \cos\gamma^2(\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1) \\ & - \tfrac{1}{2}\{2(\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega})\cos\gamma - \cos\overline{\omega}\}\cos\overline{\omega}_1 \\ & - \tfrac{1}{2}\{2(\cos\alpha\cos\theta_1 + \cos\beta\cos\omega_1 + \cos\gamma\cos\overline{\omega}_1)\cos\gamma - \cos\overline{\omega}_1\}\cos\overline{\omega} \\ = \; & \cos\gamma^2(\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1) \end{aligned}$$

nach 20). Nach 27) und 29) ist offenbar:

$$(\cos\alpha\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\theta)(\cos\alpha\cos\overline{\omega}_1-\cos\gamma\cos\theta_1)$$
$$+(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)(\cos\beta\cos\overline{\omega}_1-\cos\gamma\cos\omega_1)$$
$$=\cos\gamma^2(\cos\theta'\cos\theta_1'+\cos\omega'\cos\omega_1'+\cos\overline{\omega}'\cos\overline{\omega}_1').$$

Also ist:

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1$$
$$=\cos\theta'\cos\theta_1'+\cos\omega'\cos\omega_1'+\cos\overline{\omega}'\cos\overline{\omega}_1',$$

folglich nach dem Obigen:

$$\cos\Omega=\cos\Omega',\quad \Omega=\Omega';$$

weil die Winkel Ω und Ω' zwischen 0 und 180^0 enthalten sind.

Hieraus ergiebt sich nun der folgende wichtige Satz:

> Wenn von einem beliebigen Punkte der Kugelfläche zwei beliebige, die Kugelfläche berührende Gerade ausgezogen werden, so schliessen die Bilder dieser beiden Geraden auf der Tafel immer denselben Winkel mit einander ein wie die beiden in Rede stehenden Geraden selbst.

Gewöhnlich wird dieser Satz etwas anders ausgesprochen; der vorstehende Ausdruck desselben scheint mir aber der Natur der Sache am Meisten zu entsprechen; man kann hierüber auch meine frühere, eine mehrfach andere Tendenz als die vorliegende verfolgende Abhandlung über die stereographische Projection in Thl. XXXII. Nr. XXV. S. 280. vergleichen.

XXIV.

De parallelogrammis, quorum latera per quattuor puncta data transeant.

Auctore

Dre. *Christiano Fr. Lindman*,

Lect. Strengnesensi.

Puncta data A, B, C, D appellentur eorumque coordinatae orthogonales, servato ordine, sint x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4. Sint primum lineae per A et B transeuntes inter se parallelae itidemque lineae per C et D ductae inter se. Si tangentes angulorum, qui inter has lineas et axin abscissarum comprehenduntur, litteris t et ϑ ex ordine designantur, inveniuntur aequationes

lineae per A ductae $y-y_1 = t(x-x_1)$,
„ „ B „ $y-y_2 = t(x-x_2)$,
„ „ C „ $y-y_3 = \vartheta(x-x_3)$,
„ „ D „ $y-y_4 = \vartheta(x-x_4)$.

Coordinatae punctorum, ubi linea prima tertiam et quartam secat, sunt:

$$\xi_{1,3} = \frac{tx_1-\vartheta x_3+y_3-y_1}{t-\vartheta}, \quad \eta_{1,3} = \frac{t\vartheta(x_1-x_3)+ty_3-\vartheta y_1}{t-\vartheta},$$

$$\xi_{1,4} = \frac{tx_1-\vartheta x_4+y_4-y_1}{t-\vartheta}, \quad \eta_{1,4} = \frac{t\vartheta(x_1-x_4)+ty_4-\vartheta y_1}{t-\vartheta};$$

e quibus posteriores substituendis x_4, y_4 pro x_3, y_3 inventae sunt.

Coordinatae puncti, ubi secunda linea tertiam secat, inveniuntur, si in prioribus x_1, y_1 in x_2, y_2 mutantur. Ita reperimus:

$$\xi_{2,3} = \frac{tx_2-\vartheta x_3+y_3-y_2}{t-\vartheta}, \quad \eta_{2,3} = \frac{t\vartheta(x_2-x_3)+ty_3-\vartheta y_2}{t-\vartheta}.$$

Facile patet, lineam ($=s_1$) puncta primum et secundum conjungentem esse unum et lineam ($=s_2$) punctum primum et tertium conjungentem esse alterum latus contiguum parallelogrammi quaesiti atque ideo

$$s_1^2 = \frac{(\vartheta(x_4 - x_3) + y_3 - y_4)^2 (1 + t^2)}{(t - \vartheta)^2},$$

$$s_2^2 = \frac{(t(x_1 - x_2) + y_2 - y_1)^2 (1 + \vartheta^2)}{(t - \vartheta)^2}.$$

Angulus ($= V$), quem hae lineae comprehendunt, ejusmodi est, ut sit

$$\operatorname{tg} V = \frac{t - \vartheta}{1 + t\vartheta},$$

$$\operatorname{Sin}^2 V = \frac{(t - \vartheta)^2}{(1 + t^2)(1 + \vartheta^2)}.$$

Itaque invenitur superficies ($= P_1$) parallelogrammi quaesiti:

$$P_1 = \pm \frac{(t(x_1 - x_2) + y_2 - y_1)(\vartheta(x_4 - x_3) + y_3 - y_4)}{t - \vartheta}, \quad (1)$$

ubi signum ita eligendum est, ut P_1 positiva fiat.

Indicibus permutandis reperitur superficies, si linea per A ducta lineae per C aut D transeunti parallela fingitur. Ita fit:

$$P_2 = \pm \frac{(t(x_1 - x_3) + y_3 - y_1)(\vartheta(x_4 - x_2) + y_2 - y_4)}{t - \vartheta}, \quad (2)$$

$$P_3 = \pm \frac{(t(x_1 - x_4) + y_4 - y_1)(\vartheta(x_2 - x_3) + y_3 - y_2)}{t - \vartheta}; \quad (3)$$

ubi signa eodem atque antea modo eligenda sunt.

Si quis eos tangentium t et ϑ valores quaesiverit, qui maximum aut minimum parallelogrammum efficiant, differentiatione inveniet, neque maximum nec minimum reperiri.

Jam vero parallelogramma illa rectangula sumamus vel, quod idem est, $\vartheta = -\frac{1}{t}$. Ita e formulis (1), (2), (3) inveniemus:

$$R_1 = \pm \frac{(t(x_1 - x_2) + y_2 - y_1)(t(y_3 - y_4) + x_3 - x_4)}{1 + t^2},$$

$$R_2 = \pm \frac{(t(x_1 - x_3) + y_3 - y_1)(t(y_2 - y_4) + x_2 - x_4)}{1 + t^2},$$

$$R_3 = \pm \frac{(t(x_1 - x_4) + y_4 - y_1)(t(y_3 - y_2) + x_3 - x_2)}{1 + t^2};$$

vel si brevitatis caussa ponimus:

$$A_1 = (x_3 - x_4)(y_2 - y_1),$$
$$B_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_4),$$
$$C_1 = (x_1 - x_2)(y_3 - y_4);$$

$$A_2 = (x_2 - x_4)(y_3 - y_1),$$
$$B_2 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_4),$$
$$C_2 = (x_1 - x_3)(y_2 - y_4);$$

$$A_3 = (x_3 - x_2)(y_4 - y_1),$$
$$B_3 = (x_1 - x_4)(x_3 - x_2) + (y_4 - y_1)(y_3 - y_2),$$
$$C_3 = (x_1 - x_4)(y_3 - y_2):$$

$$R_1 = \pm \frac{A_1 + B_1 t + C_1 t^2}{1 + t^2}, \tag{4}$$

$$R_2 = \pm \frac{A_2 + B_2 t + C_2 t^2}{1 + t^2}, \tag{5}$$

$$R_3 = \pm \frac{A_3 + B_3 t + C_3 t^2}{1 + t^2}. \tag{6}$$

Numquid rectangulum sit maximum aut minimum, jam quaeramus. Si primum R_1 consideramus, differentiando inveniemus:

$$\frac{dR_1}{dt} = \pm \frac{B_1 + 2(C_1 - A_1)t - B_1 t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Posita $\frac{dR_1}{dt} = 0$, invenitur:

$$t = \frac{1}{B_1} \{ C_1 - A_1 \pm \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2} \}.$$

Repetita differentiatio, quum termini, qui propter aequationem $\frac{dR_1}{dt} = 0$ evanescunt, negliguntur, dat:

$$\frac{d^2 R_1}{dt^2} = \pm \frac{2(C_1 - A_1 - B_1 t)}{(1 + t^2)^2}.$$

Si valores inventi in (4) introducuntur, reductionibus quibusdam factis, prodeunt:

$$R_1' = \tfrac{1}{2}(C_1 + A_1 + \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2}),$$

$$R_1'' = -\tfrac{1}{2}(C_1 + A_1 - \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2}).$$

Signa ita sumenda esse, ex eo intelligitur, quod est

$$(C_1-A_1)^2+B_1^2>(C_1+A_1)^2 \text{ vel } B_1^2>4A_1C_1,$$

id quod valoribus quantitatum A_1, B_1, C_1 considerandis elucet. Jam sequitur, ut in $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ signum superius pro priore valore ipsius t, sed signum inferius pro posteriore eligendum sit. In utraque igitur re evadit $\frac{d^2R_1}{dt^2}<0$, atque ideo est et R_1' et R_1'' maximum. Minimum non esse etiam sine calculo patet, quia lineae ita duci possunt, ut nullum rectangulum prodeat.

Permutandis indicibus, maxima rectangulorum R_2 et R_3 inveniuntur.

Jam quaeramus, quando rectangula, de quibus agitur, in quadrata transeant. Tum est

$$\{t(x_1-x_2)+y_2-y_1\}^2=\{t(y_3-y_4)+x_3-x_4\}^2,$$

unde invenitur:

$$t'=\frac{x_3-x_4+y_1-y_2}{x_1-x_2-y_3+y_4},$$

$$t''=-\frac{x_3-x_4-y_1+y_2}{x_1-x_2+y_3-y_4}.$$

Itaque sunt latera quadratorum, his valoribus respondentium:

$$\sigma_1'=\pm\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)}{x_1-x_2-y_3+y_4},$$

$$\sigma_1''=\pm\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)}{x_1-x_2+y_3-y_4}.$$

Si prius x_3, y_3, deinde x_4, y_4 pro x_2, y_2 et contra posuerimus, bina quadrata inveniemus. Itaque sex omnino sunt quadrata, quorum latera per quattuor puncta data transeant. Cfr. Clausen in hoc Arch. Tom XV. pag. 238.

XXV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Dr. Christian Fr. Lindman in Strengnäs in Schweden.

1. Invenire terminum generalem et summam seriei $n+1$ terminorum

$$1+\frac{3}{4}+\frac{11}{16}+\frac{43}{64}+\ldots.$$

2. Omnis numerus formae $2^{2p+1}+1$ et formae $2^{2p}-1$ per 3 divisibilis esse demonstratur.

3. E tribus punctis datis (in eadem linea non jacentibus) ut centris tres circulos describere, qui tres tangentes communes habeant.

XXVI.

Miscellen.

Geometrischer Satz.

Von dem Herausgeber.

In einem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise sei eine Sehne $AB=s$ gezogen, welche den Kreis in zwei Abschnitte theilt. Ueber dieser Sehne $AB=s$ als Grundlinie beschreibe man in die beiden Abschnitte Dreiecke und bestimme die Durchschnittspunkte der Höhen derselben. Man soll den geometrischen Ort dieser Durchschnittspunkte finden.

Man nehme A als Anfang und $AB=s$ als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, und bezeichne in diesem Systeme die Coordinaten des Mittelpunkts des Kreises durch a, b; so ist

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

die Gleichung des Kreises. Nun ist aber offenbar $a^2+b^2=r^2$, und folglich:

$$x^2+y^2-2ax-2by=0 \text{ oder } x^2+y^2=2ax+2by$$

die Gleichung des Kreises; auch ist klar, dass $s=2a$ ist.

Die Spitze S eines beliebigen der über $AB=s$ als Grundlinie in einen der beiden Kreisabschnitte beschriebenen Dreiecke sei durch die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bestimmt; so ist

$$y=\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}-s}(x-s)$$

die Gleichung der Seite BS dieses Dreiecks; also ist

$$y=-\frac{\mathfrak{x}-s}{\mathfrak{y}}x \text{ oder } y=-\frac{\mathfrak{x}-2a}{\mathfrak{y}}x$$

die Gleichung des von A auf die Seite BS gefällten Perpendikels. Bezeichnen nun x, y die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Höhen unsers Dreiecks, so hat man zu deren Bestimmung offenbar die beiden Gleichungen:

$$x=\mathfrak{x},\quad y=-\frac{\mathfrak{x}-2a}{\mathfrak{y}}x;$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{x}=x,\quad \mathfrak{y}=-\frac{(x-2a)x}{y}.$$

Da der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ in dem gegebenen Kreise liegt, so ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2=2a\mathfrak{x}+2b\mathfrak{y},$$

und die Gleichung des zu bestimmenden Orts ist also:

$$x^2+\frac{(x-2a)^2x^2}{y^2}=2ax-\frac{2bx(x-2a)}{y}$$

oder

$$x(x-2a)+\frac{x^2(x-2a)^2}{y^2}+\frac{2bx(x-2a)}{y}=0,$$

also:

$$1+\frac{x(x-2a)}{y^2}+\frac{2b}{y}=0$$

oder

$$x^2+y^2-2ax+2by=0,$$

oder

$$x^2+y^2=2ax-2by,$$

d. i., weil $a^2+b^2=r^2$ ist, wie man leicht findet:

$$(x-a)^2+(y+b)^2=r^2.$$

Folglich ist der Ort ein mit dem Halbmesser r aus dem durch die Coordinaten a, $-b$ bestimmten Mittelpunkte beschriebener Kreis.

Ist e die Entfernung des Durchschnittspunkts der drei Höhen des oben betrachteten Dreiecks von dessen Spitze S, so ist:

$$e^2=(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2=(y-\mathfrak{y})^2,$$

also nach dem Obigen:

$$e^2=\left\{y+\frac{(x-2a)x}{y}\right\}^2=\frac{(x^2+y^2-2ax)^2}{y^2},$$

und folglich, weil

$$x^2+y^2-2ax=-2by$$

ist:

$$e^2=4b^2, \quad e=\pm 2b;$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem b positiv oder negativ ist. Also ist e eine constante Grösse.

Von dem Herausgeber.

Um die beiden Gleichungen

$$x-y=a, \quad x^4-y^4=a^4$$

aufzulösen, setze man

$$x+y=u;$$

so ist:

$$2x=u+a, \quad 2y=u-a;$$

also:

$$2(x^4-y^4)=u^3a+ua^3,$$

und folglich

$$2a^4 = u^3a + ua^3, \quad 2a^3 = u(a^2 + u^2)$$

oder:

$$\frac{u}{a}\{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2\} = 2.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist offenbar $\frac{u}{a} = 1$, und dividirt man nun mit $\frac{u}{a} - 1$ in $\left(\frac{u}{a}\right)^3 + \frac{u}{a} - 2$ hinein, so erhält man zur Bestimmung der beiden anderen Wurzeln die Gleichung:

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \frac{u}{a} + 2 = 0,$$

durch deren Auflösung sich

$$\frac{u}{a} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-7} = -\tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{-7})$$

ergiebt, so dass also die beiden anderen Wurzeln imaginär sind.

Wendet man auf die Gleichung

$$\left(\frac{u}{a}\right)^3 + \frac{u}{a} - 2 = 0$$

die cardanische Formel an, so erhält man:

$$\frac{u}{a} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27}})} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{27}})}$$

oder:

$$\frac{u}{a} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{28}{27}})} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{\frac{28}{27}})}.$$

Diese Wurzel ist reell, und da nun nach dem Obigen die Gleichung nur eine der Einheit gleiche reelle Wurzel hat, so ist

$$\sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{28}{27}})} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{\frac{28}{27}})} = 1.$$

Wie ist die Richtigkeit dieser Gleichung auf andere Art leicht nachzuweisen?

Die Bestimmung von x und y ergiebt sich aus dem Obigen von selbst.

Durch Rechnung mit Logarithmen verificirt man vorstehende Gleichung leicht wie folgt:

$$\log 28 = 1,4471580$$
$$\log 27 = 1,4313638$$
$$\log\frac{28}{27} = 0,0157942$$
$$\log\sqrt{\frac{28}{27}} = 0,0078971$$
$$\sqrt{\frac{28}{27}} = 1,018350$$
$$1+\sqrt{\frac{28}{27}} = 2,018350$$
$$1-\sqrt{\frac{28}{27}} = -0,018350$$
$$\log(1+\sqrt{\frac{28}{27}}) = 0,3049965$$
$$\log(1-\sqrt{\frac{28}{27}}) = 0,2636361-2_n$$
$$\log\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{28}{27}})} = 0,1016655$$
$$\log\sqrt[3]{(1-\sqrt{\frac{28}{27}})} = 0,4212120-1_n$$
$$\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{28}{27}})} = 1,263763$$
$$\sqrt[3]{(1-\sqrt{\frac{28}{27}})} = -0,263762$$
$$\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{28}{27}})}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{\frac{28}{27}})} = 1,000001.$$

Von dem Herausgeber.

Ein dem Wesentlichen nach bekannter Beweis des Ausdrucks von **Wallis** für π lässt sich mit besonderer Strenge auf folgende Art darstellen.

Aus der bekannten Reductionsformel

$$\int\sin x^n\partial x = -\frac{1}{n}\sin x^{n-1}\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin x^{n-2}\partial x$$

ergiebt sich sogleich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^n\partial x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^{n-2}\partial x,$$

woraus man, wenn der Kürze wegen

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n \partial x$$

gesetzt wird, die Relation

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

erhält.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, also etwa $n = 2\mu$, so ist:

$$J_{2\mu} \;\;= \frac{2\mu - 1}{2\mu} J_{2\mu-2},$$

$$J_{2\mu-2} = \frac{2\mu - 3}{2\mu - 2} J_{2\mu-4},$$

$$J_{2\mu-4} = \frac{2\mu - 5}{2\mu - 4} J_{2\mu-6},$$

u. s. w.

$$J_4 = \tfrac{3}{4} J_2,$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2} J_0;$$

also durch Multiplication:

$$J_{2\mu} = \frac{1.3.5.7 \ldots. (2\mu - 1)}{2.4.6.8 \ldots. 2\mu} J_0,$$

und folglich, weil

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x = \frac{\pi}{2}$$

ist:

$$J_{2\mu} = \frac{1.3.5.7 \ldots. (2\mu - 1)}{2.4.6.8 \ldots. 2\mu} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ist ferner n eine ungerade Zahl, etwa $n = 2\mu + 1$, so ist:

$$J_{2\mu+1} = \frac{2\mu}{2\mu + 1} J_{2\mu-1},$$

$$J_{2\mu-1} = \frac{2\mu - 2}{2\mu - 1} J_{2\mu-3},$$

$$J_{2\mu-3} = \frac{2\mu - 4}{2\mu - 3} J_{2\mu-5},$$

u. s. w.

$$J_5 = \tfrac{4}{5} J_3,$$

$$J_3 = \tfrac{2}{3} J_1;$$

also durch Multiplication:

$$J_{2\mu+1} = \frac{2.4.6.8....2\mu}{3.5.7.9....(2\mu+1)} J_1,$$

und folglich, weil offenbar

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \partial x = 1$$

ist:

$$J_{2\mu+1} = \frac{2.4.6.8....2\mu}{3.5.7.9....(2\mu+1)}.$$

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist allgemein:

$$\sin x^n > \sin x^{n+1},$$

also, nach dem bekannten Hauptsatze von den bestimmten Integralen offenbar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n \partial x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{n+1} \partial x$$

oder in der obigen Bezeichnung allgemein $J_n > J_{n+1}$, folglich:

$$J_{2\mu} > J_{2\mu+1},$$

und daher nach dem Obigen:

$$\frac{1.3.5.7....(2\mu-1)}{2.4.6.8....2\mu} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6.8....2\mu}{3.5.7.9....(2\mu+1)},$$

woraus:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2.2.4.4.6.6....2\mu.2\mu}{1.3.3.5.5.7....(2\mu-1)(2\mu+1)}$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} .... \frac{2\mu}{2\mu-1} \cdot \frac{2\mu}{2\mu+1}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$J_{2\mu+2} < J_{2\mu+1},$$

also:

$$\frac{1.3.5.7....(2\mu+1)}{2.4.6.8....(2\mu+2)} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6.8....2\mu}{3.5.7.9....(2\mu+1)},$$

woraus:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2.4.4.6.6....2\mu.(2\mu+2)}{1.3.3.5.5.7....(2\mu+1)(2\mu+1)}$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{2\mu+2}{2\mu+1}.$$

Setzt man:

$$A_\mu = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2\mu}{2\mu-1}\cdot\frac{2\mu}{2\mu+1},$$

$$B_\mu = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{2\mu+2}{2\mu+1};$$

so ist: $A_\mu < \frac{\pi}{2} < B_\mu$, also, weil $B_\mu = \frac{2\mu+2}{2\mu+1} A_\mu = (1 + \frac{1}{2\mu+1}) A_\mu$ ist:

$$A_\mu < \frac{\pi}{2} < (1 + \frac{1}{2\mu+1}) A_\mu.$$

Die Differenz der beiden Gränzen ist $\frac{A_\mu}{2\mu+1}$, und da $A_\mu < \frac{\pi}{2}$ ist, so ist diese Differenz kleiner als $\frac{\pi}{2(2\mu+1)}$, kann also beliebig klein gemacht werden, wenn man nur μ gross genug nimmt.

Das Wesentliche dieser Darstellung gehört Sturm an; m. s. Cours d'Analyse par M. Sturm, publié d'après le voeu de l'autenr par M. E. Prouhet. Tome II. Paris. 1859. p. 9., ein vieles Schöne enthaltendes Buch.

Geometrischer Lehrsatz.

Von Herrn Professor Simon Spitzer in Wien.

Wenn im Kreise ein Centriwinkel und ein Peripheriewinkel auf denselben Bogen aufstehen, so ist bekanntlich der Centriwinkel zweimal so gross als der Peripheriewinkel. Ein Satz, der diesem analog ist, gilt auch für die Kugel. Schneidet man nämlich eine Kugel durch eine Ebene und verbindet jeden Punkt des Schnitts sowohl mit dem Centrum der Kugel als auch mit einem beliebigen Punkte jenes Theils der Kugeloberfläche, welcher mit dem Centrum auf derselben Seite der Ebene liegt, so erhält man zwei Kegelflächen, die eine gemeinschaftliche Basis haben; die Spitze der einen liegt im Centrum, die Spitze der anderen in der Perlpherie der Kugel. Führt man sodann durch die Spitzen beider Kegel eine Ebene, welche beide Kegel in geraden Linien, die Kugel aber in einem grössten Kreise schneidet, so ist der Winkel, welcber gebildet wird durch den Schnitt der genannten Ebene mit dem Kegel, dessen Spitze in der Kugeloberfläche liegt, halb so gross als der Winkel, welcher entsteht durch den Schnitt derselben Ebene mit dem Kegel, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt.

Schreiben des Herrn E. Bacaloglo in Bucarest an den Herausgeber über die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Bucarest $\frac{28.\text{ Mai}}{2.\text{ Juni}}$ 1862.

Gestatten Sie mir, Ihnen eine modificirte Ableitung einiger Formeln aus der sphärischen Trigonometrie mitzutheilen.

Jedermann weiss, dass die Formel

$$1)\quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$ aus dieser anderen:

$$2)\quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

mit Hülfe der sphärischen Polar- oder Supplementardreiecke abgeleitet werden kann. Es bezeichnen dabei a, b, c die Seiten, A, B, C aber die Winkel eines sphärischen Dreiecks. Diese Ableitung ist sehr einfach, nur bleibt Anfängern und wenig Geübteren im mathematischen Nachdenken, denen die Reciprocität der polaren Dreiecke nicht ganz klar ist, der Verdacht, als ob die Formel 2) eine allgemeine, Formel 1) aber nur für das einem gegebenen Dreiecke entsprechende Polardreieck wahr sei. Ausserdem scheint es mir nicht ganz ohne Interesse zu sein, Formel 1) direct aus 2), d. h. ohne Zuhilfenahme der polaren Dreiecke abzuleiten, und dies geschieht ganz einfach in folgender Weise. Man addire zu 2) das Product der Gleichungen

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \quad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

und dann ergiebt sich:

$$\cos A + \cos B \cos C$$

$$= \frac{(\cos a - \cos b \cos c)\sin^2 a + (\cos b - \cos a \cos c)(\cos c - \cos a \cos b)}{\sin^2 a \sin b \sin c}$$

$$= \cos a \, \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin b \sin c};$$

und wenn man sich erinnert, dass

$$\sin B = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin c},$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b};$$

so findet man $\cos A + \cos B \cos C = \cos a \sin B \sin C$ oder auch $\cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$ *).

*) Mir war diese Ableitung nicht neu, jedoch theile ich sie immerhin mit, um sie wieder in Erinnerung zu bringen. G.

XXVII.

Ueber den Schwerpunkt und dessen nützliche Anwendung in der Stereometrie.

Von

Herrn *Corneille-L. Landré*,

Privat-Lehrer der Mathematik in Utrecht.

---

§. 1.

Ueber die Bestimmung der Schwerpunkte der Vielecke.

I. Die drei geraden Linien, welche je eine Ecke eines Dreiecks mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbinden, schneiden sich bekanntlich in dem nämlichen Punkte, und zwar in dem Schwerpunkte des Dreiecks. Dass dieser Durchschnittspunkt der Schwerpunkt ist, ist so bekannt, dass es überflüssig wäre, es auf analoge Weise wie die übrigen Sätze in diesem Aufsatze zu begründen.

Wir nennen gleich am Anfange, der Einfachheit der Bezeichnung wegen, das Centrum der mittleren Abstände von zwei oder mehreren Punkten den Schwerpunkt dieser Punkte.

Theilt man ein beliebiges Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so liegt natürlich der Schwerpunkt des Vierecks auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Dreiecke. Ohne nun den Grundsatz der Statik (Gleichheit der statischen Momente) zu benutzen, kann man leicht den Schwerpunkt des Vierecks bestimmen, mittelst des einleuchtenden Princips, dass der Durchschnittspunkt zweier Schwerlinien der Schwer-

punkt ist. Ich zog nämlich die zweite Diagonale des Vierecks, wodurch das Viereck aufs Neue in zwei Dreiecke getheilt war, deren Schwerpunkte ich wieder durch eine gerade Linie verband, und also eine zweite Linie bekam, worauf der Schwerpunkt des Vierecks lag. Der Schwerpunkt selbst war daher völlig bestimmt. Das Gesetz von der Gleichheit der Momente bewährte sich in der That, wie folgende Rechnung zeigt.

Schneiden sich die beiden Diagonalen AC und BD des Vierecks $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 1.) im Punkte a, nehmen wir $Ab = Cb$, $Ac = Bc$, $Cd = Dd$, $Be = De$; so ist der Durchschnittspunkt o von Bb und Cc der Schwerpunkt des Dreiecks ABC; p (Durchschnittspunkt von Ad und Db) der Schwerpunkt des Dreiecks ACD; deshalb op eine Schwerlinie des Vierecks; q (Durchschnittspunkt von Ae und Dc) der Schwerpunkt des Dreiecks ABD, und endlich r (Durchschnittspunkt von Bd und Ce) der Schwerpunkt des Dreiecks BCD; daher ist qr die zweite Schwerlinie des Vierecks. Der Punkt z, in welchem sich op und qr schneiden, ist mithin der Schwerpunkt des Vierecks.

Nun ist bekanntlich $Bb = 3ob$, $Db = 3pb$, folglich $op \parallel BD$: op schneide die Diagonale AC in f, so haben wir denn auch: $Ba = 3of$, $Da = 3pf$; ebenso schneiden sich qr und BD im Punkte g, $qr \parallel AC$, $Aa = 3qg$, $Ca = 3rg$; das Viereck $afzg$ ist also ein Parallelogramm.

Weiter haben wir:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = Ba : Da = of : pf.$$

$$pz = pf - fz = \tfrac{1}{3}Da - ag,$$

$$oz = of + fz = \tfrac{1}{3}Ba + ag.$$

Daher:

$$pz : oz = Da - 3ag : Ba + 3ag,$$

aber

$$Da - 3ag = De + ae - 2ae = Be - ae = Ba,$$

$$Ba + 3ag = Be - ae + 2ae = De + ae = Da:$$

folglich:

$$pz : oz = Ba : Da.$$

Wir erhalten also, was wir suchten:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = pz : oz,$$

oder:

$$\Delta ABC \times oz = \Delta ACD \times pz.$$

Weil nun $of + fp = pz + oz$ ist, so findet sich aus obigen Proportionen: $of = pz$, $oz = fp$, welches ein leichtes Mittel zur Construction des Schwerpunktes des Vierecks darbietet, wie auch Herr Möbius in seiner Statik bemerkt hat.

Man findet natürlich auch:

$$\Delta ABD \times qz = \Delta BCD \times rz, \quad qz = rg, \quad qg = rz.$$

Aus obigen Proportionen leitet man noch leicht die folgenden ab:

$$\text{Viereck } ABCD : \Delta ABC = op : pz,$$

$$\text{Viereck } ABCD : \Delta ACD = op : oz,$$

$$\text{Viereck } ABCD : \Delta ABD = qr : rz,$$

$$\text{Viereck } ABCD : \Delta BCD = qr : qz;$$

welche ich nur deshalb erwähne, weil ich dieselben bei der Bestimmung der Schwerpunkte der anderen Vielecke benutzen werde.

II. Das Fünfeck ($ABCDE$, Taf. IV. Fig. 2.) lässt sich auf fünf Arten durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein Viereck theilen. In unserer Zeichnung ist:

a der Schwerpunkt des Dreiecks ABE,
b „ „ „ „ BCE,
c „ „ „ „ ABC,
d „ „ „ „ ACE;

mithin ist der Punkt o, worin sich ab und cd schneiden, der Schwerpunkt des Vierecks $ABCE$. Da nun e der Schwerpunkt des Dreiecks CDE ist, so ist oe eine Schwerlinie des Fünfecks.

Weiter ist:

f der Schwerpunkt des Dreiecks BCD,
g „ „ „ „ BDE;

also ist der Punkt p, worin sich be und fg schneiden, der Schwerpunkt des Vierecks $BCDE$; ap ist deshalb eine zweite Schwerlinie des Fünfecks. Der Durchschnittspunkt z von oe und ap ist daher der Schwerpunkt des Fünfecks.

Nun haben wir bewiesen:

$$\begin{array}{l} \text{Viereck } ABCE : \triangle BCE = ab : ao \\ \underline{\qquad \triangle BCE : \triangle CDE = ep : bp} \\ \text{Viereck } ABCE : \triangle CDE = ab \times ep : ao \times bp. \end{array}$$

Nun werden die drei Seiten des Dreiecks *obe* von der Geraden *ap* geschnitten; deshalb führt die Theorie der Transversalen auf folgende Gleichung:

$$ab \times oz \times ep = ao \times ze \times bp,$$

oder:

$$ab \times ep : ao \times bp = ze : oz.$$

Mithin ergiebt sich, was wir suchten:

$$\text{Viereck } ABCE : \triangle CDE = ze : oz.$$

Gleichfalls haben wir:

$$\begin{array}{l} \text{Viereck } BCDE : \triangle BCE = be : pe \\ \underline{\qquad \triangle BCE : \triangle ABE = ao : bo} \\ \text{Viereck } BCDE : \triangle ABE = ao \times be : pe \times bo. \end{array}$$

Nun kann aber auch *oe* als Transversale des Dreiecks *abp* betrachtet werden, folglich haben wir:

$$ao \times be \times pz = pe \times az \times bo,$$

oder:

$$ao \times be : pe \times bo = az : pz.$$

Deshalb:

$$\text{Viereck } BCDE : \triangle ABE = az : pz.$$

Verbinde ich nun den Schwerpunkt *i* des Dreiecks *ADE* mit dem Schwerpunkte *q* des Vierecks *ABCD*, so soll die Verbindungslinie *iq* durch den Schwerpunkt *z* des Fünfecks gehen, wie es auch in der That in der Figur der Fall ist. Es giebt natürlich fünf solche Schwerlinien, welche sich im Punkte *z* schneiden.

Zugleich ist uns das Mittel dargeboten, den Schwerpunkt zweier Dreiecke zu finden, welche nur eine Ecke gemeinschaftlich haben. Z. B. die Gerade *ce*, welche die Schwerpunkte der beiden Dreiecke *ABC* und *CDE* verbindet, ist eine Schwerlinie der aus beiden Dreiecken zusammengesetzten Figur. Zieht man nun eine Gerade durch *d* (Schwerpunkt des Dreiecks *ACE*) und durch *z*, so wird offenbar der Durchschnittspunkt (*s*) von *dz* und *ce* der gesuchte Schwerpunkt der beiden Dreiecke *ABC* und *CDE* sein.

Noch ziehe man cz, welche de schneiden wird in r (Schwerpunkt des Vierecks $ACDE$). Nun hat man:

$$\begin{aligned} \Delta ABC : \Delta ACE &= od : co \\ \Delta ACE : \Delta CDE &= re : dr \\ \hline \Delta ABC : \Delta CDE &= od \times re : co \times dr. \end{aligned}$$

Weil nun die Geraden cr, eo und ds durch je eine Ecke des Dreiecks und durch den nämlichen Punkt (z) gehen, so lehrt die Theorie des Transversalen:

$$od \times re \times cs = co \times dr \times es.$$

oder:

$$od \times re : co \times dr = es : cs,$$

daher:

$$\Delta ABC : \Delta CDE = es : cs;$$

folglich auch:

$$\Delta ABC + \Delta CDE : \Delta CDE = ce : cs;$$

wir hatten schon: $\Delta CDE : \Delta ACE = dr : re$

$$\Delta ABC + \Delta CDE : \Delta ACE = ce \times dr : cs \times re.$$

Betrachten wir nun cr als Transversale des Dreiecks des, alsdann ist:

$$ce \times sz \times dr = sc \times zd \times re,$$

oder:

$$ce \times dr : cs \times re = zd : sz;$$

wir erhalten also:

$$\Delta ABC + \Delta CDE : \Delta ACE = zd : sz.$$

III. In dem Sechsecke (Taf. IV. Fig. 3.) ist:

a der Schwerpunkt	des	Dreiecks	DEF,
b „	„	„	„	CDF,
o „	„	„	Vierecks	$CDEF$,
p „	„	„	„	$ABCF$,
q „	„	„	Fünfecks	$ABCDF$;

aq und op sind deshalb Schwerlinien und deren Durchschnittspunkt z ist der Schwerpunkt des Sechsecks. Nun ist schon im Vorigen bewiesen:

$$\text{Viereck } CDEF : \triangle CDF = ab : ao$$
$$\triangle CDF : \text{Viereck } ABCF = pq : bq$$

also: $\text{Viereck } CDEF : \text{Viereck } ABCF = ab \times pq : ao \times bq.$

Da wieder aq Transversale des Dreiecks pob ist, so haben wir:

$$ab \times pq \times zo = ao \times bq \times pz,$$

oder:

$$ab \times pq : ao \times bq = pz : oz;$$

daher:

$$\text{Viereck } CDEF : \text{Viereck } ABCF = pz : zo.$$

Wir haben aber auch:

$$\text{Fünfeck } ABCDF : \triangle CDF = bp : pq$$
$$\triangle CDF : \triangle DEF = ao : bo$$
$$\text{Fünfeck } ABCDF : \triangle DEF = bp \times ao : pq \times bo.$$

Nun betrachte man das Dreieck abq mit dessen Transversale po, wodurch sich ergiebt:

$$ao \times bp \times qz = bo \times pq \times az,$$

oder:

$$bp \times ao : pq \times bo = az : qz;$$

so dass wir wieder erhalten:

$$\text{Fünfeck } ABCDF : \triangle DEF = az : qz.$$

In dem Sechsecke giebt es neun Schwerlinien, welche sich im Punkte z schneiden, denn man kann dasselbe auf sechs Arten in ein Dreieck und ein Fünfeck, und auf drei Arten in zwei Vierecke zerlegen.

Auch kann man den Schwerpunkt zweier von einander entfernten, obgleich in der nämlichen Ebene liegenden Dreiecke finden, wofür ich ein neues Sechseck gezeichnet habe (Taf. IV. Fig. 4.), weil in Taf. IV. Fig. 3. alle zu suchenden Schwerpunkte einander so nahe kommen, dass die Linien schwer zu unterscheiden sein würden.

In Taf. IV. Fig. 4. habe ich die Schwerpunkte nicht construirt, sondern nur gewählt, welches aber der Beweisführung nicht schadet, wie man sehen wird. Sei denn:

a der Schwerpunkt des Dreiecks ABC,
p „ „ „ Vierecks $ACDF$,
q „ „ „ Fünfecks $ABCDF$.

Letzterer Punkt liegt natürlich auf ap zwischen a und p.

b der Schwerpunkt des Dreiecks DEF;

deshalb ist bq eine Schwerlinie des Sechsecks.

r der Schwerpunkt des Fünfecks $ACDEF$,

welcher auf pb zwischen p und b liegt, ar ist die zweite Schwerlinie des Sechsecks; der Durchschnittspunkt (z) von ar und bq ist nun der Schwerpunkt des Sechsecks, die Linie pz schneidet die Linie ab im Schwerpunkte (s) der beiden Dreiecke ABC und DEF. Nun haben wir kraft des Vorigen:

$$\begin{array}{l} \Delta ABC : \text{Viereck } ACDF = pq : aq \\ \text{Viereck } ACDF : \Delta DEF = br : pr \\ \hline \Delta ABC : \Delta DEF = pq \times br : aq \times pr. \end{array}$$

Weil ar, bq und ps sich im Punkte z schneiden, haben wir:

$$br \times pq \times as = aq \times pr \times bs,$$

oder

$$br \times pq : aq \times pr = bs : as;$$

mithin:

$$\Delta ABC : \Delta DEF = bs : as;$$

folglich auch:

$$\begin{array}{l} \Delta ABC + \Delta DEF : \Delta ABC = ab : bs, \quad \text{wir wussten schon:} \\ \Delta ABC : \text{Viereck } ACDF = pq : aq \\ \hline \Delta ABC + \Delta DEF : \text{Viereck } ACDF = ab \times pq : bs \times aq; \end{array}$$

aber das Dreieck aps mit dessen Transversale bq giebt:

$$ab \times sz \times pq = aq \times bs \times pz,$$

oder:

$$ab \times pq : aq \times bs = pz : sz,$$

so dass wir erhalten:

$$\Delta ABC + \Delta DEF : \text{Viereck } ACDF = pz : sz.$$

IV. Um für das Siebeneck ($ABCDEFG$) den Schwerpunkt

auf ähnliche Weise zu bestimmen und zu gleicher Zeit das Gesetz von der Gleichheit der statischen Momente bewähret zu sehen, theile man dasselbe durch eine Diagonale (AC) in ein Dreieck (ABC) und ein Sechseck ($ACDEFG$), und durch eine zweite Diagonale (AD) in ein Viereck ($ABCD$) und ein Fünfeck ($ADEFG$). Oder man ziehe die Diagonalen AD und AE, welche jede das Siebeneck in ein Viereck und ein Fünfeck theilen. Die Schwerpunkte aller dieser Figuren kann man nach dem Vorigen construiren, und mithin bekommt man wieder leicht zwei sich schneidende Schwerlinien nebst dem Dreiecke mit der Transversale.

V. Im Allgemeinen: Ein n-Eck ($ABC....$) theile man von irgend einer Ecke (A) aus durch eine Diagonale in ein p-Eck ($ABC....$) und ein $(n-p+2)$-Eck, und durch eine zweite Diagonale von der nämlichen Ecke aus in ein $(p+q)$-Eck ($ABC....$) und ein $(n-p-q+2)$-Eck. Die erste Diagonale theilt das $(p+q)$-Eck wieder in ein p-Eck und ein $(q+2)$-Eck, und die zweite Diagonale theilt das $(n-p+2)$-Eck in ein $(q+2)$-Eck und ein $(n-p-q+2)$-Eck. Die beiden Schwerlinien, deren Durchschnittspunkt der Schwerpunkt des n-Ecks ist, verbinden den Schwerpunkt des p-Ecks mit dem Schwerpunkte des $(n-p+2)$-Ecks, den Schwerpunkt des $(p+q)$-Ecks mit dem des $(n-p-q+2)$-Ecks. Nimmt man noch die beiden Geraden hinzu, welche den Schwerpunkt des p-Ecks mit dem des $(q+2)$-Ecks, den Schwerpunkt des $(q+2)$-Ecks mit dem des $(n-p-q+2)$-Ecks verbinden, so bekommt man wieder das Dreieck mit der Transversale. Es ist also das Suchen des Schwerpunkts eines beliebigen Vielecks zurückgebracht auf das Suchen der Schwerpunkte anderer Vielecke von einer kleineren Anzahl Seiten, wodurch die Allgemeinheit der Methode völlig bewiesen ist.

Je grösser die Anzahl der Seiten ist, in desto mannigfaltigerer Weise kann man das Vieleck theilen, und erhält also desto mehr Gerade (Schwerlinien) für je zwei sich ergänzende Theile, welche sich in einem Punkte (Schwerpunkt) schneiden. Ist nun ein Vieleck einer Linie zweiten Grades ein- oder umgeschrieben, so lassen sich vielleicht mittelst der bekannten Theorie der polaren Reciprocität noch einige nicht unwichtige Sätze ableiten. Es wäre aber ein besonderes Studium erforderlich, solches zu untersuchen.

Es hat nicht die mindeste Schwierigkeit, das nämliche Verfahren auch für Vielecke mit convexen Winkeln anzuwenden, denn sie sind immer als die Differenz zweier oder mehrerer gewöhnlicher Vielecke zu betrachten.

§. 2.

Ueber die Bestimmung der Schwerpunkte der Polyeder.

I. In Dr. Th. van Doesburgh's „Ligchaamsmeting en bolvormige Driehoeksmeting", verfasst nach den akademischen Vorträgen des Herrn Professor Dr. Buys Ballot, ist folgender Satz bewiesen: Die geraden Linien, welche die Spitzen einer dreiseitigen Pyramide mit den Schwerpunkten der gegenüber liegenden Seitenflächen verbinden, schneiden sich in einem Punkte (dem Schwerpunkte der Pyramide), welcher auf $\frac{3}{4}$ dieser Linien liegt, von den Spitzen ab gerechnet.

II. Hiernach ist es sehr leicht den Schwerpunkt einer vier-, fünf-, u. s. w. n-seitigen Pyramide zu finden.

Die vierseitige Pyramide $ABCDE$ (Taf. V. Fig. 5.) wird sowohl von der Ebene ACE als von der Ebene ABD in zwei dreiseitige Pyramiden getheilt.

Es sei nun:

a	der	Schwerpunkt	des	Dreiecks	BCE,
b	„	„	„	„	CDE,
c	„	„	„	„	BCD,
d	„	„	„	„	BDE,
e	„	„	„	Vierecks	$BCDE$.

Ziehen wir Aa, Ab, Ac, Ad und nehmen $ap=\frac{1}{4}Aa$, $bq=\frac{1}{4}Ab$, $cr=\frac{1}{4}Ac$, $ds=\frac{1}{4}Ad$, so sind p, q, r und s respective die Schwerpunkte der Pyramiden $ABCE$, $ACDE$, $ABCD$ und $ABDE$. Nun haben wir offenbar: $pq \parallel ab$, $rs \parallel cd$, und zwar liegen pq und rs in einer und derselben Ebene, weil beide Geraden gleiche Entfernung von der Spitze haben, sie schneiden sich also in einem Punkte (z), dem Schwerpunkte der vierseitigen Pyramide. Weiter ist es leicht zu ersehen, dass die Punkte A, z und e in einer Geraden liegen, und zwar im Durchschnitte der Ebenen Aab und Adc, und dass $ez=\frac{1}{4}Ae$ ist. Weiter haben wir:

$$\text{Pyr.}\,ABCE:\text{Pyr.}\,ACDE=\triangle BCE:\triangle CDE=be:ae=qz:pz.$$

Ebenso:

$$\text{Pyr.}\,ABCD:\text{Pyr.}\,ABDE=sz:rz.$$

Es hat nicht die mindeste Schwierigkeit, diese Methode für fünf- und mehrseitige Pyramiden anzuwenden, so dass allgemein der Schwerpunkt der Pyramide von der Spitze ab auf $\frac{3}{4}$ der Geraden liegt, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet.

III. Es wäre nun nicht schwer, auf ähnliche Weise die Schwerpunkte aller solcher Polyeder zu bestimmen, welche begränzt sind vnn zwei gegenüber liegenden Dreiecken und drei Vierecken, und sich daher auf mehrere Arten in eine dreiseitige und eine vierseitige Pyramide zerlegen lassen. Ich habe dies aber unterlassen, weil ich beweisen muss, dass die Methode für jedes beliebige Polyeder anwendbar ist. Deshalb hahen wir nun zuerst das Polyeder, welches sich in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegen lässt (Taf. V. Fig. 6.):

$$(\text{Polyeder} = \text{Pyr.}\, DABC + \text{Pyr.}\, EABC).$$

Der Schwerpunkt liegt natürlich wieder auf der Geraden, welche die Schwerpunkte beider Pyramiden verbindet. Legt man nun eine Ebene $DAEF$ durch AD und AE, so ist das Polyeder in zwei vierseitige Pyramiden getheilt, deren Schwerpunkte man zu bestimmen weiss; man erhält dann eine zweite Schwerlinie, und mithin den Schwerpunkt selbst. Da aber die Construction dieser Schwerlinie ohne descriptive Geometrie ziemlich beschwerlich ist, so habe ich ein anderes Mittel ersonnen; ich habe nämlich eine Ebene (Schwerebene) gesucht, welche den Schwerpunkt enthalten muss.

Wenn sich die Ecke D der vierseitigen Pyramide (Taf. V. Fig. 5.) auf einer Ebene parallel zu der Ebene des Dreiecks ACE bewegt, so bleibt die Höhe der Pyramide $DACE$ dieselbe, folglich bewegt sich der Schwerpunkt q gleichfalls parallel zu der Ebene ACE (denn er liegt stets auf $\frac{1}{4}$ der Höhe). Indess lassen wir die Pyramide $ABCE$ ungeändert, so dass der Schwerpunkt (z) des ganzen Polyeders immer auf der sich bewegenden Geraden pq liegen bleibt. Es ist nun nur die Frage, wie sich der Punkt z bewegen wird bei der Bewegung von D. Schiebe sich denn der Punkt D zuerst fort parallel zu CE, bis er in der Verlängerung der Kante BC ankommt; während dieser Verschiebung beschreibt auch q eine Gerade parallel zu CE, und weil nun der Inhalt keiner der beiden Pyramiden sich geändert hat, p unbeweglich geblieben ist, und wir eine vierseitige Pyramide behalten haben, wenigstens bis sie dreiseitig geworden ist; so werden auch die verschiedenen Geraden pq stets von z im nämlichen Verhältnisse getheilt, so dass auch z parallel zu CE sich fortbewegt

hat. Nach seiner Ankunft in BC bewege sich D parallel zu AC, bis er in AB kommt, endlich gehe er parallel zu AE, so dass D einen ganzen Dreiecksumfang durchläuft, dessen Ebene parallel zu ACE ist. Aus den obigen Gründen haben nun auch q und z jeder einen Dreiecksumfang parallel zu ACE beschrieben. Bewegt sich nun D längs irgend einem andern Wege, obgleich immer parallel zu dem Dreiecke ACE, bis er in der Ebene einer der drei Seitenflächen ABC, ABE oder BCE ankommt, so wissen wir wenigstens schon, dass der Schwerpunkt in dem oben genannten Dreiecksumfang ankommen muss; dies ist aber noch nicht hinreichend um zu schliessen, dass für jede Zwischenlage des Punktes D (d. h. ausser den drei genannten Ebenen), der Punkt z sich auf der Ebene dieses Dreiecks befinden muss. Folgende Betrachtung bringt dies aber meines Bedünkens zur Evidenz: Wenn der Punkt D sich längs mehreren verschiedenen Wegen (stets parallel zu der Ebene ACE) bewegt, und sich diese Wege ein oder mehrere Male schneiden, so schneiden sich natürlich die übereinstimmenden Wege, welche z durchläuft, eben so viele Male, und da z nun stets in dem Umfang des genannten Dreiecks ankommen soll, so kann dies nur dann Statt finden, wenn sich z in der Ebene dieses Dreiecks selbst fortbewegt.

Um also den Schwerpunkt eines aus zwei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzten Polyeders (Taf. V. Fig. 6.) zu bestimmen, lässt man eine der beiden Spitzen, welche die beiden Pyramiden nicht gemeinschaftlich haben (D oder E), sich bewegen, parallel zu dem den beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Dreiecke (ABC), bis man eine vierseitige Pyramide erhält, durch deren Schwerpunkt (welchen man nun zu finden weiss) man eine Ebene legt parallel zu oben genanntem gemeinschaftlichen Dreiecke (ABC). Der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden dreiseitigen Pyramiden ($ABCD$ und $EABC$) verbindet, ist dann der gesuchte Schwerpunkt des Polyeders. Es bedarf wohl keiner Nachweisung, dass das Gesetz der statischen Momente hierdurch bewährt wird.

IV. Für das aus drei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzte Polyeder ($ABCDEF$, Taf. V. Fig. 7.) sei:

p	der Schwerpunkt	der Pyramide	$ABCD$,
q	„	„ „	$FACD$,
r	„	des Polyeders	$ABCDF$,
s	„	der Pyramide	$BCDE$,
t	„	des Polyeders	$ABCDE$;

qt und *rs* sind deshalb Schwerlinien des Polyeders. Sie liegen in einer und derselben Ebene, weil *r* mit *p* und *q*, und *t* mit *p* und *s* in einer Geraden liegen, und schneiden sich in einem Punkte (*z*), dem Schwerpunkte des Polyeders *ABCDEF*. Nun haben wir bewiesen:

$$\begin{array}{l} \text{Polyeder } ABCDF : \text{Pyr.} ABCD = pq : rq \\ \text{Pyr.} ABCD : \text{Pyr.} BCDE = ts : pt \\ \hline \text{Polyeder } ABCDF : \text{Pyr.} BCDE = pq \times ts : rq \times pt. \end{array}$$

Da wieder *tq* Transversale des Dreiecks *prs* ist, so haben wir:

$$pq \times ts \times rz = rq \times pt \times sz,$$

oder:

$$pq \times ts : rq \times pt = sz : rz;$$

so dass wir haben:

$$\text{Polyeder } ABCDF : \text{Pyr.} BCDE = sz : rz.$$

Ebenso:

$$\text{Polyeder } ABCDE : \text{Pyr.} FACD = qz : tz.$$

Zieht man nun noch *sq* und *pz*, so ist deren Durchschnittspunkt (*u*) der Schwerpunkt der beiden Pyramiden *FACD* und *BCDE*, welche nur eine Kante (*CD*) gemeinschaftlich haben. Mittelst des Dreiecks *pqs* und seiner Transversalen *rs*, *qt* und *pu* beweisen wir leicht gerade wie wir etwas Analoges bei'm Fünfecke und Sechsecke bewiesen haben:

$$\text{Pyr.} ACDF : \text{Pyr.} BCDE = su : qu.$$

Für die Vielecke glaube ich die Allgemeinheit dieser Methode genugsam entwickelt zu haben, so dass die Allgemeinheit auch für alle Polyeder in die Augen fällt.

Neues mögen die vorigen Discussionen nicht an's Licht gebracht haben, die Theorie der Schwerpunkte ist aber dadurch in's Gebiet der Geometrie zurückgeführt, auf ganz andere Weise als dieses von Chasles in seinem schönen „Traité de Géométrie supérieure“ (p. 328 sqq.) geschehen ist. Für jede Figur und jeden Körper findet man das Centrum der mittleren Abstände aus den Sätzen: Für zwei Punkte liegt das Centrum in der Mitte beider, welcher Satz eine Identität ist, und: Das Centrum aller Theile ist auch das Centrum des Ganzen, woraus folgt: Wenn man auf (zwei) verschiedene Arten irgend ein Ganzes in zwei Theile

zerlegt, so liegt immer das Centrum des Ganzen auf der Geraden, welche die zwei Centra verbindet, daher in dem Durchschnittspunkte aller Geraden, welche die Centra je zweier solcher sich ergänzender Theile verbinden.

§. 3.

Inhaltsbestimmung der abgestumpften Prismen, (in welchen Grund- und obere Fläche nicht parallel sind).

I. In Dr. van Doesburgh's schon oben genanntem Lehrbuche der Stereometrie ist bewiesen, dass der Inhalt des Parallelepipedons sich nicht ändert, wenn eine der Seitenflächen sich um den Durchschnittspunkt der Diagonalen dreht. Seien nämlich S die Fläche eines Parallelogrammes, das entsteht, wenn man eine Ebene senkrecht zu den vier parallelen Kanten eines abgestumpften Parallelepipedons legt, p der Durchschnittspunkt der Diagonalen der Grundfläche, q der Durchschnittspunkt der Diagonalen der oberen Fläche, so findet sich, dass der Inhalt des abgestumpften Parallelepipedons $= S \times pq$ ist.

Diese so einfache Formel hat mir Anlass gegeben zu untersuchen, ob es nicht möglich wäre, den Inhalt eines beliebigen abgestumpften Prisma's (denn das Parallelepipedon ist doch auch ein Prisma) durch eine einfache Formel auszudrücken, welches mir in der That gelungen ist.

II. Betrachten wir denn zuerst das abgestumpfte dreiseitige Prisma (Taf. V. Fig. 8.). Seien die parallelen Kanten AD, BE und CF senkrecht auf der Grundfläche (ABC). Nennen wir den Inhalt dieses Körpers V, so hat man bekanntlich:

$$V = \triangle ABC \times \tfrac{1}{3}(AD + BE + CF).$$

Nehmen wir $AG = GB$, $DH = EH$, und ziehen CG, FH und GH; offenbar ist nun $GH \parallel AD \parallel BE \parallel CF$. Ferner sei $Gz = \frac{1}{3}GC$, $Hz_1 = \frac{1}{3}HF$, so sind z und z_1 die Schwerpunkte der Grund- und der oberen Fläche, zz_1 ist dann auch $\parallel GH \parallel$ u. s. w. Noch ziehen wir $HJ \parallel GC$, HJ schneide zz_1 im Punkte K. Nun haben wir:

$$\begin{array}{r} FC = FJ + JG = 3z_1K + zK \\ AD + BE = 2HG = 2zK \\ \hline AD + BE + CF = 3z_1K + 3zK = 3zz_1. \end{array}$$

Wir erhalten also die einfache Formel:

$$V = \Delta ABC \times zz_1.$$

Der Inhalt ändert sich daher nicht, wenn die obere Fläche sich um den Schwerpunkt dreht. Wenn die parallelen Kanten nicht senkrecht auf der Grundfläche sind, so lege man eine Ebene senkrecht zu den parallelen Kanten; nennt man nun die Fläche des entstehenden Dreiecks den senkrechten Durchschnitt, so hat man den Satz:

Der Inhalt des abgestumpften dreiseitigen Prismas ist das Product aus dem senkrechten Durchschnitt und der Länge der Geraden, welche die Schwerpunkte der Grund- und oberen Fläche verbindet.

III. Derselbs Satz gilt nicht nur für das dreiseitige, sondern für jedes beliebige abgestumpfte Prisma, welches sich beweisen lässt mittelst der in §. 1. bewiesenen Relationen, wenn man den für das Trapez geltenden Satz dazu nimmt (Man sehe: Dr. Buys Ballot „Beginselen en Gronden der Meetkunde." Dritte Ausgabe). Sei nämlich (Taf. V. Fig. 9.) gegeben: BC senkrecht zu AB und CD; EF, parallel zu AB und CD, schneide AD in E und BC in F, so hat man:

$$FC \times AB + BF \times CD = BC \times EF$$

und

$$DE \times AB + AE \times CD = AD \times EF.$$

IV. Das vierseitige abgestumpfte Prisma ($ABCDEFGH$) (Taf. V. Fig. 10.), worin die parallelen Kanten auch senkrecht auf der Grundfläche sind, zerlege man durch eine Ebene, welche durch zwei parallele Kanten AH und CF geht, in zwei dreiseitige abgestumpfte Prismen ($ABCEFH$ und $ACDHFG$). Es sei:

p	der Schwerpunkt	des	Dreiecks	ACD,
q	„	„	„	„	ABC,
z	„	„	„	Vierecks	$ABCD$,
p_1	„	„	„	Dreiecks	HGF,
q_1	„	„	„	„	HEF,
z_1	„	„	„	Vierecks	$HEFG$.

pp_1 und qq_1 sind offenbar parallel zu den parallelen Kanten; dass dies auch von zz_1 gilt, lässt sich leicht nachweisen; denn wenn S die Grösse des zweiflächigen Winkels, welchen Grund- und obere Fläche zusammen machen, vorstellt, so hat man bekanntlich:

$$\Delta ABC = \Delta HEF \times \cos S,$$

$$\Delta ACD = \Delta HGF \times \cos S;$$

daher:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = \Delta HEF : \Delta HGF;$$

aber wir haben auch:

$$\Delta ABC : \Delta ACD = pz : qz,$$

$$\Delta HEF : \Delta HGF = p_1 z_1 : q_1 z_1;$$

folglich

$$pz : qz = p_1 z_1 : q_1 z_1.$$

Nun sind pp_1 und qq_1 parallel, deshalb auch zz_1 parallel zu pp_1 und qq_1.

Bezeichnen wir den Inhalt des abgestumpften vierseitigen Prismas mit V, so ist nach dem in II. Bewiesenen:

$$V = \Delta ABC \times qq_1 + \Delta ACD \times qq_1.$$

Nun haben wir in §. I. bewiesen:

$$\text{Viereck } ABCD : pq = \Delta ABC : zp = \Delta ACD : zq;$$

oder:

$$\Delta ABC = \text{Viereck } ABCD \times \frac{zp}{pq},$$

$$\Delta ACD = \text{Viereck } ABCD \times \frac{zq}{pq};$$

so dass wir bekommen:

$$V = \text{Viereck } ABCD \times \frac{zp \times qq_1 + zq \times pp_1}{pq}$$

$$= \text{Viereck } ABCD \times \frac{pq \times zz_1}{pq} \text{ (siehe §. 3., III.)};$$

endlich:

$$V = \text{Viereck } ABCD \times zz_1.$$

Man sieht leicht ein, dass, wenn die parallelen Kanten nicht senkrecht auf der Basis sind, man auch hier eine Ebene senkrecht auf die parallelen Kanten legen kann. Nunmehr hat es nicht die mindeste Schwierigkeit, den Satz auf ein beliebiges abgestumpftes Prisma auszudehnen. Der Gang des Beweises selbst zeigt die Allgemeinheit, so dass wir vollkommen sicher den Satz aufstellen können:

Der Inhalt eines jeden abgestumpften Prismas ist das Product aus dem senkrechten Durchschnitt und der Länge der Geraden, welche die Schwerpunkte der Grund- und oberen Fläche verbindet.

Es ist beinahe überflüssig zu bemerken, dass für abgestumpfte Cylinder der nämliche Satz gilt, weil dieselben doch immer als Prismen betrachtet werden können.

§. 4.

Erweiterung des Guldin'schen Satzes.

Im Elementar-Unterricht wird dieser Satz gewöhnlich nur auf die Umdrehung von regelmässigen Figuren beschränkt. Man kann ihn leicht für unregelmässige Figuren beweisen. Sei gegeben ein beliebiges Viereck, dessen Umdrehung um eine Axe ausser demselben, obgleich in der nämlichen Ebene, einen körperlichen Inhalt V erzeugt. Man theile es (Taf. V. Fig. 11.) durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC und ACD.

Es sei:

p der Schwerpunkt des Dreiecks ABC,
q „ „ „ „ ACD,
z „ „ „ Vierecks $ABCD$;

pr, qs, zt seien senkrecht zu der Umdrehungsaxe PQ, so findet sich:

$$V = (\Delta ABC \times pr + \Delta ACD \times qs)2\pi;$$

aber:

$$\Delta ABC = \text{Viereck } ABCD \times \frac{qz}{pq},$$

$$\Delta ACD = \text{Viereck } ABCD \times \frac{pz}{pq}.$$

Daher:

$$V = \text{Viereck } ABCD \times \frac{pr \times qz + qs \times pz}{pq} \times 2\pi$$

$$= \text{Viereck } ABCD \times \frac{pq \times zt}{pq} \times 2\pi \text{ (siehe §. 3., III.).}$$

Mithin:

$$V = \text{Viereck } ABCD \times 2\pi \times zt.$$

Auch hier fällt es in die Augen, wie sich dieser Satz für

unregelmässige Vielecke von mehreren Seiten beweisen lässt, und dass er für einen beliebigen Umdrehungskörper gültig ist. Weiter ist es evident, dass, wenn der Schwerpunkt nur einen Kreisbogen beschreibt, doch immer der Inhalt des erhaltenen Umdrehungskörpers gefunden wird, indem man die Fläche der erzeugenden Figur multiplicirt mit der Länge des vom Schwerpunkte durchlaufenen Weges.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, welche schöne Analogie zwischen den Inhalten des abgestumpften Prisma's und des Umdrehungskörpers statt findet. Letzterer könnte in der That als eine Art Prisma betrachtet werden. Nur ist die Linie, welche die Schwerpunkte der Grund- und oberen Fläche verbindet, nicht eine Gerade, sondern ein Kreisumfang oder ein Kreisbogen, aber immer eine Linie, deren gleiche Theile identisch sind, und (darum) auch auf identische Weise an einander schliessen.

XXVIII.

Theorie der elliptischen Coordinaten in der Ebene.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Wir wollen uns, indem wir in der Gleichung

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}\pm 1=0$$

die Grösse ϱ als die Unbekannte betrachten, zuerst mit der Auflösung dieser Gleichung und der genauen Untersuchung der Natur ihrer Wurzeln beschäftigen, weil diese Untersuchungen die hauptsächlichste Basis aller unserer folgenden Betrachtungen bilden. Wir nehmen hiebei immer a und b als ungleich an, indem für $a=b$ aus 1) sogleich

$$\varrho = \begin{cases} a \mp (x^2 + y^2) \\ b \mp (x^2 + y^2) \end{cases}$$

folgen würde, also eine weitere besondere Betrachtung der obigen Gleichungen rücksichtlich ihrer Wurzeln natürlich gar nicht nöthig wäre.

Wenn wir die Gleichung 1) auf die Form:

$$\frac{x^2(\varrho - b) + y^2(\varrho - a) \pm (\varrho - a)(\varrho - b)}{(\varrho - a)(\varrho - b)} = 0$$

bringen, so erhalten wir zur Bestimmung von ϱ unmittelbar die Gleichung:

2) . . . . $x^2(\varrho - b) + y^2(\varrho - a) \pm (\varrho - a)(\varrho - b) = 0,$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet:

3) . . . $\varrho^2 \pm (x^2 + y^2 \mp a \mp b)\varrho = \pm (bx^2 + ay^2 \mp ab),$

woraus sich auf bekannte Weise:

4)

$$\{\varrho \pm \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 \mp a \mp b)\}^2 = \frac{(x^2 + y^2 \mp a \mp b)^2 \pm 4(bx^2 + ay^2 \mp ab)}{4}$$

ergiebt.

Den Zähler

$$(x^2 + y^2 \mp a \mp b)^2 \pm 4(bx^2 + by^2 \mp ab)$$

bringt man leicht auf die Form:

$$(x^2 + y^2)^2 \mp (a - b)\{2(x^2 - y^2) \mp (a - b)\},$$

also auf eine der beiden Formen:

$$(x^2 + y^2)^2 \mp (a - b)\{\quad 2(x^2 + y^2) - 4y^2 \mp (a - b)\},$$

$$(x^2 + y^2)^2 \mp (a - b)\{-2(x^2 + y^2) + 4x^2 \mp (a - b)\};$$

oder:

$$(x^2 + y^2)^2 \mp 2(a - b)(x^2 + y^2) + (a - b)^2 \pm 4(a - b)y^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 \pm 2(a - b)(x^2 + y^2) + (a - b)^2 \mp 4(a - b)x^2;$$

also:

$$\{(x^2 + y^2) \mp (a - b)\}^2 \pm 4(a - b)y^2,$$

$$\{(x^2 + y^2) \pm (a - b)\}^2 \mp 4(a - b)x^2.$$

Betrachten wir nun zuerst die Gleichung:

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+1=0,$$

so ist nach 4):

$$6) \ldots \varrho=-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b) \pm\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\{(x^2+y^2)-(a-b)\}^2+4(a-b)y^2}\\ \sqrt{\{(x^2+y^2)+(a-b)\}^2-4(a-b)x^2};\end{array}\right.$$

woraus zuvörderst erhellet, dass die Wurzeln stets reell sind, weil, wenn $a-b$ positiv oder negativ ist, respective $+4(a-b)y^2$ oder $-4(a-b)x^2$ positiv ist.

Setzen wir nun:

$$7) \ldots . \; N=\left\{\begin{array}{l}\{(x^2+y^2)-(a-b)\}^2+4(a-b)y^2\\ \{(x^2+y^2)+(a-b)\}^2-4(a-b)x^2\end{array}\right.$$

und bezeichnen die beiden Wurzeln, so wie sie durch das obere und untere Zeichen in der Formel 6) bestimmt werden, respective durch λ und μ; so ist nach 6):

$$8) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\lambda=-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b)+\tfrac{1}{2}\sqrt{N},\\ \mu=-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b)-\tfrac{1}{2}\sqrt{N};\end{array}\right.$$

also:

$$\lambda-\mu=\sqrt{N}, \quad \text{folglich} \quad \lambda>\mu;$$

so dass also das obere Zeichen in 6) immer die grössere Wurzel liefert.

Leicht findet man:

$$a-\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N}\}=\tfrac{1}{2}\{(a-b)+(x^2+y^2)\mp\sqrt{N}\},$$

$$b-\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N}\}=\tfrac{1}{2}\{-(a-b)+(x^2+y^2)\mp\sqrt{N}\};$$

und folglich, wie sich sogleich durch leichte Multiplication ergiebt:

$$4\{a-[-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N}]\}\{b-[-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-a-b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N}]\}$$

$$=(x^2+y^2\mp\sqrt{N})^2-(a-b)^2$$

$$=\{(x^2+y^2)+(a-b)\mp\sqrt{N}\}\{(x^2+y^2)-(a-b)\mp\sqrt{N}\}.$$

Also ist offenbar:

$$4(a-\lambda)(b-\lambda)$$
$$=\{(x^2+y^2)+(a-b)-\sqrt{N}\}\{(x^2+y^2)-(a-b)-\sqrt{N}\},$$
$$4(a-\mu)(b-\mu)$$
$$=\{(x^2+y^2)+(a-b)+\sqrt{N}\}\{(x^2+y^2)-(a-b)+\sqrt{N}\}.$$

Wenn nun $a>b$, also $a-b>0$ ist, so ist

$$(x^2+y^2)+(a-b)>0.$$

Nach 7) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{(x^2+y^2)+(a-b)\}^2>N>\{(x^2+y^2)-(a-b)\}^2,$$

und folglich, weil hiernach $\sqrt{N}$ grösser als der absolute Werth von

$$(x^2+y^2)-(a-b)$$

ist:

$$(x^2+y^2)+(a-b)-\sqrt{N}>0,\quad (x^2+y^2)-(a-b)-\sqrt{N}<0;$$
$$(x^2+y^2)+(a-b)+\sqrt{N}>0,\quad (x^2+y^2)-(a-b)+\sqrt{N}>0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a-\lambda)(b-\lambda)<0,\quad (a-\mu)(b-\mu)>0.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a\lessgtr\lambda\lessgtr b;$$

wäre aber

$$a<\lambda<b,$$

so wäre $a<b$, da doch nach der Voraussetzung $a>b$ ist; also ist:

$$a>\lambda>b.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a\lessgtr\mu\gtrless b;$$

wäre aber

$$a<\mu>b,$$

so wäre wegen des Vorhergehenden $\lambda<\mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda>\mu$ ist; also ist:

$$a>\mu<b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a > \lambda > b, \quad a > \mu < b;$$

also:

$$a > \lambda > b, \quad b > \mu > -\infty.$$

Wenn $a < b$, also $a - b < 0$ ist, so ist

$$(x^2 + y^2) - (a - b) > 0.$$

Nach 7) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 < N < \{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2,$$

und folglich, weil hiernach $\sqrt{N}$ grösser als der absolute Werth von

$$(x^2 + y^2) + (a - b)$$

ist:

$$(x^2 + y^2) + (a - b) - \sqrt{N} < 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) - \sqrt{N} > 0;$$

$$(x^2 + y^2) + (a - b) + \sqrt{N} > 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) + \sqrt{N} > 0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) < 0, \quad (a - \mu)(b - \mu) > 0.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \lessgtr \lambda \lessgtr b;$$

wäre aber

$$a > \lambda > b,$$

so wäre $a > b$, da doch nach der Voraussetzung $a < b$ ist; also ist:

$$a < \lambda < b.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a \lessgtr \mu \gtrless b;$$

wäre aber

$$a < \mu > b,$$

so wäre wegen des Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a > \mu < b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a < \lambda < b, \quad a > \mu < b;$$

also:

$$a < \lambda < b, \quad a > \mu > -\infty.$$

Die beiden reellen Wurzeln unserer Gleichung liegen also im ersten Falle innerhalb der beiden durch die Grössen

$$-\infty,\ b,\ a$$

bestimmten Intervalle; im zweiten Falle innerhalb der beiden durch die Grössen

$$-\infty,\ a,\ b$$

bestimmten Intervalle.

Im ersten Falle ist:

$$a > \lambda > b > \mu,$$

im zweiten dagegen:

$$\mu < a < \lambda < b.$$

Betrachten wir ferner die Gleichung:

$$9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} - 1 = 0,$$

so ist nach 4):

$$10) \ldots \varrho = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + a + b) \pm \tfrac{1}{2}\begin{cases}\sqrt{\{(x^2+y^2)+(a-b)\}^2 - 4(a-b)y^2} \\ \sqrt{\{(x^2+y^2)-(a-b)\}^2 + 4(a-b)x^2},\end{cases}$$

woraus wiederum erhellet, dass die Wurzeln stets reell sind, weil, wenn $a-b$ positiv oder negativ ist, respective $+4(a-b)x^2$ oder $-4(a-b)y^2$ positiv ist.

Setzen wir nun:

$$11) \ldots N' = \begin{cases}\{(x^2+y^2)+(a-b)\}^2 - 4(a-b)y^2 \\ \{(x^2+y^2)-(a-b)\}^2 + 4(a-b)x^2\end{cases}$$

und bezeichnen die beiden Wurzeln, so wie sie durch das obere und untere Zeichen in der Formel 10) bestimmt werden, respective durch λ und μ; so ist nach 10):

$$12) \ldots\ldots \begin{cases}\lambda = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+a+b) + \tfrac{1}{2}\sqrt{N'}, \\ \mu = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+a+b) - \tfrac{1}{2}\sqrt{N'};\end{cases}$$

also:

$$\lambda-\mu=\sqrt{N'},\quad \text{folglich } \lambda>\mu;$$

so dass also das obere Zeichen in 10) immer die grössere Wurzel liefert.

Leicht findet man:

$$a-\{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+a+b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N'}\}=\tfrac{1}{2}\{(a-b)-(x^2+y^2)\mp\sqrt{N'}\},$$

$$b-\{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+a+b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N'}\}=\tfrac{1}{2}\{-(a-b)-(x^2+y^2)\mp\sqrt{N'}\};$$

und folglich, wie sich sogleich durch leichte Multiplication ergiebt:

$$4\{a-[\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+a+b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N'}\}\{b-[\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+a+b)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{N'}]\}$$

$$=(x^2+y^2\pm\sqrt{N'})^2-(a-b)^2$$

$$=\{(x^2+y^2)+(a-b)\pm\sqrt{N'}\}\{(x^2+y^2)-(a-b)\pm\sqrt{N'}\}.$$

Also ist offenbar:

$$4(a-\lambda)(b-\lambda)$$

$$=\{(x^2+y^2)+(a-b)+\sqrt{N'}\}\{(x^2+y^2)-(a-b)+\sqrt{N'}\},$$

$$4(a-\mu)(b-\mu)$$

$$=\{(x^2+y^2)+(a-b)-\sqrt{N'}\}\{(x^2+y^2)-(a-b)-\sqrt{N'}\}.$$

Wenn nun $a>b$, also $a-b>0$ ist, so ist

$$(x^2+y^2)+(a-b)>0.$$

Nach 11) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{(x^2+y^2)+(a-b)\}^2>N'>\{(x^2+y^2)-(a-b)\}^2,$$

und folglich, weil hiernach $\sqrt{N'}$ grösser als der absolute Werth von

$$(x^2+y^2)-(a-b)$$

ist:

$$(x^2+y^2)+(a-b)+\sqrt{N'}>0,\quad (x^2+y^2)-(a-b)+\sqrt{N'}>0;$$

$$(x^2+y^2)+(a-b)-\sqrt{N'}>0,\quad (x^2+y^2)-(a-b)-\sqrt{N'}<0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a-\lambda)(b-\lambda)>0,\quad (a-\mu)(b-\mu)<0.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a\lessgtr\mu\lessgtr b;$$

wäre aber

$$a < \mu < b,$$

so wäre $a < b$, da doch nach der Voraussetzung $a > b$ ist; also ist:

$$a > \mu > b.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \lesseqgtr \lambda \gtreqless b;$$

wäre aber

$$a > \lambda < b,$$

so wäre wegen des Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a < \lambda > b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a < \lambda > b, \quad a > \mu > b;$$

also:

$$a < \lambda < +\infty, \quad a > \mu > b.$$

Wenn $a < b$, also $a - b < 0$ ist, so ist

$$(x^2 + y^2) - (a - b) > 0.$$

Nach (11) ist in diesem Falle offenbar:

$$\{(x^2 + y^2) + (a - b)\}^2 < N' < \{(x^2 + y^2) - (a - b)\}^2,$$

und folglich, weil hiernach $\sqrt{N'}$ grösser als der absolute Werth von

$$(x^2 + y^2) + (a - b)$$

ist:

$$(x^2 + y^2) + (a - b) + \sqrt{N'} > 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) + \sqrt{N'} > 0;$$

$$(x^2 + y^2) + (a - b) - \sqrt{N'} < 0, \quad (x^2 + y^2) - (a - b) - \sqrt{N'} > 0;$$

also nach dem Obigen:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) > 0, \quad (a - \mu)(b - \mu) < 0.$$

Aus der zweiten Vergleichung folgt:

$$a \lesseqgtr \mu \lesseqgtr b;$$

wäre aber

$$a > \mu > b,$$

so wäre $a > b$, da doch nach der Voraussetzung $a < b$ ist; also ist:

$$a < \mu < b.$$

Aus der ersten Vergleichung folgt:

$$a \lesseqgtr \lambda \gtreqless b;$$

wäre aber

$$a > \lambda < b,$$

so wäre nach dem Vorhergehenden $\lambda < \mu$, da doch nach dem Obigen $\lambda > \mu$ ist; also ist:

$$a < \lambda > b.$$

Daher haben wir die folgenden Vergleichungen:

$$a < \lambda > b, \quad a < \mu < b;$$

also:

$$b < \lambda < +\infty, \quad a < \mu < b.$$

Die beiden reellen Wurzeln unserer Gleichung liegen also im ersten Falle innerhalb der beiden durch die Grössen

$$b, \; a, \; +\infty$$

bestimmten Intervalle; im zweiten Falle innerhalb der beiden durch die Grössen

$$a, \; b, \; +\infty$$

bestimmten Intervalle.

Im ersten Falle ist:

$$\lambda > a > \mu > b,$$

im zweiten Falle dagegen:

$$a < \mu < b < \lambda.$$

§. 2.

Auch ohne die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} \pm 1 = 0$$

wirklich aufzulösen, kann man auf folgende Art die Reellität der Wurzeln dieser Gleichungen nachweisen und die Gränzen, zwischen denen dieselben liegen müssen, bestimmen, wobei i und J respective eine unendlich kleine und eine unendlich grosse positive Grösse bezeichnen sollen.

Betrachten wir nun zuerst die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+1=0,$$

und setzen der Kürze wegen

$$f(\varrho)=\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+1,$$

so ist:

$$f(a\mp i)=\mp\frac{x^2}{i}+\frac{y^2}{a-b\mp i}+1,$$

$$f(b\pm i)=\quad\frac{x^2}{b-a\pm i}\pm\frac{y^2}{i}+1;$$

und es haben also offenbar immer, es mag $a>b$ oder $a<b$ sein, $f(a\mp i)$ und $f(b\pm i)$ entgegengesetzte Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass zwischen a und b immer eine reelle Wurzel liegt. Ferner ist

$$f(-J)=-\frac{x^2}{J+a}-\frac{y^2}{J+b}+1,$$

folglich $f(-J)$ positiv. Ist nun $a>b$, so liegen, da, weil $f(-J)$ positiv und nach dem Obigen offenbar $f(b-i)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und b liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$-\infty,\ b,\ a$$

bestimmten Intervallen. Ist dagegen $a<b$, so liegen, da, weil $f(-J)$ positiv und nach dem Obigen offenbar $f(a-i)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und a liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$-\infty,\ a,\ b$$

bestimmten Intervallen.

Betrachten wir ferner die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}-1=0,$$

und setzen der Kürze wegen

$$F(\varrho)=\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}-1,$$

so ist:

$$F(a\mp i)=\mp\frac{x^2}{i}+\frac{y^2}{a-b\mp i}-1,$$

$$F(b\pm i)=\quad\frac{x^2}{b-a\pm i}\pm\frac{y^2}{i}-1;$$

und es haben also offenbar immer, es mag $a>b$ oder $a<b$ sein, $F(a\mp i)$ und $F(b\pm i)$ entgegengesetzte Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass zwischen a und b immer eine reelle Wurzel liegt. Ferner ist

$$F(+J)=\frac{x^2}{J-a}+\frac{y^2}{J-b}-1,$$

folglich $F(+J)$ negativ. Ist nun $a>b$, so liegen, da, weil $F(a+i)$ nach dem Obigen offenbar positiv und $F(+J)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen a und $+\infty$ liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$b,\ a,\ +\infty$$

bestimmten Intervallen. Ist dagegen $a<b$, so liegen, da, weil nach dem Obigen $F(b+i)$ offenbar positiv und $F(+J)$ negativ ist, eine reelle Wurzel zwischen b und $+\infty$ liegt, zwei reelle Wurzeln in den beiden durch die Grössen

$$a,\ b,\ +\infty$$

bestimmten Intervallen.

Dass die beiden reellen Wurzeln unserer Gleichungen auch jederzeit im Allgemeinen ungleich sind, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

Alle diese Resultate stimmen mit den in §. 1. gefundenen Resultaten vollkommen überein.

Weil, indem wir die obigen Bezeichnungen beibehalten, offenbar

$$\partial f(\varrho)=-\left\{\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2\right\}\partial\varrho,$$

$$\partial F(\varrho)=-\left\{\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2\right\}\partial\varrho$$

ist, so haben $\partial\varrho$, $\partial f(\varrho)$ und $\partial\varrho$, $\partial F(\varrho)$ stets entgegengesetzte Vorzeichen; wenn also ϱ zwischen gewissen Gränzen, innerhalb welcher keine Unterbrechung der Stetigkeit von $f(\varrho)$ oder $F(\varrho)$ eintritt, wächst oder abnimmt, so wird $f(\varrho)$ oder $F(\varrho)$ respective fortwährend abnehmen, oder fortwährend wachsen.

§. 3.

Wir wollen jetzt umgekehrt die Grössen x^2, y^2 durch die Wurzeln λ, μ auszudrücken suchen, und zugleich einige zwischen allen diesen Grössen Statt findende Relationen anschliessen, wobei es nicht mehr wie vorher nöthig ist, dass λ die grössere, und μ die kleinere Wurzel bezeichnet, indem vielmehr von jetzt an λ, μ überhaupt nur die Wurzeln der Gleichung 1) bezeichnen sollen, ohne ein bestimmtes Grössenverhältniss derselben festzusetzen.

Weil λ, μ die reellen ungleichen Wurzeln der Gleichung

$$x^2(\varrho-b)+y^2(\varrho-a)\pm(\varrho-a)(\varrho-b)=0$$

oder

$$(\varrho-a)(\varrho-b)\pm x^2(\varrho-b)\pm y^2(\varrho-a)=0$$

sind; so ist nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen für jedes ϱ bekanntlich:

$$13)\quad (\varrho-a)(\varrho-b)\pm x^2(\varrho-b)\pm y^2(\varrho-a)=(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu),$$

und folglich, wenn wir, was verstattet ist, da diese Gleichung für jedes ϱ gilt, nach und nach $\varrho=a$, $\varrho=b$ setzen:

$$14)\quad \begin{cases}\pm x^2(a-b)=(a-\lambda)(a-\mu),\\ \pm y^2(b-a)=(b-\lambda)(b-\mu);\end{cases}$$

also:

$$15)\quad x^2=\pm\frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{a-b},\qquad y^2=\pm\frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{b-a}.$$

Setzt man in der Gleichung 13) nach und nach $\varrho=\lambda$, $\varrho=\mu$; so erhält man, wenn zugleich der Kürze wegen

$$16)\quad \begin{cases}L=(\lambda-a)(\lambda-b),\\ M=(\mu-a)(\mu-b)\end{cases}$$

gesetzt wird, die folgenden Gleichungen:

$$17) \dots \quad \begin{cases} L \pm (\lambda - b)x^2 \pm (\lambda - a)y^2 = 0, \\ M \pm (\mu - b)x^2 \pm (\mu - a)y^2 = 0; \end{cases}$$

und hieraus, weil, wie man leicht findet:

$$(\lambda - a)(\mu - b) - (\lambda - b)(\mu - a) = (a - b)(\lambda - \mu)$$

ist, die Gleichungen:

$$18) \dots \quad \begin{cases} (\mu - a)L - (\lambda - a)M \mp (a - b)(\lambda - \mu)x^2 = 0, \\ (\mu - b)L - (\lambda - b)M \pm (a - b)(\lambda - \mu)y^2 = 0; \end{cases}$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung für x^2, y^2 ganz dieselben Ausdrücke wie vorher ergeben.

Aus 15) ergiebt sich unmittelbar die Relation:

$$19) \dots \quad \frac{x^2}{(\lambda - a)(\mu - a)} + \frac{y^2}{(\lambda - b)(\mu - b)} = 0.$$

Die Gleichung 13) kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$20) \dots \quad \frac{x^2}{\varrho - a} + \frac{y^2}{\varrho - b} \pm 1 = \pm \frac{(\varrho - \lambda)(\varrho - \mu)}{(\varrho - a)(\varrho - b)},$$

und differentiirt man nun diese Gleichung in Bezug auf ϱ als veränderliche Grösse, so erhält man die Gleichung:

$$21) \dots \quad \left(\frac{x}{\varrho - a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho - b}\right)^2$$

$$= \mp \frac{(\varrho - a)(\varrho - b)(2\varrho - \lambda - \mu) - (\varrho - \lambda)(\varrho - \mu)(2\varrho - a - b)}{(\varrho - a)^2(\varrho - b)^2};$$

also, wenn man nach und nach $\varrho = \lambda$, $\varrho = \mu$ setzt:

$$22) \dots \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{\lambda - a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda - b}\right)^2 = \mp \frac{\lambda - \mu}{(\lambda - a)(\lambda - b)}, \\ \left(\frac{x}{\mu - a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mu - b}\right)^2 = \mp \frac{\mu - \lambda}{(\mu - a)(\mu - b)}. \end{cases}$$

Die durch Differentiation hergeleitete Gleichung 21) kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\left(\frac{x}{\varrho - a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho - b}\right)^2$$

$$= \mp \frac{(\varrho - \lambda)(\varrho - \mu)}{(\varrho - a)(\varrho - b)} \left\{ \frac{2\varrho - \lambda - \mu}{(\varrho - \lambda)(\varrho - \mu)} - \frac{2\varrho - a - b}{(\varrho - a)(\varrho - b)} \right\},$$

also auf folgende Art:

$$\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2=\mp\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{\varrho-\lambda}+\frac{1}{\varrho-\mu}\\ -\frac{1}{\varrho-a}-\frac{1}{\varrho-b}\end{array}\right\}$$

oder:

23)

$$\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2=\mp\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)}\left\{\frac{\lambda-a}{(\varrho-a)(\varrho-\lambda)}+\frac{\mu-b}{(\varrho-b)(\varrho-\mu)}\right\},$$

woraus sich, wenn man hiermit 20) verbindet, die Relation:

24)

$$\frac{\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2}{\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}\pm 1}=-\left\{\frac{\lambda-a}{(\varrho-a)(\varrho-\lambda)}+\frac{\mu-b}{(\varrho-b)(\varrho-\mu)}\right\}$$

ergiebt.

Aus 15) erhält man durch partielle Differentiation nach λ und μ:

$$2x\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\mp\frac{a-\mu}{a-b},\quad 2x\frac{\partial x}{\partial\mu}=\mp\frac{a-\lambda}{a-b};$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial\lambda}=\mp\frac{b-\mu}{b-a},\quad 2y\frac{\partial y}{\partial\mu}=\mp\frac{b-\lambda}{b-a};$$

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\mp\frac{x}{2}\cdot\frac{a-\mu}{a-b}\cdot\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial x}{\partial\mu}=\mp\frac{x}{2}\cdot\frac{a-\lambda}{a-b}\cdot\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}=\mp\frac{y}{2}\cdot\frac{b-\mu}{b-a}\cdot\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial y}{\partial\mu}=\mp\frac{y}{2}\cdot\frac{b-\lambda}{b-a}\cdot\frac{1}{y^2};$$

und folglich nach 15):

$$25)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial x}{\partial\lambda}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{a-\lambda}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-a},\\ \frac{\partial x}{\partial\mu}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{a-\mu}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\mu-a};\\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}=-\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{b-\lambda}=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-b},\\ \frac{\partial y}{\partial\mu}=-\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{b-\mu}=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{\mu-b}.\end{array}\right.$$

Weil nun

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\partial\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\partial\mu, \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\partial\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu}\partial\mu$$

ist; so ist nach den vorstehenden Formeln:

$$26) \ldots \quad \begin{cases} \partial x = \frac{x}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda - a} + \frac{\partial\mu}{\mu - a}\right), \\ \partial y = \frac{y}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda - b} + \frac{\partial\mu}{\mu - b}\right). \end{cases}$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu ein ander, so erhält man:

$$4(\partial x^2 + \partial y^2)$$

$$= \left\{\left(\frac{x}{\lambda - a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda - b}\right)^2\right\}\partial\lambda^2 + \left\{\left(\frac{x}{\mu - a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mu - b}\right)^2\right\}\partial\mu^2$$

$$+ 2\left\{\frac{x^2}{(\lambda - a)(\mu - a)} + \frac{y^2}{(\lambda - b)(\mu - b)}\right\}\partial\lambda\partial\mu;$$

folglich nach 22) und 19):

$$27) \quad 4(\partial x^2 + \partial y^2) = \mp\frac{\lambda - \mu}{(\lambda - a)(\lambda - b)}\partial\lambda^2 \mp \frac{\mu - \lambda}{(\mu - a)(\mu - b)}\partial\mu^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$28) \ldots \quad \begin{cases} L' = \mp\frac{\lambda - \mu}{4(\lambda - a)(\lambda - b)} = \mp\frac{\lambda - \mu}{4L}, \\ M' = \mp\frac{\mu - \lambda}{4(\mu - a)(\mu - b)} = \mp\frac{\mu - \lambda}{4M} \end{cases}$$

setzen:

$$29) \ldots\ldots \quad \partial x^2 + \partial y^2 = L'\partial\lambda^2 + M'\partial\mu^2.$$

§. 4.

Zunächst wollen wir nun im Allgemeinen untersuchen, welche Curven unter der Voraussetzung, dass a, b; λ, μ gewisse constante Grössen sind, dagegen x, y als veränderliche rechtwinklige Coordinaten betrachtet werden, die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} - 1 = 0$$

oder

$$30) \quad \ldots \quad \frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}=1, \quad \frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}=1$$

darstellen, wobei es aber nöthig ist, ein bestimmtes zwischen a, b; λ, μ Statt findendes Grössenverhältniss zu Grunde zu legen.

Nehmen wir demzufolge an, dass

$$a<\lambda<b<\mu$$

sei; so sind die Grössen

$$\lambda-a, \quad \lambda-b$$

respective

positiv, negativ;

dagegen die Grössen

$$\mu-a, \quad \mu-b$$

respective

positiv, positiv;

woraus sich ergiebt; dass die erste der beiden Gleichungen 30) eine Hyperbel, die zweite eine Ellipse darstellt. Beide Kegelschnitte sind auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem der xy bezogen, haben beide denselben Mittelpunkt, und für beide ist die Axe der x die gemeinschaftliche Hauptaxe, weil bei der Ellipse unter der gemachten Voraussetzung $\mu-a>\mu-b$ ist. Die halbe Hauptaxe und die halbe Nebenaxe der Hyperbel sind respective $\sqrt{\lambda-a}$ und $\sqrt{b-\lambda}$; die halbe Hauptaxe und die halbe Nebenaxe der Ellipse sind respective $\sqrt{\mu-a}$ und $\sqrt{\mu-b}$. Das Quadrat der halben Excentricität der Hyperbel ist:

$$(\sqrt{\lambda-a})^2+(\sqrt{b-\lambda})^2=(\lambda-a)+(b-\lambda)=b-a,$$

und das Quadrat der halben Excentricität der Ellipse ist:

$$(\sqrt{\mu-a})^2-(\sqrt{\mu-b})^2=(\mu-a)-(\mu-b)=b-a;$$

also ist, wenn wir für beide Curven die halbe Excentricität durch e bezeichnen, für beide Curven:

$$31) \ldots\ldots\ldots \quad e^2=b-a, \quad e=\sqrt{b-a};$$

woraus sich ergiebt, dass die beiden Curven dieselben Brennpunkte haben, folglich confocal sind. Daher stellen die beiden Gleichungen 30) jederzeit eine confocale Hyperbel und Ellipse dar. Lässt man λ, μ variiren, so sind natürlich alle dadurch

hervorgehenden Kegelschnitte confocal, weil nach dem Vorhergehenden e nur von a und b abhängt.

Wie man in jedem anderen Falle über die Natur der beiden Curven zu entscheiden hat, erhellet hieraus genugsam.

Wenn (xy) ein gemeinschaftlicher Punkt unserer beiden confocalen Kegelschnitte ist, und die veränderlichen oder laufenden Coordinaten jetzt durch u, v bezeichnet werden; so sind bekanntlich die Gleichungen der Berührenden der beiden Kegelschnitte in dem Punkte (xy) respective:

$$\frac{xu}{\lambda-a}+\frac{yv}{\lambda-b}=1, \quad \frac{xu}{\mu-a}+\frac{yv}{\mu-b}=1;$$

und weil nun nach (19)

$$\frac{x^2}{(\lambda-a)(\mu-a)}+\frac{y^2}{(\lambda-b)(\mu-b)}=0,$$

also

$$\left(\frac{x}{\lambda-a}\right)\left(\frac{x}{\mu-a}\right)+\left(\frac{y}{\lambda-b}\right)\left(\frac{y}{\mu-b}\right)=0$$

ist, so stehen nach den Lehren der analytischen Geometrie die beiden in Rede stehenden Berührenden jederzeit auf einander senkrecht.

§. 5.

Wir wollen uns jetzt in der Ebene, in welcher wir alle Constructionen auszuführen beabsichtigen, ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy, und in derselben Ebene einen ganz beliebigen Punkt, dessen Coordinaten durch x, y bezeichnet werden mögen, denken. Nun nehmen wir zwei beliebige Grössen a, b an, welche wir jedoch grösserer Bestimmtheit wegen der Bedingung unterwerfen, dass $a<b$ sein soll. Bilden wir dann die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}=1,$$

so hat dieselbe, wie im Obigen gezeigt worden ist, jederzeit zwei reelle ungleiche Wurzeln λ, μ, die sich durch Auflösung der vorstehenden Gleichung bestimmen lassen, und von denen wir aus dem Obigen wissen, dass sie in den beiden durch die Grössen

$$a,\ b,\ +\infty$$

bestimmten Intervallen liegen, so dass also, wenn wir grösserer Bestimmtheit wegen annehmen, dass λ die kleinere der beiden Wurzeln, dass also $\lambda < \mu$ sei, jederzeit

$$a < \lambda < b < \mu$$

ist. Die Coordinaten x, y unseres Punktes (xy) genügen hiernach den beiden Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1, \quad \frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} = 1;$$

und der Punkt (xy) ist also ein, den durch diese beiden Gleichungen dargestellten confocalen Kegelschnitten, von denen der erste eine Hyperbel, der zweite eine Ellipse ist, gemeinschaftlicher Punkt. Construirt man also diese beiden Kegelschnitte, welches keine Schwierigkeit hat, da der Anfangspunkt der xy ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt ist und ihre Hauptaxe und Nebenaxe respective in die Axe der x und der y fallen, ausserdem die Grössen der halben Hauptaxe und der halben Nebenaxe für die Hyperbel $\sqrt{\lambda - a}$ und $\sqrt{b - \lambda}$, für die Ellipse $\sqrt{\mu - a}$ und $\sqrt{\mu - b}$ bekannt sind; so wird der Punkt (xy) ein Durchschnittspunkt dieser beiden confocalen Kegelschnitte, folglich durch dieselben jedenfalls bestimmt sein. Vollständig ist freilich die Bestimmung der Lage des Punktes (xy) durch die beiden in Rede stehenden confocalen Kegelschnitte nicht, weil man natürlich für die vier Punkte, deren Coordinaten

$$+x, +y; \; -x, +y; \; -x, -y; \; +x, -y$$

sind, ganz dieselben beiden confocalen Kegelschnitte erhält; aber einer der vier Punkte, in denen diese beiden Kegelschnitte sich im Allgemeinen jederzeit schneiden, wird der in Rede stehende Punkt immer sein. Man kann also in gewisser Rücksicht die beiden confocalen Kegelschnitte als eine Art krummliniger Coordinaten des durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y bestimmten Punktes (xy) betrachten, pflegt jedoch meistens die beiden durch x, y völlig bestimmten Grössen λ, μ, welche der Bedingung

$$a < \lambda < b < \mu$$

genügen, selbst die **elliptischen Coordinaten** des durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y bestimmten Punktes (xy) zu nennen.

Diese Betrachtungen kann man aber auch umkehren. Lässt man nämlich die beiden als beliebige unabhängige Variable zu betrachtenden Grössen λ, μ zwar im Allgemeinen beliebig, jedoch

so variiren, dass λ sich immer zwischen den Gränzen a und b, dagegen μ sich zwischen den Gränzen b und $+\infty$ bewegt; so werden zu jeden zwei bestimmten Werthen dieser Variablen gewisse bestimmte Werthe der Grössen x, y gehören, welche den beiden Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}=1,\quad \frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}=1$$

genügen, und nach 15) durch die Formeln:

$$x^2=-\frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{a-b},\quad y^2=-\frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{b-a}$$

oder:

$$x^2=\frac{(\lambda-a)(\mu-a)}{b-a},\quad y^2=\frac{(b-\lambda)(\mu-b)}{b-a}$$

bestimmt werden, wobei zu beachten ist, dass wegen der Bedingung

$$a<\lambda<b<\mu$$

offenbar

$$\frac{(\lambda-a)(\mu-a)}{b-a},\quad \frac{(b-\lambda)(\mu-b)}{b-a}$$

jederzeit positive Grössen sind, die obigen Formeln also für x, y immer reelle Werthe liefern. Freilich ergeben sich aus diesen Formeln für x, y die vier folgenden Systeme von Werthen:

$$x=+\sqrt{\frac{(\lambda-a)(\mu-a)}{b-a}},\quad y=+\sqrt{\frac{(b-\lambda)(\mu-b)}{b-a}};$$

$$x=-\sqrt{\frac{(\lambda-a)(\mu-a)}{b-a}},\quad y=+\sqrt{\frac{(b-\lambda)(\mu-b)}{b-a}};$$

$$x=-\sqrt{\frac{(\lambda-a)(\mu-a)}{b-a}},\quad y=-\sqrt{\frac{(b-\lambda)(\mu-b)}{b-a}};$$

$$x=+\sqrt{\frac{(\lambda-a)(\mu-a)}{b-a}},\quad y=-\sqrt{\frac{(b-\lambda)(\mu-b)}{b-a}};$$

wodurch jederzeit vier gegen die Axen der x, y symmetrisch liegende Punkte der Constructionsebene bestimmt werden, welche die vier Durchschnittspunkte der durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}=1,\quad \frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}=1$$

bestimmten confocalen Hyperbel und Ellipse sind. Lässt man aber λ, μ in der angegebenen Weise sich verändern, und bestimmt immer die beiden entsprechenden confocalen Kegelschnitte über den angenommenen Axen der x, y als Axen; so wird man natürlich unendlich viele solcher Systeme confocaler Hyperbeln und Ellipsen erhalten, welche gewissermassen die Constructionsebene ganz überdecken, und in ihren vier Durchschnittspunkten alle Punkte dieser Ebene liefern.

§. 6.

Um eine Anwendung hiervon zu machen, wollen wir der Grösse μ den bestimmten, b übersteigenden Werth μ_0 beilegen und die bestimmte Ellipse

$$32) \quad \frac{x^2}{\mu_0-a}+\frac{y^2}{\mu_0-b}=1$$

betrachten. Zwei beliebige Punkte dieser Ellipse, deren rechtwinklige Coordinaten jedoch positiv sein sollen, seien (x_0y_0) und (x_1y_1); und zugleich werde angenommen, dass $x_0<x_1$ sei. Die diesen beiden Punkten entsprechenden Werthe von λ seien λ_0 und λ_1, wo λ_0, λ_1 die beiden kleineren Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{x_0^2}{\varrho-a}+\frac{y_0^2}{\varrho-b}=1, \quad \frac{x_1^2}{\varrho-a}+\frac{y_1^2}{\varrho-b}=1$$

sind, wie auf der Stelle erhellet, wenn man nur überlegt, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{x_0^2}{\mu_0-a}+\frac{y_0^2}{\mu_0-b}=1, \quad \frac{x_1^2}{\mu_0-a}+\frac{y_1^2}{\mu_0-b}=1$$

erfüllt sind, weil die Punkte (x_0y_0) und (x_1y_1) der durch die Gleichung 32) charakterisirten Ellipse angehören. Setzt man also:

$$33) \quad \begin{cases} N_0'=\begin{cases}\{(x_0^2+y_0^2)+(a-b)\}^2-4(a-b)y_0^2\\ \{(x_0^2+y_0^2)-(a-b)\}^2+4(a-b)x_0^2,\end{cases}\\ N_1'=\begin{cases}\{(x_1^2+y_1^2)+(a-b)\}^2-4(a-b)y_1^2\\ \{(x_1^2+y_1^2)-(a-b)\}^2+4(a-b)x_1^2;\end{cases}\end{cases}$$

so ist nach 12), da jetzt λ_0, λ_1 die kleineren Wurzeln bezeichnen:

$$34) \quad \begin{cases}\lambda_0=\tfrac{1}{2}(x_0^2+y_0^2+a+b)-\tfrac{1}{2}\sqrt{N_0'},\\ \lambda_1=\tfrac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+a+b)-\tfrac{1}{2}\sqrt{N_1'}.\end{cases}$$

Setzen wir

$$35) \ldots \quad L' = \frac{\lambda - \mu_0}{4(\lambda - a)(\lambda - b)} = \frac{\mu_0 - \lambda}{4(\lambda - a)(b - \lambda)},$$

so ist nach 29) allgemein:

$$\partial x^2 + \partial y^2 = L'\partial\lambda^2 = \frac{\mu_0 - \lambda}{4(\lambda - a)(b - \lambda)}\partial\lambda^2,$$

weil hier $\partial\mu$ verschwindet, da μ constant ist; und bezeichnen wir nun den von den Punkten $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$ begränzten, den elliptischen Quadranten nicht übersteigenden Bogen durch s_{01}, so ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar:

$$s_{01} = \int_{x_0}^{x_1} \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden:

$$\partial x^2 \left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\} = \frac{\mu_0 - \lambda}{4(\lambda - a)(b - \lambda)}\partial\lambda^2,$$

also, weil wegen der aus 25) bekannten Formel:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\lambda - a}$$

unter den gemachten Voraussetzungen ∂x und $\partial\lambda$ offenbar gleiche Vorzeichen haben:

$$\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\partial\lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$36) \ldots\ldots \quad s_{01} = \tfrac{1}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \partial\lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}},$$

wo für λ_0 und λ_1 ihre Werthe aus 34), in Verbindung mit 33), zu setzen sind.

Will man den elliptischen Quadranten haben, den wir durch Q bezeichnen wollen, so muss man

$$x_0 = 0,\ y_0 = \sqrt{\mu_0 - b};\quad x_1 = \sqrt{\mu_0 - a},\ y_1 = 0$$

setzen, wofür man nach 33):

$$N_0' = \{(\mu_0 - b) - (a - b)\}^2 = (\mu_0 - a)^2,$$

$$N_1' = \{(\mu_0 - a) + (a - b)\}^2 = (\mu_0 - b)^2;$$

also:

$$\sqrt{N_0'} = \mu_0 - a, \quad \sqrt{N_1'} = \mu_0 - b$$

und folglich nach 34):

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{2}\{(\mu_0 - b) + (a + b)\} - \tfrac{1}{2}(\mu_0 - a) = a,$$
$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\{(\mu_0 - a) + (a + b\} - \tfrac{1}{2}(\mu_0 - b) = b$$

erhält; also ist nach 36):

$$37) \quad \ldots\ldots \quad Q = \tfrac{1}{2}\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}}.$$

Bezeichnet U den ganzen Umfang der Ellipse, so ist also:

$$38) \quad \ldots\ldots \quad U = 2\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{\mu_0 - \lambda}{(\lambda - a)(b - \lambda)}}.$$

§. 7.

Indem wir wiederum die durch die Gleichung 32) chrakterisirte Ellipse betrachten, wollen wir das von den zweiten Coordinaten y_0, y_1, der Axe der x und dem Umfange der Ellipse begränzte Flächenstück derselben zu bestimmen suchen, indem wir alle im vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten. Bezeichnen wir das zu bestimmende Flächenstück durch F_{01}, so ist nach den Lehren der höheren Geometrie bekanntlich:

$$F_{01} = \int_{x_0}^{x_1} y\partial x.$$

Nach 15) ist:

$$y = \sqrt{\frac{(b - \lambda)(\mu_0 - b)}{b - a}},$$

und nach 25) und 15) ist:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{1}{2(\lambda - a)}\sqrt{\frac{(\lambda - a)(\mu_0 - a)}{b - a}},$$

also

$$\partial x = \frac{\partial\lambda}{2(\lambda - a)}\sqrt{\frac{(\lambda - a)(\mu_0 - a)}{b - a}},$$

und folglich:

$$y\partial x = \frac{\partial\lambda}{2(\lambda-a)}\sqrt{\frac{(b-\lambda)(\mu_0-b)}{b-a}}\cdot\sqrt{\frac{(\lambda-a)(\mu_0-a)}{b-a}},$$

oder:

$$y\partial x = \frac{\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}}{2(b-a)}\cdot\partial\lambda\sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen, wenn λ_0, λ_1 ihre aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Bedeutung behalten:

$$39)\ \ldots\ F_{01} = \frac{\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}}{2(b-a)}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\partial\lambda\sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}}.$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der ganzen Ellipse durch E, so ist, wenn wir wie im vorigen Paragraphen $\lambda_0 = a$, $\lambda_1 = b$ setzen:

$$40)\ \ldots\ E = \frac{2\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}}{b-a}\int_a^b\partial\lambda\sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}}.$$

Weil $\sqrt{\mu_0-a}$ und $\sqrt{\mu_0-b}$ die beiden Halbaxen der Ellipse sind, so ist, wie anderweitig genugsam bekannt ist:

$$41)\ \ldots\ldots\ E = \pi\sqrt{(\mu_0-a)(\mu_0-b)}.$$

Vergleicht man die Ausdrücke 40) und 41) mit einander, so erhält man die Formel:

$$42)\ \ldots\ldots\ \int_a^b\partial\lambda\sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = \frac{b-a}{2}\pi.$$

Es wird zweckmässig sein, diese Formel nach einer anderen Methode zu entwickeln, um dadurch zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit unserer im Vorhergehenden geführten Rechnungen zu erhalten.

Setzt man

$$b-\lambda = u,\quad \lambda = b-u;$$

so ist:

$$\lambda-a = b-a-u,\quad \partial\lambda = -\partial u;$$

also:

$$\partial\lambda\sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = -\partial u\sqrt{\frac{u}{b-a-u}};$$

und weil nun für $\lambda = a$, $\lambda = b$ respective $u = b - a$, $u = 0$ ist, so ist:

$$\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = -\int_{b-a}^0 \partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}} = \int_0^{b-a} \partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}}.$$

Setzen wir ferner $u = v^2$, was verstattet ist, weil u jedenfalls positiv ist, und nehmen v positiv, so ist $\partial u = 2v\partial v$, also:

$$\partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}} = \frac{2v^2\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

und folglich, weil für $u=0$, $u=b-a$ respective $v=0$, $v=\sqrt{b-a}$ ist:

$$\int_0^{b-a} \partial u \sqrt{\frac{u}{b-a-u}} = 2\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{v^2\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = 2\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{v^2\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}}.$$

Nach einer sehr bekannten Reductionsformel*) ist aber:

$$\int \frac{v^2\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = -\tfrac{1}{2}v\sqrt{b-a-v^2} + \frac{b-a}{2}\int \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

also offenbar:

$$\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{v^2\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \frac{b-a}{2}\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}},$$

also nach dem Obigen:

$$\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = (b-a)\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}}.$$

Endlich ist:

$$\frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \frac{\dfrac{\partial v}{\sqrt{b-a}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{\sqrt{b-a}}\right)^2}},$$

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. II. S. 85. §. 57.

also, wenn wir

$$w = \frac{v}{\sqrt{b-a}}$$

setzen:

$$\frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}},$$

und folglich, weil für $v = 0$, $v = \sqrt{b-a}$ respective $w = 0$, $w = 1$ ist:

$$\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{\partial v}{\sqrt{b-a-v^2}} = \int_0^1 \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}},$$

also nach dem Obigen:

$$\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = (b-a)\int_0^1 \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Nun ist aber nach einer Fundamentalformel der Differentialrechnung offenbar:

$$\int_0^1 \frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\int_a^b \partial\lambda \sqrt{\frac{b-\lambda}{\lambda-a}} = \frac{b-a}{2}\pi,$$

ganz eben so wie wir in 42) gefunden haben.

So leisten die elliptischen Coordinaten-Transformationen überhaupt häufig bei der Auswerthung bestimmter Integrale vortreffliche Dienste, was das Vorhergehende einigermassen zu erläutern wohl geeignet sein wird.

XXIX.

Theorie der elliptischen Coordinaten im Raume.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Discussion der Wurzeln der Gleichung:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c}\pm 1=0,$$

welche leicht auf die Form:

$$2) \quad \left.\begin{array}{l}\varrho^3-\{(a+b+c)\mp(x^2+y^2+z^2)\}\varrho^2\\ \quad +\{(ab+bc+ca)\mp[(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2]\}\varrho\\ \quad -\{abc\mp(bcx^2+cay^2+abz^2)\}\end{array}\right\}=0,$$

oder auf die Form:

$$3) \quad \left.\begin{array}{l}\varrho^3-\{(a+b+c)\mp(x^2+y^2+z^2)\}\varrho^2\\ \quad +\{(ab+bc+ca)\mp(a+b+c)(x^2+y^2+z^2)\pm(ax^2+by^2+cz^2)\}\varrho\\ \quad -\{abc\mp(bcx^2+cay^2+abz^2)\}\end{array}\right\}=0$$

gebracht wird.

Der Kürze wegen wollen wir aber zwischen den Grössen a, b, c das bestimmte Grössenverhältniss

$$a < b < c$$

voraussetzen, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt wird. Durch i und J soll im Folgenden respective eine positive unendlich kleine Grösse und eine positive unendlich grosse Grösse bezeichnet werden.

Zuerst betrachten wir die Gleichung:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c}+1=0$$

und setzen der Kürze wegen:

$$f(\varrho)=\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c}+1.$$

Unter dieser Voraussetzung ist:

$$f(a+i)=\frac{x^2}{i}+\frac{y^2}{a-b+i}+\frac{z^2}{a-c+i}+1,$$

also $f(a+i)$ offenbar positiv; dagegen ist:

$$f(b-i)=\frac{x^2}{b-a-i}-\frac{y^2}{i}+\frac{z^2}{b-c+i}+1,$$

folglich $f(b-i)$ offenbar negativ; daher liegt zwischen a und b eine reelle Wurzel unserer Gleichung 4), weil zwischen diesen Gränzen Unterbrechungen der Stetigkeit der Function $f(\varrho)$ offenbar nicht Statt finden können. Auf ganz ähnliche Art kann gezeigt werden, dass auch zwischen b und c eine reelle Wurzel der Gleichung 4) liegen muss, woraus nun auch ganz von selbst folgt, dass die dritte Wurzel dieser Gleichung gleichfalls nur reell sein kann, und es also bloss noch auf die Bestimmung der Gränzen ankommt, zwischen denen diese dritte reelle Wurzel liegen muss. Nun ist aber:

$$f(-J)=-\frac{x^2}{J+a}-\frac{y^2}{J+b}-\frac{z^2}{J+c}+1$$

und

$$f(a-i)=-\frac{x^2}{i}+\frac{y^2}{a-b-i}+\frac{z^2}{a-c-i}+1,$$

also offenbar $f(-J)$ positiv und $f(a-i)$ negativ, woraus sich ergiebt, dass die dritte reelle Wnrzel zwischen den Gränzen $-\infty$ und a liegt, also die Gleichung 4) drei im Allgemeinen ungleiche reelle Wurzeln hat, welche in den durch die Grössen

$$-\infty,\ a,\ b,\ c$$

bestimmten drei Intervallen liegen.

Weil, wie man leicht findet:

$$\partial f(\varrho) = -\left\{\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2\right\}\partial\varrho$$

ist, so haben $\partial\varrho$ und $\partial f(\varrho)$ stets entgegengesetzte Vorzeichen, so dass also, wenn ϱ zwischen gewissen Gränzen, zwischen denen keine Unterbrechung der Stetigkeit von $f(\varrho)$ eintritt, wächst oder abnimmt, zwischen denselben Gränzen $f(\varrho)$ respective stets abnehmen oder stets wachsen muss.

Ferner betrachten wir die Gleichung:

5) . . . . . . $$\frac{x^2}{\varrho-a} + \frac{y^2}{\varrho-b} + \frac{z^2}{\varrho-c} - 1 = 0,$$

und setzen der Kürze wegen;

$$F(\varrho) = \frac{x^2}{\varrho-a} + \frac{y^2}{\varrho-b} + \frac{z^2}{\varrho-c} - 1.$$

Weil

$$F(a+i) = \frac{x^2}{i} + \frac{y^2}{a-b+i} + \frac{z^2}{a-c+i} - 1$$

und

$$F(b-i) = \frac{x^2}{b-a-i} - \frac{y^2}{i} + \frac{z^2}{b-c-i} - 1,$$

also offenbar $F(a+i)$ positiv und $F(b-i)$ negativ ist; so liegt zwischen a und b eine reelle Wurzel der Gleichung 5). Ganz eben so wird gezeigt, dass auch zwischen b und c eine reelle Wurzel dieser Gleichung liegt, woraus nun schon von selbst folgt, dass deren dritte Wurzel gleichfalls reell sein muss, und also bloss noch die Gränzen dieser dritten reellen Wurzel zu bestimmen sind. Weil aber

$$F(c+i) = \frac{x^2}{c-a+i} + \frac{y^2}{c-b+i} + \frac{z^2}{i} - 1$$

und

$$F(+J) = \frac{x^2}{J-a} + \frac{y^2}{J-b} + \frac{z^2}{J-c} - 1,$$

also offenbar $F(c+i)$ positiv und $F(+J)$ negativ ist, so kann die

dritte reelle Wurzel nur zwischen c und $+\infty$ liegen, und die Gleichung 5) hat also drei im Allgemeinen ungleiche reelle Wurzeln, welche in den durch die Grössen

$$a,\ b,\ c,\ +\infty$$

bestimmten drei Intervallen liegen.

Weil

$$\partial F(\varrho) = -\left\{\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2\right\}\partial\varrho$$

ist, so haben $\partial\varrho$ und $\partial F(\varrho)$ stets entgegengesetzte Vorzeichen, und wenn also ϱ zwischen gewissen Gränzen, zwischen denen eine Unterbrechung der Stetigkeit von $F(\varrho)$ nicht eintritt, wächst oder abnimmt, so wird zwischen denselben Gränzen $F(\varrho)$ respective stets abnehmen oder stets wachsen.

§. 2.

Die drei im Allgemeinen ungleichen reellen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho-a} + \frac{y^2}{\varrho-b} + \frac{z^2}{\varrho-c} \pm 1 = 0$$

bezeichnen wir durch λ, μ, ν; und haben mit Rücksicht auf die Gleichung 3) nach einem allgemeinen Satze von den Gleichungen zwischen diesen drei Wurzeln die drei Gleichungen:

6)

$$\lambda+\mu+\nu = (a+b+c) \mp (x^2+y^2+z^2),$$

$$\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda$$

$$= (ab+bc+ca) \mp (a+b+c)(x^2+y^2+z^2) \pm (ax^2+by^2+cz^2),$$

$$\lambda\mu\nu = abc \mp (bcx^2+cay^2+abz^2).$$

Da λ, μ, ν offenbar auch die Wurzeln der Gleichung

$$x^2(\varrho-b)(\varrho-c)+y^2(\varrho-c)(\varrho-a)+z^2(\varrho-a)(\varrho-b)\pm(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)=0$$

oder

$$(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)\pm x^2(\varrho-b)(\varrho-c)\pm y^2(\varrho-c)(\varrho-a)\pm z^2(\varrho-a)(\varrho-b)=0$$

sind, so ist für jedes ϱ nach einem bekannten Satze von den Gleichungen:

7)

$$(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)\pm x^2(\varrho-b)(\varrho-c)\pm y^2(\varrho-c)(\varrho-a)\pm z^2(\varrho-a)(\varrho-b) = (\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu).$$

Setzt man in dieser Gleichung, welche, wie bemerkt, für jedes ϱ gilt, nach und nach $\varrho=a$, $\varrho=b$, $\varrho=c$; so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$8) \ldots \begin{cases} (a-b)(a-c)x^2 = \pm(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu), \\ (b-c)(b-a)y^2 = \pm(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu), \\ (c-a)(c-b)z^2 = \pm(c-\lambda)(c-\mu)(c-\nu); \end{cases}$$

oder:

$$9) \ldots\ldots \begin{cases} x^2 = \pm\dfrac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 = \pm\dfrac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{(b-c)(b-a)}, \\ z^2 = \pm\dfrac{(c-\lambda)(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung 7) nach und nach $\varrho=\lambda$, $\varrho=\mu$, $\varrho=\nu$, und der Kürze wegen:

$$10) \ldots\ldots \begin{cases} L = (\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c), \\ M = (\mu-a)(\mu-b)(\mu-c), \\ N = (\nu-a)(\nu-b)(\nu-c); \end{cases}$$

so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

11)

$$L \pm(\lambda-b)(\lambda-c)x^2 \pm(\lambda-c)(\lambda-a)y^2 \pm(\lambda-a)(\lambda-b)z^2 = 0,$$
$$M \pm(\mu-b)(\mu-c)x^2 \pm(\mu-c)(\mu-a)y^2 \pm(\mu-a)(\mu-b)z^2 = 0,$$
$$N \pm(\nu-b)(\nu-c)x^2 \pm(\nu-c)(\nu-a)y^2 \pm(\nu-a)(\nu-b)z^2 = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit:

$$(\mu-c)(\mu-a).(\nu-a)(\nu-b)-(\mu-a)(\mu-b).(\nu-c)(\nu-a)$$
$$= (\mu-a)(\nu-a)\{(\mu-c)(\nu-b)-(\mu-b)(\nu-c)\}$$
$$= -(b-c)(\mu-\nu)(\mu-a)(\nu-a),$$

$$(\nu-c)(\nu-a).(\lambda-a)(\lambda-b)-(\nu-a)(\nu-b).(\lambda-c)(\lambda-a)$$
$$= (\nu-a)(\lambda-a)\{(\nu-c)(\lambda-b)-(\nu-b)(\lambda-c)\}$$
$$= -(b-c)(\nu-\lambda)(\nu-a)(\lambda-a),$$

$$(\lambda-c)(\lambda-a).(\mu-a)(\mu-b)-(\lambda-a)(\lambda-b).(\mu-c)(\mu-a)$$
$$=(\lambda-a)(\mu-a)\{(\lambda-c)(\mu-b)-(\lambda-b)(\mu-c)\}$$
$$=-(b-c)(\lambda-\mu)(\lambda-a)(\mu-a);$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$12) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} A=(\lambda-a)(\mu-a)(\nu-a), \\ B=(\lambda-b)(\mu-b)(\nu-b), \\ C=(\lambda-c)(\mu-c)(\nu-c) \end{array}\right.$$

gesetzt wird, nach der Reihe mit

$$-\frac{(b-c)(\mu-\nu)A}{\lambda-a}, \quad -\frac{(b-c)(\nu-\lambda)A}{\mu-a}, \quad -\frac{(b-c)(\lambda-\mu)A}{\nu-a}$$

und addirt dann die drei Gleichungen zu einander; so erhält man nach einfacher Reduction die Gleichung:

$$\frac{\mu-\nu}{\lambda-a}L+\frac{\nu-\lambda}{\mu-a}M+\frac{\lambda-\mu}{\nu-a}N$$
$$\pm\left\{\frac{(\mu-\nu)(\lambda-b)(\lambda-c)}{\lambda-a}+\frac{(\nu-\lambda)(\mu-b)(\mu-c)}{\mu-a}+\frac{(\lambda-\mu)(\nu-b)(\nu-c)}{\nu-a}\right\}x^2$$
$$=0,$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$\left\{\frac{\mu-\nu}{(\lambda-a)^2}L+\frac{\nu-\lambda}{(\mu-a)^2}M+\frac{\lambda-\mu}{(\nu-a)^2}N\right\}x^2$$
$$=\mp\left\{\frac{\mu-\nu}{\lambda-a}L+\frac{\nu-\lambda}{\mu-a}M+\frac{\lambda-\mu}{\nu-a}N\right\}.$$

Nimmt man aber in dieser Gleichung eine einfache Vertauschung der Buchstaben vor, so erhält man überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

13)

$$\left\{\frac{\mu-\nu}{(\lambda-a)^2}L+\frac{\nu-\lambda}{(\mu-a)^2}M+\frac{\lambda-\mu}{(\nu-a)^2}N\right\}x^2$$
$$=\mp\left\{\frac{\mu-\nu}{\lambda-a}L+\frac{\nu-\lambda}{\mu-a}M+\frac{\lambda-\mu}{\nu-a}N\right\},$$

$$\left\{\frac{\mu-\nu}{(\lambda-b)^2}L+\frac{\nu-\lambda}{(\mu-b)^2}M+\frac{\lambda-\mu}{(\nu-b)^2}N\right\}y^2$$
$$=\mp\left\{\frac{\mu-\nu}{\lambda-b}L+\frac{\nu-\lambda}{\mu-b}M+\frac{\lambda-\mu}{\nu-b}N\right\},$$

$$\left\{\frac{\mu-\nu}{(\lambda-c)^2}L+\frac{\nu-\lambda}{(\mu-c)^2}M+\frac{\lambda-\mu}{(\nu-c)^2}N\right\}z^2$$

$$=\mp\left\{\frac{\mu-\nu}{\lambda-c}L+\frac{\nu-\lambda}{\mu-c}M+\frac{\lambda-\mu}{\nu-c}N\right\}.$$

Aus den drei Gleichungen 11) ergeben sich auch unmittelbar die drei folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\{(\lambda-b)(\lambda-c)M-(\mu-b)(\mu-c)L\}x^2\\ +\{(\lambda-c)(\lambda-a)M-(\mu-c)(\mu-a)L\}y^2\\ +\{(\lambda-a)(\lambda-b)M-(\mu-a)(\mu-b)L\}z^2\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(\mu-b)(\mu-c)N-(\nu-b)(\nu-c)M\}x^2\\ +\{(\mu-c)(\mu-a)N-(\nu-c)(\nu-a)M\}y^2\\ +\{(\mu-a)(\mu-b)N-(\nu-a)(\nu-b)M\}z^2\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(\nu-b)(\nu-c)L-(\lambda-b)(\lambda-c)N\}x^2\\ +\{(\nu-c)(\nu-a)L-(\lambda-c)(\lambda-a)N\}y^2\\ +\{(\nu-a)(\nu-b)L-(\lambda-a)(\lambda-b)N\}z^2\end{array}\right\}=0$$

oder:

$$\left(\frac{LM}{\lambda-a}-\frac{LM}{\mu-a}\right)x^2+\left(\frac{LM}{\lambda-b}-\frac{LM}{\mu-b}\right)y^2+\left(\frac{LM}{\lambda-c}-\frac{LM}{\mu-c}\right)z^2=0,$$

$$\left(\frac{MN}{\mu-a}-\frac{MN}{\nu-a}\right)x^2+\left(\frac{MN}{\mu-b}-\frac{MN}{\nu-b}\right)y^2+\left(\frac{MN}{\mu-c}-\frac{MN}{\nu-c}\right)z^2=0,$$

$$\left(\frac{NL}{\nu-a}-\frac{NL}{\lambda-a}\right)x^2+\left(\frac{NL}{\nu-b}-\frac{NL}{\lambda-b}\right)y^2+\left(\frac{NL}{\nu-c}-\frac{NL}{\lambda-c}\right)z^2=0;$$

also offenbar:

14)

$$\frac{x^2}{(\lambda-a)(\mu-a)}+\frac{y^2}{(\lambda-b)(\mu-b)}+\frac{z^2}{(\lambda-c)(\mu-c)}=0,$$

$$\frac{x^2}{(\mu-a)(\nu-a)}+\frac{y^2}{(\mu-b)(\nu-b)}+\frac{z^2}{(\mu-c)(\nu-c)}=0,$$

$$\frac{x^2}{(\nu-a)(\lambda-a)}+\frac{y^2}{(\nu-b)(\lambda-b)}+\frac{z^2}{(\nu-c)(\lambda-c)}=0.$$

Schreibt man die für jedes ϱ geltende Gleichung 7) unter der Form:

15)

$$\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c}\pm 1=\pm\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)}$$

und differentiirt dieselbe dann nach ϱ, so erhält man die Gleichung:

$$16)\ \ldots\ldots\ \left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2$$

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)[(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)+(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)+(\varrho-\nu)(\varrho-\lambda)]\\-(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)[(\varrho-a)(\varrho-b)+(\varrho-b)(\varrho-c)+(\varrho-c)(\varrho-a)]\end{array}\right.}{(\varrho-a)^2(\varrho-b)^2(\varrho-c)^2};$$

also, wenn wir nach und nach $\varrho=\lambda$, $\varrho=\mu$, $\varrho=\nu$ setzen:

17)

$$\left(\frac{x}{\lambda-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\lambda-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\lambda-c}\right)^2=\mp\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)},$$

$$\left(\frac{x}{\mu-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\mu-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\mu-c}\right)^2=\mp\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)},$$

$$\left(\frac{x}{\nu-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\nu-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\nu-c}\right)^2=\mp\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}.$$

Die durch Differentiation hergeleitete Gleichung 15) kann man auch auf folgende Art schreiben:

$$\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2$$

$$=\mp\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{\varrho-\lambda}+\dfrac{1}{\varrho-\mu}+\dfrac{1}{\varrho-\nu}\\-\dfrac{1}{\varrho-a}-\dfrac{1}{\varrho-b}-\dfrac{1}{\varrho-c}\end{array}\right\},$$

also auf folgende Art:

$$18)\ \ldots\ldots\ \left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2$$

$$=\mp\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(\varrho-a)(\varrho-b)(\varrho-c)}\left\{\frac{\lambda-a}{(\varrho-a)(\varrho-\lambda)}+\frac{\mu-b}{(\varrho-b)(\varrho-\mu)}+\frac{\nu-c}{(\varrho-c)(\varrho-\nu)}\right\}$$

woraus sich, wenn man hiemit 16) verbindet, die Relation:

$$19) \quad \dots\dots \frac{\left(\frac{x}{\varrho-a}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho-b}\right)^2+\left(\frac{z}{\varrho-c}\right)^2}{\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c}\pm 1}$$

$$=-\left\{\frac{\lambda-a}{(\varrho-a)(\varrho-\lambda)}+\frac{\mu-b}{(\varrho-b)(\varrho-\mu)}+\frac{\nu-c}{(\varrho-c)(\varrho-\nu)}\right\}$$

ergiebt.

Aus den Formeln 9) erhält man durch partielle Differentiation nach λ, μ, ν:

$$2x\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\mp\frac{(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)},$$

$$2x\frac{\partial x}{\partial \mu}=\mp\frac{(a-\nu)(a-\lambda)}{(a-b)(a-c)},$$

$$2x\frac{\partial x}{\partial \nu}=\mp\frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{(a-b)(a-c)};$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial \lambda}=\mp\frac{(b-\mu)(b-\nu)}{(b-c)(b-a)},$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial \mu}=\mp\frac{(b-\nu)(b-\lambda)}{(b-c)(b-a)},$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial \nu}=\mp\frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{(b-c)(b-a)};$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\mp\frac{(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)},$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial \mu}=\mp\frac{(c-\nu)(c-\lambda)}{(c-a)(c-b)},$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial \nu}=\mp\frac{(c-\lambda)(c-\mu)}{(c-a)(c-b)}$$

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\mp\frac{x}{2}\cdot\frac{(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}=\mp\frac{x}{2}\cdot\frac{(a-\nu)(a-\lambda)}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu}=\mp\frac{x}{2}\cdot\frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=\mp\frac{y}{2}\cdot\frac{(b-\mu)(b-\nu)}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}=\mp\frac{y}{2}\cdot\frac{(b-\nu)(b-\lambda)}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}=\mp\frac{y}{2}\cdot\frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\mp\frac{z}{2}\cdot\frac{(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}=\mp\frac{z}{2}\cdot\frac{(c-\nu)(c-\lambda)}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}=\mp\frac{z}{2}\cdot\frac{(c-\lambda)(c-\mu)}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{z^2};$$

und folglich nach 9):

20)

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{a-\lambda}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-a},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{a-\mu}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\mu-a},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{a-\nu}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\nu-a};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=-\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{b-\lambda}=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-b},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}=-\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{b-\mu}=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{\mu-b},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}=-\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{b-\nu}=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{\nu-b};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=-\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{c-\lambda}=\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-c},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}=-\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{c-\mu}=\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{\mu-c},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}=-\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{c-\nu}=\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{\nu-c}.$$

Weil nun

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\partial\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\partial\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu}\partial\nu,$$

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\partial\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu}\partial\mu + \frac{\partial y}{\partial \nu}\partial\nu,$$

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\partial\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu}\partial\mu + \frac{\partial z}{\partial \nu}\partial\nu$$

ist; so ist nach den vorstehenden Formeln:

$$21) \ldots \begin{cases} \partial x = \frac{x}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda-a} + \frac{\partial\mu}{\mu-a} + \frac{\partial\nu}{\nu-a}\right), \\ \partial y = \frac{y}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda-b} + \frac{\partial\mu}{\mu-b} + \frac{\partial\nu}{\nu-b}\right), \\ \partial z = \frac{z}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda-c} + \frac{\partial\mu}{\mu-c} + \frac{\partial\nu}{\nu-c}\right). \end{cases}$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man offenbar die folgende Gleichung:

$$4(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)$$

$$\begin{aligned}
= & \left\{\left(\frac{x}{\lambda-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda-c}\right)^2\right\}\partial\lambda^2 \\
+ & \left\{\left(\frac{x}{\mu-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\mu-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\mu-c}\right)^2\right\}\partial\mu^2 \\
+ & \left\{\left(\frac{x}{\nu-a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\nu-b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\nu-c}\right)^2\right\}\partial\nu^2 \\
+ 2 & \left\{\frac{x^2}{(\lambda-a)(\mu-a)} + \frac{y^2}{(\lambda-b)(\mu-b)} + \frac{z^2}{(\lambda-c)(\mu-c)}\right\}\partial\lambda\partial\mu \\
+ 2 & \left\{\frac{x^2}{(\mu-a)(\nu-a)} + \frac{y^2}{(\mu-b)(\nu-b)} + \frac{z^2}{(\mu-c)(\nu-c)}\right\}\partial\mu\partial\nu \\
+ 2 & \left\{\frac{x^2}{(\nu-a)(\lambda-a)} + \frac{y^2}{(\nu-b)(\lambda-b)} + \frac{z^2}{(\nu-c)(\lambda-c)}\right\}\partial\nu\partial\lambda,
\end{aligned}$$

und folglich nach 17) und 14):

$$22) \ldots\ldots\ldots 4(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \mp\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)}\partial\lambda^2 \\
&\mp\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)}\partial\mu^2 \\
&\mp\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}\partial\nu^2,
\end{aligned}$$

oder, wenn der Kürze wegen:

23)

$$L' = \mp \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)} = \mp \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4L},$$

$$M' = \mp \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)} = \mp \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4M},$$

$$N' = \mp \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)} = \mp \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4N}$$

gesetzt wird:

24) . . . . $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = L'\partial\lambda^2 + M'\partial\mu^2 + N'\partial\nu^2.$

§. 3.

Wir wollen nun untersuchen, welche Flächen des zweiten Grades durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda-a} + \frac{y^2}{\lambda-b} + \frac{z^2}{\lambda-c} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\mu-a} + \frac{y^2}{\mu-b} + \frac{z^2}{\mu-c} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\nu-a} + \frac{y^2}{\nu-b} + \frac{z^2}{\nu-c} - 1 = 0;$$

oder:

25) . . . . . . $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda-a} + \dfrac{y^2}{\lambda-b} + \dfrac{z^2}{\lambda-c} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\mu-a} + \dfrac{y^2}{\mu-b} + \dfrac{z^2}{\mu-c} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu-a} + \dfrac{y^2}{\nu-b} + \dfrac{z^2}{\nu-c} = 1 \end{cases}$$

dargestellt werden, wenn wir voraussetzen, dass

$$a < \lambda < b < \mu < c < \nu$$

sei, so dass also λ, μ, ν in dieser Folge nach der Grösse aufsteigend geordnet sind. Schreiben wir aber diese Gleichungen unter der Form:

$$26) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{x^2}{\lambda-a}-\frac{y^2}{b-\lambda}-\frac{z^2}{c-\lambda}=1, \\ \frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}-\frac{z^2}{c-\mu}=1, \\ \frac{x^2}{\nu-a}+\frac{y^2}{\nu-b}+\frac{z^2}{\nu-c}=1; \end{cases}$$

wo nun alle Nenner positiv sind, so ergiebt sich aus der allgemeinen Theorie der Flächen des zweiten Grades*) ohne Weiteres, dass die erste, zweite, dritte Gleichung respective ein Hyperboloid mit zwei Fächern, ein Hyperboloid mit einem Fache, ein Ellipsoid darstellt.

Wir wollen nun die Hauptschnitte dieser Flächen genauer untersuchen.

Die Gleichungen der durch die Axen der x und y gelegten Schnitte sind beziehungsweise:

$$\frac{x^2}{\lambda-a}-\frac{y^2}{b-\lambda}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu-a}+\frac{y^2}{\nu-b}=1;$$

und sind also respective eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Ellipse. Weil $\mu-a>\mu-b$, $\nu-a>\nu-b$ ist, so ist für alle drei Kegelschnitte die Axe der x die Hauptaxe, in welcher die Brennpunkte liegen, und die Axe der y ist die Nebenaxe. Die Quadrate der halben Excentricitäten sind beziehungsweise:

$$(\sqrt{\lambda-a})^2+(\sqrt{b-\lambda})^2=(\lambda-a)+(b-\lambda)=b-a,$$

$$(\sqrt{\mu-a})^2-(\sqrt{\mu-b})^2=(\mu-a)-(\mu-b)=b-a,$$

$$(\sqrt{\nu-a})^2-(\sqrt{\nu-b})^2=(\nu-a)-(\nu-b)=b-a;$$

und die durch die Axen der x und y gelegten Schnitte sind folglich confocal für alle Werthe von λ, μ, ν.

Die Gleichungen der durch die Axen der y und z gelegten Schnitte sind beziehungsweise:

---

*) M. s. meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. II. S. 210. §. 76.

$$-\frac{y^2}{b-\lambda}-\frac{z^2}{c-\lambda}=1,$$

$$\frac{y^2}{\mu-b}-\frac{z^2}{c-\mu}=1,$$

$$\frac{y^2}{\nu-b}+\frac{z^2}{\nu-c}=1;$$

und sind also respective imaginär, eine Hyperbel, eine Ellipse. Weil $\nu-b>\nu-c$ ist, so ist für beide Kegelschnitte die Axe der y die Hauptaxe, in welcher die Brennpunkte liegen, und die Axe der z ist die Nebenaxe. Die Quadrate der halben Excentricitäten sind beziehungsweise:

$$(\sqrt{\mu-b})^2+(\sqrt{c-\mu})^2=(\mu-b)+(c-\mu)=c-b,$$

$$(\sqrt{\nu-b})^2-(\sqrt{\nu-c})^2=(\nu-b)-(\nu-c)=c-b;$$

und die durch die Axen der y und z gelegten Schnitte sind folglich wiederum confocal für alle Werthe von λ, μ, ν.

Die Gleichungen der durch die Axen der z und x gelegten Schnitte sind beziehungsweise:

$$\frac{x^2}{\lambda-a}-\frac{z^2}{c-\lambda}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu-a}-\frac{z^2}{c-\mu}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu-a}+\frac{z^2}{\nu-c}=1;$$

und sind also respective eine Hyperbel, eine Hyperbel, eine Ellipse. Weil $\nu-a>\nu-c$ ist, so ist für alle drei Kegelschnitte die Axe der x die Hauptaxe, in welcher die Brennpunkte liegen, und die Axe der z ist die Nebenaxe. Die Quadrate der halben Excentricitäten sind beziehungsweise:

$$(\sqrt{\lambda-a})^2+(\sqrt{c-\lambda})^2=(\lambda-a)+(c-\lambda)=c-a,$$

$$(\sqrt{\mu-a})^2+(\sqrt{c-\mu})^2=(\mu-a)+(c-\mu)=c-a,$$

$$(\sqrt{\nu-a})^2-(\sqrt{\nu-c})^2=(\nu-a)-(\nu-c)=c-a;$$

und auch die durch die Axen der z und x gelegten Schnitte sind folglich confocal für alle Werthe von λ, μ, ν.

Wegen dieser Eigenschaften der Hauptschnitte nennt man

die drei durch die Gleichungen 26) charakterisirten Flächen des zweiten Grades selbst **confocal**, eine Eigenschaft, welche diesen Flächen für alle Werthe von λ, μ, ν zukommt.

Wenn (xyz) ein gemeinschaftlicher Punkt unserer drei confocalen Flächen ist, und die veränderlichen oder laufenden Coordinaten jetzt durch u, v, w bezeichnet werden; so sind bekanntlich die Gleichungen der Berührungsebenen der drei Flächen in dem Punkte (xyz) respective:

$$\frac{xu}{\lambda-a}+\frac{yv}{\lambda-b}+\frac{zw}{\lambda-c}=1,$$

$$\frac{xu}{\mu-a}+\frac{yv}{\mu-b}+\frac{zw}{\mu-c}=1,$$

$$\frac{xu}{\nu-a}+\frac{yv}{\nu-b}+\frac{zw}{\nu-c}=1;$$

und weil wir nun nach 14) die drei folgenden Gleichungen haben:

$$\left(\frac{x}{\lambda-a}\right)\left(\frac{x}{\mu-a}\right)+\left(\frac{y}{\lambda-b}\right)\left(\frac{y}{\mu-b}\right)+\left(\frac{z}{\lambda-c}\right)\left(\frac{z}{\mu-c}\right)=0,$$

$$\left(\frac{x}{\mu-a}\right)\left(\frac{x}{\nu-a}\right)+\left(\frac{y}{\mu-b}\right)\left(\frac{y}{\nu-b}\right)+\left(\frac{z}{\mu-c}\right)\left(\frac{z}{\nu-c}\right)=0,$$

$$\left(\frac{x}{\nu-a}\right)\left(\frac{x}{\lambda-a}\right)+\left(\frac{y}{\nu-b}\right)\left(\frac{y}{\lambda-b}\right)+\left(\frac{z}{\nu-c}\right)\left(\frac{z}{\lambda-c}\right)=0;$$

so stehen nach den Lehren der analytischen Geometrie die drei in Rede stehenden Berührungsebenen jederzeit gegenseitig auf einander senkrecht; und man kann also auch sagen, dass die Durchschnittslinien der drei confocalen Flächen gegenseitig auf einander senkrecht stehen.

§. 4.

Wir wollen uns jetzt im Raume ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz, und einen ganz beliebigen Punkt, dessen Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden mögen, denken. Nun nehmen wir drei beliebige Grössen a, b, c an, welche wir jedoch grösserer Bestimmtheit wegen der Bedingung unterwerfen, dass $a<b<c$ sein soll. Bilden wir dann die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho-a}+\frac{y^2}{\varrho-b}+\frac{z^2}{\varrho-c}=1,$$

so hat dieselbe, wie im Obigen gezeigt worden ist, jederzeit drei reelle ungleiche Wurzeln λ, μ, ν, die sich durch Auflösung der vorstehenden Gleichung bestimmen lassen, und von denen wir aus dem Obigen wissen, dass sie in den drei durch die Grössen

$$a, b, c, +\infty$$

bestimmten Intervallen liegen, so dass also, wenn wir grösserer Bestimmtheit wegen annehmen, dass die Wurzeln λ, μ, ν in dieser Folge nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet seien, jederzeit

$$a < \lambda < b < \mu < c < \nu$$

ist. Die Coordinaten unseres Punktes (xyz) genügen hiernach den drei Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu - a} + \frac{y^2}{\mu - b} + \frac{z^2}{\mu - c} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu - a} + \frac{y^2}{\nu - b} + \frac{z^2}{\nu - c} = 1;$$

und der Punkt (xyz) ist also ein, den durch diese drei Gleichungen dargestellten confocalen Flächen des zweiten Grades, von denen die erste ein Hyperboloid mit zwei Fächern, die zweite ein Hyperboloid mit einem Fache, die dritte ein Ellipsoid ist, gemeinschaftlicher Punkt. Construirt man also diese drei Flächen, — oder denkt sich dieselben construirt, — so wird der Punkt (xyz) ein Durchschnittspunkt dieser drei confocalen Flächen des zweiten Grades, folglich durch dieselben jedenfalls bestimmt sein. Vollständig ist freilich die Bestimmung der Lage des Punktes (xyz) durch die drei in Rede stehenden confocalen Flächen des zweiten Grades nicht, weil man natürlich für die acht Punkte, deren Coordinaten

$$\begin{array}{lll}
+x, & +y, & +z; \\
-x, & +y, & +z; \\
-x, & -y, & +z; \\
+x, & -y, & +z; \\
+x, & +y, & -z; \\
-x, & +y, & -z; \\
-x, & -y, & -z; \\
+x, & -y, & -z
\end{array}$$

sind, ganz dieselben drei confocalen Flächen des zweiten Grades erhält; aber **einer** der acht Punkte, in denen diese drei confocalen Flächen des zweiten Grades sich im Allgemeinen jederzeit schneiden, wird der in Rede stehende Punkt immer sein. Man kann also in gewisser Rücksicht die drei confocalen Flächen des zweiten Grades als eine Art krummflächiger Coordinaten des durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmten Punktes (xyz) betrachten, pflegt jedoch meistens auch bei Betrachtungen im Raume überhaupt die drei durch x, y, z völlig bestimmten Grössen λ, μ, ν, welche der Bedingung

$$a < \lambda < b < \mu < c < \nu$$

genügen, selbst die **elliptischen Coordinaten** des durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmten Punktes (xyz) zu nennen.

Diese Betrachtungen kann man aber auch umkehren. Lässt man nämlich die drei als beliebige unabhängige Variable zu betrachtenden Grössen λ, μ, ν zwar im Allgemeinen beliebig, jedoch so variiren, dass λ sich immer zwischen den Gränzen a und b, μ sich zwischen den Gränzen b und c, ν sich zwischen den Gränzen c und $+\infty$ bewegt; so werden zu jeden drei bestimmten Werthen dieser Variablen gewisse bestimmte Werthe der Grössen x, y, z gehören, welche den drei Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}+\frac{z^2}{\mu-c}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu-a}+\frac{y^2}{\nu-b}+\frac{z^2}{\nu-c}=1$$

genügen, und nach 9) durch die Formeln:

$$x^2=-\frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)},$$

$$y^2=-\frac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{(b-c)(b-a)},$$

$$z^2=-\frac{(c-\lambda)(c-\mu)(c-\nu)}{(c-a)(c-b)}$$

oder:

$$x^2 = \frac{(\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a)}{(b - a)(c - a)},$$

$$y^2 = \frac{(b - \lambda)(\mu - b)(\nu - b)}{(c - b)(b - a)},$$

$$z^2 = \frac{(c - \lambda)(c - \mu)(\nu - c)}{(c - a)(c - b)}$$

bestimmt werden, wobei zu beachten ist, dass wegen der Bedingung

$$a < \lambda < b < \mu < c < \nu$$

offenbar

$$\frac{(\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a)}{(b - a)(c - a)},$$

$$\frac{(b - \lambda)(\mu - b)'\nu - b)}{(c - b)(b - a)},$$

$$\frac{(c - \lambda)(c - \mu)(\nu - c)}{(c - a)(c - b)}$$

jederzeit positive Grössen sind, die obigen Formeln also für x, y, z immer reelle Werthe liefern. Freilich ergeben sich aus diesen Formeln, wenn wir der Kürze wegen:

$$\mathfrak{A} = \frac{(\lambda - a)(\mu - a)(\nu - a)}{(a - b)(a - c)},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{(\lambda - b)(\mu - b)(\nu - b)}{(b - c)(b - a)},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(\lambda - c)(\mu - c)(\nu - c)}{(c - a)(c - b)}$$

setzen, für x, y, z die acht entsprechenden Systeme von Werthen:

$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = -\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = -\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = -\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = -\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = +\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}}, \quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}}, \quad z = -\sqrt{\mathfrak{C}};$$

$$x = -\sqrt{\mathfrak{A}},\quad y = +\sqrt{\mathfrak{B}},\quad z = -\sqrt{\mathfrak{C}};$$
$$x = -\sqrt{\mathfrak{A}},\quad y = -\sqrt{\mathfrak{B}},\quad z = -\sqrt{\mathfrak{C}};$$
$$x = +\sqrt{\mathfrak{A}},\quad y = -\sqrt{\mathfrak{B}},\quad z = -\sqrt{\mathfrak{C}};$$

wodurch jederzeit acht gegen die Axen der x, y, z symmetrisch liegende Punkte im Raume bestimmt werden, welche die acht Durchschnittspunkte der durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}=1,$$
$$\frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}+\frac{z^2}{\mu-c}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu-a}+\frac{y^2}{\nu-b}+\frac{z^2}{\nu-c}=1$$

bestimmten drei confocalen Flächen des zweiten Grades: eines Hyperboloids mit zwei Fächern, eines Hyperboloids mit einem Fache und eines Ellipsoids, sind. Lässt man aber λ, μ, ν in der angegebenen Weise sich verändern, und bestimmt immer die drei entsprechenden confocalen Flächen des zweiten Grades über den angenommenen Axen der x, y, z als Axen; so wird man natürlich unendlich viele solcher Systeme von confocalen Hyperboloiden mit zwei Fächern, Hyperboloiden mit einem Fache und Ellipsoiden erhalten, welche gewissermassen den ganzen Raum ausfüllen, und in ihren acht Durchschnittspunkten alle Punkte des Raumes liefern.

§. 5.

Um eine Anwendung des Bisherigen zu zeigen, wollen wir der Grösse ν den bestimmten, c übersteigenden Werth ν_0 beilegen, und das bestimmte Ellipsoid

$$27) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\nu_0-a}+\frac{y^2}{\nu_0-b}+\frac{z^2}{\nu_0-c}=1$$

betrachten, indem wir von demselben nur den in dem ersten der acht durch die Axen der x, y, z bestimmten körperlichen Winkel, welchem die positiven Theile der in Rede stehenden Axen entsprechen, liegenden Theil in's Auge fassen.

Denken wir uns auf der Oberfläche dieses Theiles des Ellipsoids einen beliebigen Punkt und die beiden durch denselben

gelegten confocalen Hyperboloide, so stehen deren Durchschnittslinien mit dem Ellipsoid und mit einander bekanntlich gegenseitig auf einander senkrecht. Die Quadrate der Elemente der beiden Durchschnittslinien mit dem Ellipsoid erhält man aber offenbar aus der Gleichung 24), wenn man etwa zuerst μ, ν als constant betrachtet und folglich $\partial\mu=0$, $\partial\nu=0$ setzt, dann λ, ν als constant betrachtet und folglich $\partial\lambda=0$, $\partial\nu=0$ setzt, wodurch man nach 24) die folgenden Ausdrücke für die Quadrate dieser Elemente erhält, indem man natürlich ν_0 für ν schreibt:

$$L'\partial\lambda^2,\quad M'\partial\mu^2;$$

wo

$$L'=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu_0)}{4(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)}=\frac{(\mu-\lambda)(\nu_0-\lambda)}{4(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)},$$

$$M'=\frac{(\mu-\nu_0)(\mu-\lambda)}{4(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)}=\frac{(\nu_0-\mu)(\mu-\lambda)}{4(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)}$$

zu setzen ist, so dass also die beiden auf einander senkrecht stehenden Linienelemente selbst:

$$\tfrac{1}{2}\partial\lambda\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu_0-\lambda)}{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)}},$$

$$\tfrac{1}{2}\partial\mu\sqrt{\frac{(\nu_0-\mu)(\mu-\lambda)}{(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)}}$$

sind. Folglich ist das Flächenelement:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(\mu-\lambda)\sqrt{(\nu_0-\lambda)(\nu_0-\mu)}}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)}}\partial\lambda\partial\mu,$$

und da sich nun λ von a bis b, μ von b bis c verändern kann, so ist, wenn F den Inhalt der Oberfläche des ganzen Ellipsoids bezeichnet:

$$\tfrac{1}{8}F=\tfrac{1}{4}\int_b^c\int_a^b\frac{(\mu-\lambda)\sqrt{(\nu_0-\lambda)(\nu_0-\mu)}}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)}}\partial\lambda\partial\mu,$$

also:

28)

$$F=2\int_b^c\int_a^b\frac{(\mu-\lambda)\sqrt{(\nu_0-\lambda)(\nu_0-\mu)}}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)}}\partial\lambda\partial\mu.$$

Das Quadrat eines ganz beliebigen Körperelements ist, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen sich ohne Weiteres ergiebt:

$$L'M'N'\partial\lambda^2\partial\mu^2\partial\nu^2,$$

wo

$$L' = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)} = \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)},$$

$$M' = \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)} = \frac{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}{4(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)},$$

$$N' = \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)} = \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}$$

zu setzen ist, so dass also das Körperelement offenbar:

$$\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{8\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}}\partial\lambda\partial\mu\partial\nu$$

ist; und da sich nun λ von a bis b, μ von b bis c, ν von c bis ν_0 verändert, so ist, wenn V das Volumen des ganzen Ellipsoids bezeichnet:

$$29) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad V = \int_c^{\nu_0}\int_b^c\int_a^b \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}}\partial\lambda\partial\mu\partial\nu.$$

Anderweitig ist aber hinreichend bekannt, dass

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{(\nu_0-a)(\nu_0-b)(\nu_0-c)}$$

ist, weil die drei Halbaxen unseres Ellipsoids

$$\sqrt{\nu_0-a}, \quad \sqrt{\nu_0-b}, \quad \sqrt{\nu_0-c}$$

sind, woraus sich, wenn man diesen Ausdruck von V mit dem Ausdrucke 29) derselben Grösse vergleicht, die merkwürdige Gleichung:

$$\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{(\nu_0-a)(\nu_0-b)(\nu_0-c)} = \int_c^{\nu_0}\int_b^c\int_a^b \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}}\partial\lambda\partial\mu\partial\nu,$$

oder, wenn man, was offenbar verstattet ist, ν für ν_0 schreibt, die Gleichung:

30)

$$\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}=\int_c^\nu\int_b^c\int_a^b\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)(c-\lambda)(\mu-a)(\mu-b)(c-\mu)(\nu-a)(\nu-b)(\nu-c)}}\,\partial\lambda\partial\mu\partial\nu$$

ergiebt*), wobei natürlich immer die Bedingung

$$a<\lambda<b<\mu<c<\nu$$

festzuhalten ist.

---

*) M. vergl. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes von O. Hesse. Leipzig 1861. S. 270. Nr. (57).

XXX.

Ueber bestimmte Integrale.

(Fortsetzung von Thl. XXXIX. Nr. XIX.)

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

III.

§. 31.

Der eben in §. 30. angegebene Zweck wird erreicht, wenn man die bisher befolgten Methoden mit einander verbindet.

Um das Integral $\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r \partial x}{1-x}$ darzustellen, hat man in der Gleichung Nr. 6) §. 2. x statt z zu schreiben, mit x^m zu multipliciren und r in m umzusetzen, wodurch

$$\frac{x^m}{1-x} = -(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots . x + 1) + \frac{1}{1-x}$$

entsteht. Verbindet man diese Gleichung mit $\int_0^1 (\lg x)^r \partial x$, so erhält man:

1)
$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r \partial x}{1-x} = -\int_0^1 (\lg x)^r (x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots . + 1) \partial x + \int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1-x}.$$

Wird jedes Glied auf der rechten Seite nach §. 19. Nr. 1) behandelt und der Werth für $\int_0^1 (\lg x)^r \partial x$ aus Nr. 14) §. 21. eingeführt, so bestimmt sich das fragliche Integral auf folgende Weise:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r \partial x}{1-x} = (-)^r . 1^{r|1} (1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \ldots)$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} . (1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \ldots \frac{1}{m^{r+1}})$$

$$= (-)^r . 1^{r|1} . S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} . 1^{r|1} . \Sigma_1^m \frac{1}{u^{r+1}}.$$

Hiemit stimmt die in Nr. 1) §. 22. gegebene allgemeinere Gleichung:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1} (\lg x)^r \partial x}{1-x^p}$$

$$= (-)^r . \frac{1^{r|1}}{p^{r+1}} S(1, 1)^{r+1} (-)^{r+1} . \frac{1^{r|1}}{p^{r+1}} (1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \ldots \frac{1}{m^{r+1}})$$

überein, aus der sich Nr. 2) ableitet, wenn $p = 1$ wird.

An diese Gleichungen schliesst sich eine Reihe von Ableitungen. Setzt man nämlich $r=1$, $m=0, 1, 2, \ldots$, so leiten sich aus Nr. 2) folgende Integrale ab:

4)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x} \partial x = -S(1, 1)^2 = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi^2}{6} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{49}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{205}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{5269}{3600},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^m \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi}{6} + \Sigma_1^m \frac{1}{u^2}.$$

Hierin ist:

$$S(1, 1)^2 = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668482264 \ldots$$

Verbindet man die Ausdrücke in Nr. 4) mit einander, so erhält man:

5)

$$\int_0^1 \frac{1-x^{m+1}}{(1-x)^2}\lg x\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{6} + \Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2}.$$

In dem begleitenden Ausdrucke $\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2}$ sind statt u allmälig die Werthe 1, 2, 3, ... m zu setzen, während m unverändert bleibt, so dass

$$\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2} = m + \frac{m-1}{2^2} + \frac{m-2}{3^2} + \dots \frac{2}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2}$$

bedeutet. Diess führt zu folgenden Integralen:

6)

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1-x)^2}\lg x\partial x = -\frac{\pi^2}{3} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^3}{(1-x)^2}\lg x\partial x = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{(1-x)^2}\lg x\partial x = -\frac{2\pi^2}{3} + \frac{65}{18},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^5}{(1-x)^2}\lg x\partial x = -\frac{5\pi^2}{6} + \frac{725}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^6}{(1-x)^2}\lg x\partial x = -\pi^2 + \frac{3899}{600},$$

u. s. w.

Verbindet man aber mit den Ausdrücken in Nr. 4) der Reihe nach die Werthe $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$, so ergibt sich aus ihrer Vereinigung folgendes Integral:

7)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_u x^u)\lg x}{1-x}\partial x = -(\Sigma_0^m a_u)\frac{\pi^2}{6} + \Sigma_1^m a_u(\Sigma_1^u \frac{1}{u^2}).$$

Bei Darstellung der einzelnen Fälle hat man in den Symbolen $\Sigma_0^m a_u x^u$ und $\Sigma_0^m a_u$ statt u allmälig die Werthe 0, 1, 2, ... m und in $\Sigma_1^m a_u(\Sigma_1^u \frac{1}{u^2})$ zuerst statt u die Werthe 1, 2, ... m und für jeden einzelnen Werth von u in $\Sigma_1^u \frac{1}{u^2}$ statt u allmälig die Werthe

1, 2, ... u zu schreiben und sofort die sich ergebenden Werthe zu vereinigen. Hiernach ist:

8)

$$\Sigma_1^m a_u (\Sigma_1^u \frac{1}{u^2})$$

$$= a_1 + a_2 (1 + \frac{1}{2^2}) + a_3 (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + ... + a_m (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{m^2})$$

$$= a_1 + a_2 + ... + a_m + (a_2 + a_3 + ... + a_m) \frac{1}{2^2} + (a_3 + a_4 + ... + a_m) \frac{1}{3^2}$$

$$+ .... + (a_{m-1} + a_m) \frac{1}{(m-1)^2} + a_m \frac{1}{m^2}.$$

Beide Darstellungen in Nr. 8) dienen zur gegenseitigen Controle für die richtige Werthberechnung. Setzt man nun statt der a die Vorzahlen der Potenzen des Binomiums $(1+x)$, so erhält man hieraus folgende Integrale:

9)

$$\int_0^1 \frac{(1+x)\lg x}{1-x} \partial x = -\frac{\pi^2}{3} + 1,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{2\pi^2}{3} + \frac{13}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^3 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{4\pi^2}{3} + \frac{73}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^4 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{8\pi^2}{3} + \frac{2645}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^5 \lg x}{1-x} \partial x = -\frac{16\pi^2}{3} + \frac{71447}{1800},$$

u. s. w.

Aus Nr. 3) ergeben sich, wenn $p = 2, 3, 4, ...$ gesetzt wird, folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1} \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{1}{4} S(1, 1)^2 + \frac{1}{4} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2} \lg x}{1-x^3} \partial x = -\frac{1}{9} S(1, 1)^2 + \frac{1}{9} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3} \lg x}{1-x^4} \partial x = -\frac{1}{16} S(1, 1)^2 + \frac{1}{16} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2},$$

u. s. w.

Setzt man nun $m=0, 1, 2, \ldots.$, so wird man auf die gleichen Zahlenwerthe wie in Nr. 4) geführt, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Factoren $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots.$ mit ihnen in Verbindung treten. Die Potenzen der x folgen aber einem anderen Gesetze, wie dort, und lassen Lücken, da sie, wie bemerkt, nach einem anderen Gesetze fortschreiten.

Wendet man auf Nr. 3) die in Nr. 5) befolgte Methode an, so erhält man:

11)

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{2m+2})\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{4.6} + \frac{1}{4}\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(1-x^{3m+3})\lg x}{(1-x^3)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{9.6} + \frac{1}{9}\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^{mp+p})\lg x}{(1-x^p)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi}{p^2.6} + \frac{1}{p^2}\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2}.$$

Eben so erhält man nach der in Nr. 7) angegebenen Methode folgende Integrale:

12)

$$\int_0^1 \frac{x(\Sigma_0^m a_{2u}x^{2u})\lg x}{1-x^2}\partial x = -(\Sigma_0^m a_{2u})\frac{\pi^2}{4.6} + \frac{1}{4}\Sigma_1^m a_{2u}(\Sigma_1^u \frac{1}{u^2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\Sigma_0^m a_{3u}x^{3u})\lg x}{1-x^3}\partial x = -(\Sigma_0^m a_{3u})\frac{\pi^2}{9.6} + \frac{1}{9}\Sigma_1^m a_{3u}(\Sigma_1^u \frac{1}{u^2}),$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\Sigma_0^m a_{pu}x^{pu})\lg x}{1-x^p}\partial x = -(\Sigma_0^m a_{pu})\frac{\pi^2}{p^2.6} + \frac{1}{p^2}\Sigma_1^m a_{pu}(\Sigma_1^u \frac{1}{u^2}).$$

Die Ableitung specieller Fälle aus Nr. 11) und 12) ist sehr einfach, da man die nämlichen Zahlenwerthe erhält, wie sie in Nr. 6) und Nr. 9) angegeben sind, und man nur die Coefficienten $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots.$ damit zu verbinden hat.

§. 32.

Setzt man $r=2$ und $m=0, 1, 2, 3, \ldots.$ in Nr. 2) §. 31., so erhält man folgende Integrale:

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{251}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{2035}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{256103}{108000},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-2\Sigma_1^m\frac{1}{u^3}.$$

Durch Vereinigung dieser Ausdrücke entsteht:

2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 2(m+1)S(1,1)^3-2\Sigma_1^m\frac{m-u+1}{u^3},$$

und hieraus:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 4S(1,1)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 6S(1,1)^3-\frac{17}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 8S(1,1)^3-\frac{355}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 10S(1,1)^3-\frac{7715}{864},$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_u x^u)(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2(\Sigma_0^m a_u)S(1,1)^3-2\Sigma_1^m a_u(\Sigma_1^u\frac{1}{u^3}),$$

woraus sich folgende Integrale nach der in §. 31. angegebenen Methode ableiten:

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 4S(1,1)^3-2,$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 8S(1,1)^3-\frac{25}{4},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 16S(1,1)^3-\frac{407}{27},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^4(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 32S(1,1)^3-\frac{28643}{864},$$

u. s. w.

Hierin ist $S(1,1)^3 = 1,2020569031595942\ldots$.

Wird $r=3$ und $m=0, 1, 2, \ldots$ in Nr. 2) §. 31. gesetzt, so gewinnt man folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -6S(1,1)^4 = -\frac{\pi^4}{15},$$
$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{51}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{1393}{216},$$
$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{22369}{3456},$$
$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{14001361}{2160000},$$

u. s. w.

Eben so ergibt sich durch Vereinigung der in Nr. 4) angegebenen Resultate:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{2\pi^4}{15}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{5}+\frac{99}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{4\pi^4}{15}+\frac{2033}{108},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{3}+\frac{87425}{3456},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^4}{15}+6.\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^4}.$$

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{251}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{2035}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-\frac{256103}{108000},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2S(1,1)^3-2\Sigma_1^m\frac{1}{u^3}.$$

Durch Vereinigung dieser Ausdrücke entsteht:

2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 2(m+1)S(1,1)^3-2\Sigma_1^m\frac{m-u+1}{u^3},$$

und hieraus:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 4S(1,1)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 6S(1,1)^3-\frac{17}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 8S(1,1)^3-\frac{355}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^2}{(1-x)^2}\partial x = 10S(1,1)^3-\frac{7715}{864},$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_u x^u)(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 2(\Sigma_0^m a_u)S(1,1)^3-2\Sigma_1^m a_u(\Sigma_1^u\frac{1}{u^3}),$$

woraus sich folgende Integrale nach der in §. 31. angegebenen Methode ableiten:

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 4S(1,1)^3-2,$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 8S(1,1)^3-\frac{25}{4},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 16S(1,1)^3-\frac{407}{27},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^4(\lg x)^2}{1-x}\partial x = 32S(1,1)^3-\frac{28643}{864},$$

u. s. w.

Hierin ist $S(1,1)^3 = 1{,}202\,056\,903\,159\,5942\ldots.$

Wird $r=3$ und $m=0, 1, 2, \ldots.$ in Nr. 2) §. 31. gesetzt, so gewinnt man folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -6S(1,1)^4 = -\frac{\pi^4}{15},$$
$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{51}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{1393}{216},$$
$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{22369}{3456},$$
$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{14001361}{2160000},$$

u. s. w.

Eben so ergibt sich durch Vereinigung der in Nr. 4) angegebenen Resultate:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{2\pi^4}{15}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{5}+\frac{99}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{4\pi^4}{15}+\frac{2033}{108},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^5)(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{3}+\frac{87425}{3456},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})(\lg x)^3}{(1-x)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^4}{15}+6.\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^4}.$$

Ferner:

6)

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{2\pi^4}{15}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{4\pi^4}{15}+\frac{147}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{8\pi^4}{15}+\frac{2359}{54},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x)^4(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -\frac{16\pi^4}{15}+\frac{326657}{3456},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_u x^u)(\lg x)^3}{1-x}\partial x = -(\Sigma_0^m a_u)\frac{\pi^4}{15}+6\Sigma_1^m a_u(\Sigma_1^u \frac{1}{u^4})$$

Hierin ist $S(1,1)^4 = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}0823232337111382\ldots$

Aus Nr. 3) §. 31. erhält man ferner:

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^2}{1-x^p}\partial x = \frac{2S(1,1)^3}{p^3}-\frac{2}{p^3}\Sigma_1^m\frac{1}{u^3},$$
$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^3}{1-x^p}\partial x = -\frac{6S(1,1)^4}{p^3}+\frac{6}{p^4}\Sigma_1^m\frac{1}{u^4},$$

. . . .

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^{mp+p})(\lg x)^2}{(1-x^p)^2}\partial x = \frac{2(m+1)S(1,1)^3}{p^3}-\frac{2}{p^3}\Sigma_1^m\frac{m-u+1}{u^3},$$
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x^{mp+p})(\lg x)^3}{(1-x^p)^2}\partial x = -\frac{6(m+1)S(1,1)^4}{p^4}+\frac{6}{p^4}\Sigma_1^m\frac{m-u+1}{u^4},$$

. . . .

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\Sigma_0^m a_{pu}x^{pu})(\lg x)^2}{1-x^p}\partial x = \frac{2}{p^3}(\Sigma_0^m a_{pu})\,S(1,1)^3$$
$$-\frac{2}{p^3}\Sigma_1^m a_{pu}(\Sigma_1^u\frac{1}{u^3}),$$
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\Sigma_0^m a_{pu}x^{pu})(\lg x)^3}{1-x^p}\partial x = -\frac{6}{p^4}(\Sigma_0^m a_{pu})\,S(1,1)^4$$
$$+\frac{6}{p^3}\Sigma_1^m a_{pu}(\Sigma_1^u\frac{1}{u^4}),$$

u. s. w.

Die Zahlenausdrücke, worauf die in Nr. 7)—9) angegebenen Integrale führen, sind dieselben, wie sie in Nr. 1)—6) angeführt sind. Hiezu treten dann noch die vorgeschriebenen Coefficienten.

§. 33.

Setzt man x statt z in Nr. 2) und Nr. 3) §. 2. und verbindet die hieraus entstehenden Resultate mit $\int_0^1 x^{2m}(\lg x)^r \partial x$ und $\int_0^1 x^{2m+1}(\lg x)^r \partial x$, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^r \partial x}{1+x} = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{2m-1} - x^{2m-2} \ldots - 1)\partial x + \int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1+x},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^r \partial x}{1+x}$$

$$= \int_0^1 (\lg x)^r (x^{2m} - x^{2m-1} \ldots - x + 1)\partial x - \int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1+x}.$$

Werden nun die einzelnen Glieder nach Nr. 1) §. 19. integrirt und werden die Werthe für die begleitenden Integrale aus Nr. 15) §. 21. eingeführt, so ergeben sich hieraus folgende Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^r \partial x}{1+x} = (-)^r . 1^{r|1} . S'(1, 1)^{r+1}$$
$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} . (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \ldots - \frac{1}{(2m)^{r+1}}),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^r \partial x}{1+x} = (-)^{r+1} . 1^{r|1} . S'(1, 1)^{r+1}$$
$$(-)^r . 1^{r|1} . (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}).$$

Hiemit stimmt die in §. 22. Nr. 2) gegebene Gleichung überein, wornach ist:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^r \partial x}{1+x^p} = (-)^{m+r} . \frac{1^{r|1}}{p^{r+1}} . S'(1, 1)^{r+1}$$
$$(-)^{m+r+1} . \frac{1^{r|1}}{p^{r+1}} . (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} \ldots (-)^{m-1} \frac{1}{m^{r+1}})$$

Hieraus entnehmen sich für $r=1$ und $m=0, 1, 2, \ldots.$ folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x}\partial x \quad = -S'(1,1)^2 = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{1+x}\partial x \quad = \frac{\pi^2}{12}-1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{1+x}\partial x \quad = -\frac{\pi^2}{12}+\frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x}{1+x}\partial x \quad = +\frac{\pi^2}{12}-\frac{31}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x}{1+x}\partial x \quad = -\frac{\pi^2}{12}+\frac{115}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x}{1+x}\partial x \quad = +\frac{\pi^2}{12}-\frac{3019}{3600},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x}{1+x}\partial x \quad = -\frac{\pi^2}{12}+\frac{973}{1200},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}\lg x}{1+x}\partial x \quad = -\frac{\pi^2}{12}+\Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\lg x}{1+x}\partial x = \frac{\pi^2}{12}-\Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u^2}.$$

Werden die in Nr. 5) erhaltenen Ausdrücke, um Harmonie in die Zeichen zu bringen, der Reihe nach mit abwechselnden Zeichen verbunden, so entsteht:

6)

$$\int_0^1 \frac{(1(-)^m x^{m+1})\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{12}+\Sigma_1^m(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^2},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

7)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{6}+1,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^3)\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{4}+\frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{3}+\frac{47}{18},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^5)\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{5\pi^2}{12}+\frac{491}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^6)\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{2}+\frac{2549}{600},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^7)\lg x}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{7\pi^2}{12}+\frac{24259}{4800},$$

u. s. w.

Werden aber diese Ausdrücke der Reihe nach mit a_0, $-a_1$, a_2, $-a_3$,.... verbunden und vereinigt, so erhält man:

8)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0{}^m(-)^u a_u x^u)\lg x}{1+x}\partial x = -(\Sigma_0{}^m a_u)\frac{\pi^2}{12}+\Sigma_1{}^m a_u(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u^2}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab, wenn man die Vorzahlen der Potenzen des Binomiums $(1-x)$ benutzt:

9)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)\lg x}{1+x}\partial x = -\frac{\pi^2}{6}+1,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2\lg x}{1+x}\partial x = -\frac{\pi^2}{3}+\frac{11}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^3\lg x}{1+x}\partial x = -\frac{2\pi^2}{3}+\frac{55}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^4\lg x}{1+x}\partial x = -\frac{4\pi^2}{3}+\frac{1835}{144},$$

u. s. w.

Aus Nr. 4) erhält man folgende Formen:

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\lg x}{1+x^2}\partial x = (-)^{m+1}\tfrac{1}{4}S'(1,1)^2(-)^{m+2}\tfrac{1}{4}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}\lg x}{1+x^3}\partial x = (-)^{m+1}\tfrac{1}{9}S'(1,1)^2(-)^{m+2}\tfrac{1}{9}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^2},$$

u. s. w.

11)

$$\int_0^1 \frac{x(1(-)^m x^{2m+2})\lg x}{(1+x^2)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{4.12} + \tfrac{1}{4}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(1(-)^m x^{3m+3})\lg x}{(1+x^3)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{9.12} + \tfrac{1}{9}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^2},$$

u. s. w.

12)

$$\int_0^1 \frac{x(\Sigma_0{}^m(-)^u a_{2u} x^{2u})\lg x}{1+x^2}\partial x = -\frac{(\Sigma_0{}^m a_{2u})\pi^2}{4.12}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\Sigma_1{}^m a_{2u}(\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\Sigma_0{}^m(-)^u a_{3u} x^{3u})\lg x}{1+x^3}\partial x = -\frac{(\Sigma_0{}^m a_{3u})\pi^3}{9.12}$$
$$+ \tfrac{1}{9}\Sigma_1{}^m a_{3u}(\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^2}),$$

u. s. w.

Die Zahlenwerthe bleiben mit Ausnahme der vorgeschriebenen Coefficienten die gleichen, wie sie oben angegeben wurden.

§. 34.

Setzt man $r = 2$ in Nr. 2) und Nr. 3) §. 33., so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 2S'(1,1)^3 - 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \ldots - \frac{1}{(2m)^3}),$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^2}{1+x}\partial x = -2S'(1,1)^3 + 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^3}).$$

Aus Nr. 4) §. 33. entsteht:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^2}{1+x^p}\partial x = (-)^m\frac{2}{p^3}S'(1,1)^3(-)^{m+1}\frac{2}{p^3}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^3}.$$

Aus Nr. 1) und Nr. 2) leiten sich folgende Integrale ab:

4)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 2S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1+x}\partial x = -2S'(1,1)^3+2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 2S'(1,1)^3-\frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1+x}\partial x = -2S'(1,1)^3+\frac{197}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 2S'(1,1)^3-\frac{1549}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1+x}\partial x = -2S'(1,1)^3-\frac{195353}{108000},$$

u. s. w.

Durch Verbindung dieser Ausdrücke unter sich mit abwechselnden Zeichen folgert sich das Integral:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1(-)^m x^{m+1})(\lg x)^2}{(1+x)^2}\partial x = 2(m+1)S'(1,1)^3-2\Sigma_1^{m}(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^3},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

6)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^2}{(1+x)^2}\partial x = 4S'(1,1)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^3)(\lg x)^2}{(1+x)^2}\partial x = 6S'(1,1)^3-\frac{15}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1+x)^2}\partial x = 8S'(1,1)^3-\frac{301}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^5)(\lg x)^2}{(1+x)^2}\partial x = 10S'(1,1)^3-\frac{6365}{864},$$

u. s. w.

Eben so erhält man:

7)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0{}^m(-)^u a_u x^u)(\lg x)^2}{1+x}\partial x$$

$$=2(\Sigma_0{}^m a_u)\, S'(1,1)^3 - 2\Sigma_1{}^m a_u(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u^3}).$$

Hieraus leiten sich mit Benutzung der Binomial-Coefficienten folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 4S'(1,1)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 8S'(1,1)^3-\frac{23}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^3(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 16S'(1,1)^3-\frac{353}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^4(\lg x)^2}{1+x}\partial x = 32S'(1,1)^3-\frac{23837}{864},$$

u. s. w.

Aus Nr. 4) erhält man durch Befolgung derselben Methode:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^2}{1+x^p}\partial x = (-)^m.\frac{2}{p^3}S'(1,1)^3(-)^{m+1}\frac{2}{p^3}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^3},$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1(-)^m x^{mp+p})(\lg x)^2}{(1+x^p)^2}\partial x$$

$$=\frac{2(m+1)\,S'(1,1)^3}{p^3}-\frac{2}{p^3}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^3},$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\Sigma_0{}^m(-)^u a_{pu}x^{pu})(\lg x)^2}{1+x^p}\partial x$$

$$=\frac{2}{p^3}(\Sigma_0{}^m a_{pu})\,S'(1,1)^3-\frac{2}{p^3}\Sigma_1{}^m a_{pu}(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u^3}).$$

Hierin ist $S'(1,1)^3 = 0{,}901542677369695 7\ldots.$

§. 35.

Setzt man $r=3$ in No. 2), 3) und 4) §. 33., so erhält man folgende Formen:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -6S'(1,1)^4 + 6\left(1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots-\frac{1}{(2m)^4}\right),$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^3}{1+x}\partial x = +6S'(1,1)^4 - 6\left(1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^4}\right),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{mp+p-1}(\lg x)^3}{1+x^p}\partial x = (-)^{m+1}\frac{6}{p^4}S'(1,1)^4(-)^m\frac{6}{p^4}\Sigma_1^m(-)^{u-1}\frac{1}{u^4}.$$

Aus Nr. 1) und Nr. 2) ergeben sich folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -6S'(1,1)^4 = -\frac{7\pi^4}{120},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3}{1+x}\partial x = \frac{7\pi^4}{120}-6,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -\frac{7\pi^4}{120}+\frac{45}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3}{1+x}\partial x = \frac{7\pi^4}{120}-\frac{1231}{216},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -\frac{7\pi^4}{120}+\frac{19615}{3456},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3}{1+x}\partial x = \frac{7\pi^4}{120}-\frac{12280111}{2160000},$$

u. s. w.

Durch Vereinigung dieser Ausdrücke mit abwechselnden Zeichen erhält man:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1(-)^m x^{m+1})(\lg x)^3}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{(m+1).7\pi^4}{120}+6.\Sigma_1^m(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^4},$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

6)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)(\lg x)^3}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{7\pi^4}{60}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x^3)(\lg x)^3}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{7\pi^4}{40}+\frac{93}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{7\pi^4}{30}+\frac{1871}{108},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x^5)(\lg x)^3}{(1+x)^2}\partial x = -\frac{7\pi^4}{24}+\frac{79487}{3456},$$

u. s. w.

Ferner erhält man:

7)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0{}^m(-)^u a_u x^u)(\lg x)^3}{1+x}\partial x$$
$$= -(\Sigma_0{}^m a_u)\frac{7\pi^4}{120}+6\Sigma_1{}^m a_u(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u^4}).$$

Dies führt zu folgenden Integralen:

8)

$$\int_0^1 \frac{(1-x)(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -\frac{7\pi^4}{60}+6,$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -\frac{7\pi^4}{30}+\frac{141}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x)^3(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -\frac{7\pi^4}{15}+\frac{2191}{54},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{1+x}\partial x = -\frac{14\pi^4}{15}+\frac{297983}{3456},$$

u. s. w.

Ferner erhält man auf dieselbe Weise folgende Integralformen aus Nr. 3):

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1(-)^m x^{mp+p})(\lg x)^3}{(1+x^p)^2}\partial x$$
$$= -\frac{(m+1).7\pi^4}{p^4.120}+\frac{6}{p^4}\Sigma_1{}^m(-)^{u-1}\frac{m-u+1}{u^4},$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\Sigma_0{}^m(-)^u a_{pu}x^{pu})(\lg x)^3}{1+x^p}\partial x$$
$$= -\frac{(\Sigma_0{}^m a_u).7\pi^4}{p^4.120}+\frac{6}{p^4}\Sigma_1{}^m a_{pu}(\Sigma_1{}^u(-)^{u-1}\frac{1}{u^4}).$$

Hieraus kann man leicht eine Menge specieller Fälle ableiten, da die Zahlenwerthe hierzu in Nr. 4), 6) und 8) angegeben sind. Hierin ist:

$$S'(1,\,1)^4 = \frac{7\pi^4}{720} = 0{,}947\,032\,829\,497\,2460\,\ldots.$$

§. 36.

Setzt man x^2 statt z in Nr. 6) §. 2. und verbindet die hiedurch entstehende Darstellung mit

$$\int_0^1 x^{2m}(\lg x)^r \partial x \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{2m+1}(\lg x)^r \partial x,$$

so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^r}{1-x^2}\partial x = -\int_0^1 (\lg x)^r (x^{2m-2}+x^{2m-4}+\ldots.\,x^2+1)\partial x$$
$$+\int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1-x^2},$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^r}{1-x^2}\partial x = -\int_0^1 (\lg x)^r (x^{2m-1}+x^{2m-3}+\ldots.\,x^3+x)\partial x$$
$$+\int_0^1 \frac{x(\lg x)^r \partial x}{1-x^2}.$$

Nun ist aus Nr. 8) §. 21., wenn $p=2$, $q=2$ gesetzt wird:

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^r \partial x}{1-x^2} = (-)^r.\,1^{r|1}\,S(2,\,2)^{r+1} = (-)^r \cdot \frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}\,S(1,\,1)^{r+1}.$$

Wird dieser Werth und der aus Nr. 14) §. 21 angegebene für $\int_0^1 \frac{(\lg x)^r \partial x}{1-x^2}$ eingeführt, so erhält man aus Nr. 1) und 2):

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^r \partial x}{1-x^2}$$

$$=(-)^r.\,1^{r|1}\,S(1,\,2)^{r+1}(-)^{r+1}.\,1^{r|1}\left(1+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\ldots\,\frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^r}{1-x^2}\partial x$$

$$=(-)^r\cdot\frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}S(1,\,1)^{r+1}(-)^{r+1}\cdot\frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\ldots\frac{1}{m^{r+1}}).$$

Bei dem Uebergange auf besondere Fälle ist es am Besten, beide Formen getrennt zu behandeln. Aus Nr. 3) ergeben sich folgende Integrale für $r=1$ und $m=0,\,1,\,2\ldots.$:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x^2}\partial x=-S(1,\,2)^2=-\frac{\pi^2}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{1-x^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{8}+1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x}{1-x^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{8}+\frac{10}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x}{1-x^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{8}+\frac{259}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8\lg x}{1-x^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{8}+\frac{12916}{11025},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}\lg x}{1-x^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{8}+\frac{117469}{99225},$$

u. s. w.

Durch Vereinigung erhält man:

6)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{4}+1,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^6)\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x=-\frac{3\pi^2}{8}+\frac{19}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^8)\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{734}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{10})\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x=-\frac{5\pi^2}{8}+\frac{16294}{3675},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{2m+2})\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x=-\frac{(m+1)\pi^2}{8}+\Sigma_1^m\frac{m-u+1}{(2u-1)^2}.$$

Eben so entsteht:

7)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_{2u} x^{2u}) \lg x}{1-x^2} \partial x = -(\Sigma_0^m a_{2u}) \frac{\pi^2}{8} + \Sigma_1^m a_{2u} (\Sigma_1^u \frac{1}{(2u-1)^2}),$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

8)

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)\lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^2 \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{28}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^3 \lg x}{1-x^2} \partial x = -\pi^2 + \frac{1684}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^4 \lg x}{1-x^2} \partial x = -2\pi^2 + \frac{36256}{2205},$$

u. s. w.

Hierin ist $\frac{\pi^2}{8} = S(1, 2)^2 = 1{,}2337005501361698....$

Aus Nr. 4) leiten sich unter den nämlichen Voraussetzungen folgende Integrale ab:

9)

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1-x^2} \partial x = -\tfrac{1}{4} S(1, 1)^2 = -\frac{\pi^2}{24},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{5}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{49}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{205}{576},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{11} \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{5269}{14400},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1} \lg x}{1-x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{24} + \tfrac{1}{4} \Sigma_1^m \frac{1}{u^2}.$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^4)\lg x}{(1-x^2)^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^6)\lg x}{(1-x^2)^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{9}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^8)\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{6}+\frac{65}{72},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{10})\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{5\pi^2}{24}+\frac{725}{576},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{12})\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{4}+\frac{3899}{2400},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{2m+2})\lg x}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{24}+\tfrac{1}{4}\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^2}.$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)\lg x}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^2\lg x}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{6}+\frac{13}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^3\lg x}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{3}+\frac{73}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^4\lg x}{1-x^2}\partial x = -\frac{2\pi^2}{3}+\frac{2645}{576},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^5\lg x}{1-x^2}\partial x = -\frac{4\pi^2}{3}+\frac{71447}{7200},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0{}^m a_{2u+1} x^{2u+1})\lg x}{1-x^2}\partial x = -(\Sigma_0{}^m a_{2u+1})\frac{\pi^2}{24}+\tfrac{1}{4}\Sigma_1{}^m a_{2u+1}(\Sigma_1{}^u \frac{1}{u^2}).$$

Auch hier lassen sich, wie in §. 31.—35. geschah, aus der Gleichung Nr. 5) §. 22. noch andere Integrale ableiten. Ihre Darstellung unterliegt aber nach dem früheren Vorgange keiner weiteren Schwierigkeit. Deswegen werden sie hier und auch künftig nicht weiter berücksichtigt.

§. 37.

Setzt man $r=2$ und $m=0, 1, 2, \ldots$ in Nr. 3) §. 36., so ergeben sich folgende Integrale:

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,2)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,2)^3-2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,2)^3 - \frac{56}{27},$$
$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,2)^3 - \frac{7054}{3375},$$
$$\int_0^1 \frac{x^8(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,2)^3 - \frac{2426272}{1157625},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,2)^3 - 2\Sigma_1^m \frac{1}{(2u-1)^3}.$$

Hieran schliessen sich durch Summirung folgende Integrale:

2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = 4S(1,2)^3 - 2,$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^6)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = 6S(1,2)^3 - \frac{110}{27},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^8)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = 8S(1,2)^3 - \frac{20804}{3375},$$
$$\int_0^1 \frac{(1-x^{10})(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = 10S(1,2)^3 - \frac{3187348}{385875},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{2m+2})(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = 2(m+1)\,S(1,x)^3 - 2\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{(2u-1)^3}.$$

Ferner ist:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_{2u}x^{2u})(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2(\Sigma_0^m a_{2u})\,S(1,2)^3 - 2\Sigma_1^m a_{2u}(\Sigma_1^u \frac{1}{(2u-1)^3}),$$

woraus sich mit Hülfe der Binomial-Coefficienten folgende Integrale ableiten:

4)

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 4S(1,2)^3 - 2,$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^2(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 8S(1,2)^3 - \frac{164}{27},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^3(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 16S(1,2)^3 - \frac{48304}{3375},$$
$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^4(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 32S(1,2)^3 - \frac{7154272}{231525},$$

u. s. w.

Hierin ist $S(1, 2)^3 = 1{,}051\,799\,790\,264\,6451\ldots.$

Aus Nr. 4) §. 36. erhält man bei Annahme der nämlichen Werthe für r und m die nachstehenden Integrale:

5)

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S(1,1)^3 - \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S(1,1)^3 - \frac{9}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S(1,1)^3 - \frac{251}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S(1,1)^3 - \frac{2035}{6912},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S(1,1)^3 - \tfrac{1}{4}\Sigma_1^m \frac{1}{u^3}.$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^4)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = \tfrac{1}{2}S(1,1)^3 - \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^6)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = \tfrac{3}{4}S(1,1)^3 - \frac{17}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^8)(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = S(1,1)^3 - \frac{355}{432},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{10})(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = \tfrac{5}{4}S(1,1)^3 - \frac{7715}{6912},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{2m+2})(\lg x)^2}{(1-x^2)^2}\partial x = \tfrac{1}{4}(m+1)\,S(1,1)^3 - \tfrac{1}{4}\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^3}.$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}S(1,1)^3 - \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^2(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = S(1,1)^3 - \frac{25}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^3(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 2S(1,1)^3 - \frac{407}{216},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^4 (\lg x)^2}{1-x^2}\partial x = 4S(1,1)^3 - \frac{28643}{6912},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_{2u+1} x^{2u+1})(\lg x)^2}{1-x^2}\partial x$$

$$= 2(\Sigma_0^m a_{2u+1})\, S(1,1)^3 - \tfrac{1}{4}\Sigma_1^m a_{2u+1}(\Sigma_1^u \frac{1}{u^3}).$$

Hierin ist $S(1,1)^3 = 1{,}202056903159594\,2 \ldots.$

§. 38.

Wird endlich $r=3$ und $m=0, 1, 2, \ldots$ in Nr. 3) §. 36. gesetzt, so erhält man folgende Integrale:

1)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -6S(1,2)^4 = -\frac{\pi^4}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{16} + 6,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{16} + \frac{164}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{16} + \frac{102662}{16875},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{16} + \frac{246592712}{40516875},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{16} + 6\Sigma_1^m \frac{1}{(2u-1)^4}.$$

Hieraus leiten sich durch Summirung folgende Integrale ab:

2)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{8} + 6,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^6)(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{3\pi^4}{16} + \frac{326}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^8)(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{4} + \frac{306412}{16875},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{2m+2})(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^4}{16} + 6\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{(2u-1)^3}.$$

Eben so erhält man:

3)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_{2u} x^{2u})(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -(\Sigma_0^m a_{2u})\frac{\pi^4}{16} + 6\Sigma_1^m a_{2u}(\Sigma_1^u \frac{1}{(2u-1)^4}),$$

woraus sich folgende Integrale ergeben:

4)

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{8} + 6,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^2(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{4} + \frac{488}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)^3(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{2} + \frac{713912}{17875},$$

u. s. w.

Hierin ist $S(1, 2)^4 = \frac{\pi^4}{96} = 1{,}014678031604l921\ldots.$

Aus Nr. 4) §. 36. folgt unter denselben Voraussetzungen:

5)

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\tfrac{3}{8}S(1, 1)^4 = -\frac{\pi^4}{240},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{240} + \frac{3}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{240} + \frac{51}{128},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{240} + \frac{1393}{3456},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{240} + \frac{22369}{55296},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{240} + \tfrac{3}{8}\Sigma_1^m \frac{1}{u^4}.$$

Ferner erhält man:

6)

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^4)(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{120} + \frac{3}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^6)(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{80} + \frac{99}{128},$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^8)(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{60}+\frac{2033}{1728},$$
$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{10})(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{48}+\frac{87425}{55296},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{2m+2})(\lg x)^3}{(1-x^2)^2}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^4}{240}+\tfrac{3}{8}\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{u^4}.$$

Eben so erhält man:

7)

$$\int_0^1 (\Sigma_0^m a_{2u+1}x^{2u+1})(\lg x)^3\partial x = -\frac{(\Sigma_0^m a_{2u+1})\pi^4}{240}+\tfrac{3}{8}\Sigma_1^m a_{2u+1}(\Sigma_1^m \frac{1}{u^4}),$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

8)

$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{120}+\frac{3}{8},$$
$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^2(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{60}+\frac{147}{128},$$
$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^3(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{30}+\frac{2353}{864},$$
$$\int_0^1 \frac{x(1+x^2)^4(\lg x)^3}{1-x^2}\partial x = -\frac{\pi^4}{15}+\frac{326657}{55296},$$

u. s. w.

§. 39.

Setzt man $z=x^2$ in Nr. 2) und Nr. 3) §. 2., verbindet die hierdurch entstehenden Resultate mit

$$\int_0^1 x^{4m}(\lg x)^r\partial x \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{4m+1}(\lg x)^r\partial x$$

und dann mit

$$\int_0^1 x^{4m+2}(\lg x)^r\partial x \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{4m+3}(\lg x)^r\partial x,$$

so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r(x^{4m-2}-x^{4m-4}\ldots x^2-1)\partial x+\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=\int_0^1 (\lg x)^r(x^{4m-1}-x^{4m-3}\ldots.-x^3-x)\partial x+\int_0^1 \frac{x(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x,$$
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=\int_0^1 (\lg x)^r(x^{4m}-x^{4m-2}\ldots.-x^2+1)\partial x-\int_0^1 \frac{(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x,$$
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=\int_0^1 (\lg x)^r(x^{4m+1}-x^{4m-1}\ldots.-x^3+x)\partial x-\int_0^1 \frac{x(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x.$$

Werden nun die einzelnen Glieder nach Nr. 1) §. 19. behandelt und wird der Werth des einen begleitenden Integrals aus Nr. 15) §. 21. eingeführt, so erhält man, da nach Nr. 9) §. 21.

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^r}{1+x^2}=(-)^r.1^{r|1}.S'(2,2)^{r+1}=(-)^r.\frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}$$

ist, folgende vier Integralformen zur Bestimmung der hierher gehörigen Integrale:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=(-)^r.1^{r|1}.S'(1,2)^{r+1}.(-)^{r+1}.1^{r|1}(1-\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}-\ldots.-\frac{1}{(4m-1)^{r+1}}),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=(-)^r.\frac{1^{r|1}}{2^{r|1}}.S'(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}.\frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\ldots-\frac{1}{(2m)^{r+1}}),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=(-)^{r+1}.1^{r|1}.S'(1,2)^{r+1}(-)^r.1^{r|1}.(1-\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}-\ldots+\frac{1}{(4m+1)^{r+1}}),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^r}{1+x^2}\partial x$$
$$=(-)^{r+1}.\frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}.S'(1,1)^{r+1}.(-)^r\frac{1^{r|1}}{2^{r+1}}(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale für $r=1$ und $m=0, 1, 2, ...$:

6)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x^2}\partial x = -S'(1,2)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{1+x^2}\partial x = -\frac{1}{4}S'(1,1)^2 = -\frac{\pi^2}{4.12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{1+x^2}\partial x = S'(1,2)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi^2}{4.12} - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x}{1+x^2}\partial x = -S'(1,2)^2 + \frac{8}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x}{1+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{4.12} + \frac{3}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x}{1+x^2}\partial x = S'(1,2)^2 - \frac{209}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7\lg x}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi^2}{4.12} - \frac{31}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8\lg x}{1+x^2}\partial x = -S'(1,2)^2 + \frac{10016}{11025},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9\lg x}{1+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{4.12} + \frac{115}{576},$$

u. s. w.

Setzt man $r=2$ und $m=0, 1, 2, 3, ...$, so erhält man folgende Integrale:

7)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = 2S'(1,2)^3 = \frac{\pi^3}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = -\frac{\pi^3}{16} + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = -\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3 + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi^3}{16}-\frac{52}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S'(1,1)^3-\frac{7}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = -\frac{\pi^3}{16}+\frac{6554}{3375},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = -\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3+\frac{197}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi^3}{16}-\frac{2241272}{1157625},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x = \tfrac{1}{4}S'(1,1)^3-\frac{1549}{6912},$$

u. s. w.

Hierin ist $S'(1,1)^2=\frac{\pi^2}{12}=0{,}822\,467\,033\,424\,1132\ldots$ und $S'(1,1)^3=0{,}901\,542\,677\,369\,6957\ldots$ Die übrigen hierher gehörigen Werthe $S'(1,2)^2$ und $S'(1,2)^3$ sind oben in §. 27. angegeben.

Hieraus lassen sich, wie früher, durch Vereinigung der gleichartigen Gebilde noch weitere Integrale

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)^p \lg x}{1+x^2}\partial x,\quad \int_0^1 \frac{x(1-x^2)^p(\lg x)^2}{1+x^2}\partial x;\ \text{u. s. w.}$$

ableiten. Da die Methode der Entwickelung im Früheren wiederholt gezeigt ist, so unterliegt ihre Ausführung keiner weitern Schwierigkeit, und wir stellen die hieraus sich ergebenden Resultate nicht insbesondere auf.

§. 40.

Setzt man $z=x^3$ in Nr. 6) §. 2. und verbindet man das dadurch entstehende Resultat mit $\int_0^1 x^{3m+p}(\lg x)^r\,\partial x$, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+p}(\lg x)^r}{1-x^3}\partial x$$

$$=-\int_0^1 (\lg x)^r_z(x^{3m+p-3}+x^{3m+p-6}\ldots x^p)\,\partial x+\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x^3}\partial x.$$

Hier kann $p=0,\ 1,\ 2$ sein. Werden die einzelnen Glieder auf der rechten Seite nach Nr. 1) §. 19. und $\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1-x^3}\partial x$ nach Nr. 8) §. 21. bestimmt und die hieraus folgenden Werthe eingeführt, so erhält man folgende drei Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}(\lg x)^r}{1-x^3}\partial x$$

$$=(-)^r.1^{r|1}S(1,3)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}(1+\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}\cdots\frac{1}{(3m-2)^{r+1}}),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}(\lg x)^r}{1-x^3}\partial x$$

$$=(-)^r.1^{r|1}S(2,3)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\cdots\frac{1}{(3m-1)^{r+1}}),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}(\lg x)^r}{1-x^3}\partial x$$

$$=(-)^r.\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\cdots\frac{1}{m^{r+1}}).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale für $r=1$ und $m=0,\ 1,\ 2,\ldots$ ab:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x^3}\partial x=-S(1,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{1-x^3}\partial x=-S(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{1-x^3}\partial x=-\frac{1}{9}S(1,1)^2=-\frac{\pi^2}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x}{1-x^3}\partial x=-S(1,3)^2+1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x}{1-x^3}\partial x=-S(2,3)^2+\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1-x^3}\partial x = -\frac{\pi^2}{54} + \frac{1}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1-x^3}\partial x = -S(1,3)^2 + \frac{17}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1-x^3}\partial x = -S(2,3)^2 + \frac{29}{100},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x}{1-x^3}\partial x = -\frac{\pi^2}{54} + \frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x}{1-x^3}\partial x = -S(1,3)^2 + \frac{849}{784},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10} \lg x}{1-x^3}\partial x = -S(2,3)^2 + \frac{489}{1600},$$

u. s. w.

Für $r=2$ und $m=0, 1, 2, 3 \ldots$ ergeben sich folgende Integrale:

6)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(1,3)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(2,3)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = \frac{2}{27}S(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(1,3)^3 - 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(2,3)^3 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = \frac{2}{27}S(1,1)^3 - \frac{2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(1,3)^3 - \frac{65}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(2,3)^3 - \frac{133}{500},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = \frac{2}{27}S(1,1)^3 - \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(1,3)^3 - \frac{22359}{10976},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}(\lg x)^2}{1-x^3}\partial x = 2S(2,3)^3 - \frac{8637}{32000},$$

u. s. w.

Die Werthe für $S(1,3)^2$, $S(2,3)^2$, u. s. w. sind in §. 27. angegeben.

§. 41.

Wird $z = x^3$ in Nr. 2) und Nr. 3) §. 2. gesetzt, so entstehen zwei Formen. Wird die erste mit $\int_0^1 x^{6m+p}(\lg x)^r \partial x$, die zweite mit $\int_0^1 x^{6m+3+p}(\lg x)^r \partial x$ verbunden, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-3} - x^{6m+p-6} - \ldots - x^p)\partial x$$
$$+ \int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x,$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3+p}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p} - x^{6m+p-3} - \ldots + x^p)\partial x$$
$$- \int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x.$$

Hier kann $p = 0, 1, 2$ sein. Werden die Glieder auf der rechten Seite nach Nr. 1) §. 19. und wird das Integral $\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$ nach Nr. 9) §. 21. bestimmt und die sich ergebenden Werthe eingeführt, so erhält man folgende sechs Integralformen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$$

$$= (-)^r 1^{r|1} S'(1,3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} \left(1 - \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} \ldots - \frac{1}{(6m-2)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$$

$$=(-)^r 1^{r|1} S'(2,3)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{8^{r+1}}\cdots-\frac{1}{(6m-1)^{r+1}}\right),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$$

$$=(-)^r\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}\cdots-\frac{1}{(2m)^{r+1}}),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$$

$$=(-)^{r+1}1^{r|1}S'(1,3)^{r+1}(-)^r 1^{r|1}(1-\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}\cdots+\frac{1}{(6m+1)^{r+1}}),$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$$

$$=(-)^{r+1}1^{r|1}S'(2,3)^{r+1}(-)^r 1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{8^{r+1}}\cdots+\frac{1}{(6m+2)^{r+1}}\right),$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}(\lg x)^r}{1+x^3}\partial x$$

$$=(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}(-)^r\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\cdots+\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale, wenn $r=1$, $m=0$, $1, 2, 3\ldots.$ gesetzt wird:

9)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x^3}\partial x=-S'(1,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{1+x^3}\partial x=-S'(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{1+x^3}\partial x=-\frac{1}{9}S'(1,1)^2=-\frac{\pi^2}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1+x^3}\partial x = \quad S'(1,3)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1+x^3}\partial x = \quad S'(2,3)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1+x^3}\partial x = \quad \frac{\pi^2}{108} - \frac{1}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1+x^3}\partial x = - S'(1,3)^2 + \frac{15}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1+x^3}\partial x = - S'(2,3)^2 + \frac{21}{100},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x}{1+x^3}\partial x = - \frac{\pi^2}{108} + \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x}{1+x^3}\partial x = \quad S'(1,3)^2 - \frac{751}{784},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10} \lg x}{1+x^3}\partial x = \quad S'(2,3)^2 - \frac{361}{1600},$$

u. s. w.

Wird $r=2$, $m=0,1,2,\ldots.$ gesetzt, so erhält man folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = \quad 2S'(1,3)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = \quad 2S'(2,3)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = \quad \frac{2}{27}S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = -2S'(1,3)^3 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = -2S'(2,3)^3 + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = -\frac{2}{27}S'(1,1)^3 + \frac{2}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = \quad 2S'(1,3)^3 - \frac{63}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = \quad 2S'(2,3)^3 - \frac{117}{500},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = \quad \frac{2}{27}S'(1,1)^3 - \frac{7}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^9(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = -2S'(1,3)^3 + \frac{21673}{10976},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}(\lg x)^2}{1+x^3}\partial x = -2S'(2,3)^3 + \frac{7613}{32000},$$

u. s. w.

Die Werthe für $S'(1,3)^2$, $S'(2,3)^2$,.... sind in §. 27. angegeben.

Man kann diese Entwickelungsweise weiter fortführen und hiezu die Gleichungen des §. 2. und des §. 21. benutzen. Man erhält für $\int_0^1 \frac{x^{4m+p}(\lg x)^r}{1\mp x^4}\partial x$ folgende Integralformen:

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^r}{1-x^4}\partial x$$

$$=(-)^r 1^{r|1} S(1,4)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}(1+\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{9^{r+1}}+\dots\frac{1}{(4m-3)^{r+1}}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^r}{1-x^4}\partial x$$

$$=(-)^r 1^{r|1} S(2,4)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{6^{r+1}}+\dots\frac{1}{(4m-2)^{r+1}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^r}{1-x^4}\partial x$$

$$=(-)^r 1^{r|1} S(3,4)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}\left(\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}+\dots\frac{1}{(4m-1)^{r+1}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^r}{1-x^4}\partial x$$

$$=(-)^r \frac{1^{r|1}}{4^{r+1}} S(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\dots\frac{1}{m^{r+1}}).$$

12)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^r}{1+x^4}\partial x = (-)^{m+r}1^{r|1}S'(1,4)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1}1^{r|1}\left(1-\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{9^{r+1}}-\ldots.(-)^{m-1}\frac{1}{(4m-3)^{r+1}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^r}{1+x^4}\partial x = (-)^{m+r}1^{r|1}S'(2,4)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1}1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{1}{6^{r+1}}+\ldots.(-)^{m-1}\frac{1}{(4m-2)^{r+1}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^r}{1+x^4}\partial x = (-)^{m+r}1^{r|1}S'(3,4)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1}1^{r|1}\left(\frac{1}{3^{r+1}}-\frac{1}{7^{r+1}}+\ldots.(-)^{m-1}\frac{1}{(4m-1)^{r+1}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^r}{1+x^4}\partial x = (-)^{m+r}\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{m+r+1}\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}\left(1-\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}-\ldots.(-)^{m-1}\frac{1}{m^{r+1}}\right).$$

In Nr. 12) ist nicht zwischen einem geraden und ungeraden m unterschieden. Geschieht diess, so entstehen acht Integralformen.

Auf dieselbe Weise kann man mit der gleichen Leichtigkeit die Integrale $\int_0^1 \frac{x^{5m+p}(\lg x)^r}{1\mp x^5}\partial x$, $\int_0^1 \frac{x^{6m+p}(\lg x)^r}{1\mp x^6}\partial x$, u. s. w. bestimmen. Das allgemeine Fortgangsgesetz erkennt man leicht aus den angegebenen Darstellungen. Diese Integrale führen auf die reciproken Potenzreihen mit gleichen und abwechselnden Zeichen, welche einer und derselben Zunahme zugehören. Da im Frühern gezeigt wurde, wie die Summen dieser Reihen mit beliebiger Schärfe gefunden werden können, so ist auch das Gesetz, wornach alle hierher gehörigen Integrale bestimmt werden, gegeben, und das vorliegende Problem ganz allgemein gelöst.

Wir wenden uns nun zur Darstellung einer andern Art hierher gehöriger Integrale.

§. 42.

Verbindet man die Gleichung Nr. 1) §. 16. mit $\int_0^1 x^{3m+p}(\lg x)^r\partial x$, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+p}(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{3m+p-2} + x^{3m+p-5} \ldots . x^{p+1})\partial x$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{3m+p-3} + x^{3m+p-6} \ldots . x^p)\partial x$$

$$= (-)^r 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} + \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \ldots . \frac{1}{(3m+p-1)^{r+1}}\right)$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x (-)^{r+1} 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \ldots \frac{1}{(3m+p-2)^{r+1}}\right).$$

Wird $\frac{x^p}{1+x+x^2}$ in Reihen nach den steigenden Potenzen von x entwickelt und mit $\int_0^1 (\lg x)^r \partial x$ verbunden, so entsteht:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^p + x^{p+3} + x^{p+6} + \ldots .)\partial x$$

$$-\int_0^1 (\lg x)^r (x^{p+1} + x^{p+4} + x^{p+7} \ldots .)\partial x$$

$$= (-)^r 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+4)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} + \ldots .\right)$$

$$(-)^{r+1} 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} + \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \frac{1}{(p+8)^{r+1}} + \ldots .\right)$$

$$= (-)^r 1^{r|1}\, S(p+1, 3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1}\, S(p+2, 3)^{r+1}.$$

Setzt man nun für p die Werthe 0, 1, 2 in Nr. 1) und 2) und verbindet die hieraus sich ergebenden Resultate in schicklicher Ordnung, so erhält man folgende drei Integralformen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r 1^{r|1} S(1,3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S(2,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1}\left(1 + \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} \ldots . \frac{1}{(3m-2)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} + \ldots . \frac{1}{(3m-1)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r . 1^{r|1} . S(2,3)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} \cdots + \frac{1}{(3m-1)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \ldots \frac{1}{m^{r+1}}\right),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r . 1^{r|1} S(3,3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S(4,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(\frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{6^{r+1}} + \frac{1}{9^{r+1}} + \ldots \frac{1}{(3m)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} + \frac{1}{10^{r+1}} + \cdots \frac{1}{(3m+1)^{r+1}}\right).$$

In der Darstellung Nr. 5) beginnt die Reihe $S(4,3)^{r+1}$ nicht mit dem ersten Gliede (.1), eben so nicht das vierte Glied. Zählt man daher $(-)^{r+1} 1^{r|1} 1 . (-)^r . 1^{r|1} . 1 = 0$ in beiden zu und ab, wodurch sie ergänzt werden, so geht Nr. 5) über in:

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S(1,1)^{r+1} (-)^{r+1} . 1^{r|1} S(1,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \cdots \frac{1}{m^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(1 + \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} + \cdots \frac{1}{(3m+1)^{r+1}}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale, wenn $r = 1$ und $m = 0, 1, 2, \ldots.$ gesetzt wird:

7)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x+x^2} \partial x = -S(1,3)^2 + S(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1+x+x^2} \partial x = -S(2,3) + \frac{1}{9} S(1,1)^2 = -S(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x+x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{54} + S(1,3)^2 - 1,$$

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+p}(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{3m+p-2}+x^{3m+p-5}\ldots\, x^{p+1})\partial x$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{3m+p-3}+x^{3m+p-6}\ldots\, x^p)\partial x$$

$$=(-)^r 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}}+\frac{1}{(p+5)^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(3m+p-1)^{r+1}}\right)$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x (-)^{r+1} 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}}+\frac{1}{(p+4)^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(3m+p-2)^{r+1}}\right).$$

Wird $\frac{x^p}{1+x+x^2}$ in Reihen nach den steigenden Potenzen von x entwickelt und mit $\int_0^1 (\lg x)^r \partial x$ verbunden, so entsteht:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x+x^2}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^p+x^{p+3}+x^{p+6}+\ldots)\partial x$$

$$-\int_0^1 (\lg x)^r (x^{p+1}+x^{p+4}+x^{p+7}\ldots)\partial x$$

$$=(-)^r 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}}+\frac{1}{(p+4)^{r+1}}+\frac{1}{(p+7)^{r+1}}+\ldots\right)$$

$$(-)^{r+1} 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}}+\frac{1}{(p+5)^{r+1}}+\frac{1}{(p+8)^{r+1}}+\ldots\right)$$

$$=(-)^r 1^{r|1} S(p+1,3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S(p+2,3)^{r+1}.$$

Setzt man nun für p die Werthe 0, 1, 2 in Nr. 1) und 2) und verbindet die hieraus sich ergebenden Resultate in schicklicher Ordnung, so erhält man folgende drei Integralformen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}(\lg x)^r\partial x}{1+x+x^2} = (-)^r 1^{r|1} S(1,3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S(2,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(1+\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}\ldots\frac{1}{(3m-2)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{8^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(3m-1)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r.1^{r|1}.S(2,3)^{r+1}(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{8^{r+1}}\ldots+\frac{1}{(3m-1)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}\left(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\ldots\frac{1}{m^{r+1}}\right),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r.1^{r|1}S(3,3)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}S(4,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{6^{r+1}}+\frac{1}{9^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(3m)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}+\frac{1}{10^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(3m+1)^{r+1}}\right).$$

In der Darstellung Nr. 5) beginnt die Reihe $S(4,3)^{r+1}$ nicht mit dem ersten Gliede (.1), eben so nicht das vierte Glied. Zählt man daher $(-)^{r+1}1^{r|1}1.(-)^r.1^{r|1}.1=0$ in beiden zu und ab, wodurch sie ergänzt werden, so geht Nr. 5) über in:

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}(\lg x)^r \partial x}{1+x+x^2} = (-)^r\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}.1^{r|1}S(1,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}\left(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\ldots\frac{1}{m^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(1+\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(3m+1)^{r+1}}\right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale, wenn $r=1$ und $m=0, 1, 2, \ldots$ gesetzt wird:

7)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x+x^2}\partial x = -S(1,3)^2+S(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{1+x+x^2}\partial x = -S(2,3)+\frac{1}{9}S(1,1)^2 = -S(2,3)^2+\frac{\pi^2}{54},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{54}+S(1,3)^2-1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\,S(1,3)^2 + S(2,3)^2 + \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\,S(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{54} + \frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{54} + S(1,3)^2 - \frac{137}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\,S(1,3)^2 + S(2,3)^2 + \frac{309}{400},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\,S(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{54} + \frac{1334}{9600},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{54} + S(1,3)^2 - \frac{2155}{2352},$$

u. s. w.

Wird $r=2$, $m=0,1,2,\ldots.$ gesetzt, so erhält man folgende Integrale:

8)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = 2S(1,3)^3 - 2S(2,3)^3 = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = 2S(2,3)^3 - \frac{2}{27}S(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{2}{27}S(1,1)^3 - 2S(1,3)^3 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = 2S(2,3)^3 - \frac{2}{27}S(1,1)^3 - \frac{19}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2 \partial x}{1+x+a^2} = \frac{2}{27}S(1,1)^3 - 2S(1,3)^3 + \frac{1691}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2 \partial x}{1+x+x^2} = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{7061}{4000},$$

u. s. w.

Die Werthe für $S(2,3)^2$, $S(2,3)^2 \ldots.$ sind in §. 27. angegeben.

Euler hat (Integr.-Rechn. Bd. IV. p. 141.) folgendes hieher gehörige Integral:

$$\int_0^1 \frac{(1+2x)\lg x}{1+x+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{9}$$

angegeben. Es findet sich auf folgende Weise. Nimmt man das zweite Integral in Nr. 7) doppelt und zählt es zu dem ersten, so erhält man:

9)

$$\int_0^1 \frac{(1+2x)\lg x}{1+x+x^2}\partial x = -S(1,3)^2 - S(2,3)^2 + \frac{2\pi^2}{54}$$
$$= -S(1,3)^2 - S(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{9.6} + \frac{3\pi^2}{54}$$
$$= -S(1,3)^2 - S(2,3)^2 - S(3,3)^2 + \frac{\pi^2}{18}$$
$$= -S(1,1)^2 + \frac{\pi^2}{18} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{18} = -\frac{\pi^2}{9},$$

wenn man Nr. 3) §. 24. berücksichtigt. Man ist überrascht, mit welchem Scharfsinne Euler bei den ihm zu Gebote stehenden Mitteln in diese Integrale eindrang. Auf dieselbe Weise erhält man aus dem 4ten und 5ten Integrale in Nr. 7):

10)

$$\int_0^1 \frac{x^3(1+2x)\lg x}{1+x+x^2} = -\frac{\pi^2}{9} + \frac{37}{36},$$

u. s. w.

§. 43.

Wird in der Gleichung Nr. 1) §. 17. zwischen einem geraden und ungeraden m unterschieden, also $2m$ statt m und $2m+1$ statt m geschrieben, und werden die hierdurch entstehenden Resultate mit

$$\int_0^1 x^{6m+p}(\lg x)^r \partial x \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{6m+p+3}(\lg x)^r \partial x$$

verbunden und integrirt, so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p}(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-2} - x^{6m+p-5} \ldots - x^{p+1})\partial x$$
$$+ \int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x + \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-3} - x^{6m+p-6} \ldots - x^p)\partial x$$

$$=(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}}-\frac{1}{(p+5)^{r+1}}+\frac{1}{(p+8)^{r+1}}\cdots-\frac{1}{(6m+p-1)^{r+1}}\right)$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}}-\frac{1}{(p+4)^{r+1}}+\frac{1}{(p+7)^{r+1}}\cdots-\frac{1}{(6m+p-2)^{r+1}}\right).$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p+3}(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x=\int_0^1 (\lg x)^r(x^{6m+p+1}-x^{6m+p-2}+\ldots x^{p+1})\partial x$$

$$-\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x+\int_0^1 (\lg x)^r(x^{6m+p}-x^{6m+p-3}-\ldots x^p)\partial x$$

$$=(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}}-\frac{1}{(p+5)^{r+1}}+\frac{1}{(p+8)^{r+1}}-\ldots+\frac{1}{(6m+p+2)^{r+1}}\right)$$

$$-\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}}-\frac{1}{(p+4)^{r+1}}+\frac{1}{(p+7)^{r+1}}\cdots+\frac{1}{(6m+p+1)^{r+1}}\right).$$

Wird auch $\frac{x^p}{1-x+x^2}$ in eine Doppelreihe nach den steigenden Potenzen von x entwickelt, mit $\int_0^1 (\lg x)^r\partial x$ verbunden und integrirt, so entsteht:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1-x+x^2}\partial x=\int_0^1 (\lg x)^r(x^p-x^{p+3}+x^{p+6}-x^{p+9}\ldots)\partial x$$

$$+\int_0^1 (\lg x)^r(x^{p+1}-x^{p+4}+x^{p+7}-\ldots)$$

$$=(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}}-\frac{1}{(p+4)^{r+1}}+\frac{1}{(p+7)^{r+1}}-\ldots\right)$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}}-\frac{1}{(p+5)^{r+1}}+\frac{1}{(p+8)^{r+1}}-\ldots\right)$$

$$=(-)^r.1^{r|1}S'(p+1,3)^{r+1}(-)^r.1^{r|1}S'(p+2,3)^{r+1}.$$

Setzt man nun statt p die Werthe 0, 1, 2 in Nr. 1), 2) und 3), führt die hieraus entstehenden Resultate in schicklicher Ordnung ein, so ergeben sich folgende sechs Integralformen:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^r . 1^{r|1} S'(1,3)^{r+1} (-)^r . 1^{r|1} S'(2,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(1 - \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} \dots - \frac{1}{(6m-2)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} \dots - \frac{1}{(6m-1)^{r+1}}\right),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^r . 1^{r|1} S'(2,3)^r (-)^r . \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} \dots - \frac{1}{(6m-1)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} \dots - \frac{1}{(2m)^{r+1}}\right),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^r . 1^{r|1} S'(3,3)^{r+1} (-)^r . 1^{r|1} S'(4,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \dots - \frac{1}{(2m)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7^{r+1}} + \dots - \frac{1}{(6m+1)^{r+1}}\right)$$

$$= (-)^r \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^3 (-)^{r+1} 1^{r|1} . S'(1,3)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} \dots - \frac{1}{(2m)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(1 - \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} \dots + \frac{1}{(6m+1)^{r+1}}\right),$$

wenn $(-)^{r+1} . 1^{r|1} (-)^r . 1^{r|1} = 0$ zur Ergänzung der Reihen im zweiten und vierten Gliede auf der rechten Seite verwendet wird.

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^{r+1} 1^{r|1} S'(1,3)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S'(2,3)^{r+1}$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(1 - \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} - \dots + \frac{1}{(6m+1)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} \dots + \frac{1}{(6m+2)^{r+1}}\right),$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^{r+1} 1^{r|1} S'(2,3)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1}$$
$$(-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} - .. + \frac{1}{(6m+2)^{r+1}}\right)$$
$$(-)^r . \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - .... + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}),$$

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S'(4,3)^{r+1}$$
$$(-)^r . \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - .... + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}})$$
$$(-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7^{r+1}} + \frac{1}{10^{r+1}} .... + \frac{1}{(6m+4)^{r+1}}\right)$$
$$= (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1} (-)^r . 1^{r|1} S'(1,3)^{r+1}$$
$$(-)^r . \frac{1^{r|2}}{3^{r+1}} (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - .... + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}})$$
$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} (1 - \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} - ... - \frac{1}{(6m+4)^{r+1}}),$$

wenn $(-)^r . 1^{r|1} (-)^{r+1} . 1^{r|1} = 0$ zur Ergänzung der Reihen in dem zweiten und vierten Gliede verwendet wird.

Die Richtigkeit der zweiten Formen in Nr. 6) und 9) ergibt sich auch dadurch, dass man die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{x^2 (\lg x)^r}{1-x+x^2} \partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (1 + \frac{x-1}{1-x+x^2}) \partial x$$

benutzt und die angezeigten Geschäfte ausführt.

Hieraus ergeben sich folgende Integrale für $r = 1$ und $m = 0, 1, 2, 3....$:

10)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x+x^2} \partial x = - S'(1,3)^2 - S'(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1-x+x^2} \partial x = - S'(2,3)^2 - \frac{1}{9} S'(1,1)^2 = - S'(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = - \frac{\pi^2}{108} + S'(1,3)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1-x+x^2}\partial x = \quad S'(1,3)^2 + S'(2,3)^2 - \tfrac{5}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1-x+x^2}\partial x = \quad S'(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{108} - \frac{13}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1-x+x^2}\partial x = \quad \frac{\pi^2}{108} - S'(1,3)^2 + \frac{119}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1-x+x^2}\partial x = -S'(1,3)^2 - S'(2,3)^2 + \frac{459}{400},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1-x+x^2}\partial x = -S'(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{108} + \frac{22}{75},$$

u. s. w.

Für $r = 2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ entsteht:

11)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = \quad 2S'(1,3)^3 + 2S'(2,3)^3 = \frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = \quad 2S'(2,3)^3 + \frac{2}{27}S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = \quad \frac{2}{27}S'(1,1)^3 - 2S'(1,3)^3 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = -\frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}} + \frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = -2S'(2,3)^3 - \frac{2}{27}S'(1,1)^3 + \frac{35}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = -\frac{2}{27}S'(1,1)^3 + 2S'(1,3)^3 - \frac{1637}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1-x+x^2}\partial x = -\frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{551}{250},$$

u. s. w.

Von diesen Integralen hat Euler (Integr.-Rechn. Bd. IV. S. 141.) folgenden Fall:

12)

$$\int_0^1 \frac{(1-2x)\lg x}{1-x+x^2}\partial x = -\frac{\pi^2}{18}$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^{r+1} 1^{r|1} S'(2,3)^{r+1} (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} - \ldots + \frac{1}{(6m+2)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}).$$

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}(\lg x)^r \partial x}{1-x+x^2} = (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S'(4,3)^{r+1}$$

$$(-)^r . \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}})$$

$$(-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7^{r+1}} + \frac{1}{10^{r+1}} \ldots + \frac{1}{(6m+4)^{r+1}}\right)$$

$$= (-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{3^{r+1}} S'(1,1)^{r+1} (-)^r . 1^{r|1} S'(1,3)^{r+1}$$

$$(-)^r . \frac{1^{r|2}}{3^{r+1}} (1 - \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^{r+1}})$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} (1 - \frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{7^{r+1}} - \ldots - \frac{1}{(6m+4)^{r+1}}),$$

wenn $(-)^r . 1^{r|1} (-)^{r+1} . 1^{r|1} = 0$ zur Ergänzung der Reihen in dem zweiten und vierten Gliede verwendet wird.

Die Richtigkeit der zweiten Formen in Nr. 6) und 9) ergibt sich auch dadurch, dass man die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^r}{1-x+x^2} \partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (1 + \frac{x-1}{1-x+x^2}) \partial x$$

benutzt und die angezeigten Geschäfte ausführt.

Hieraus ergeben sich folgende Integrale für $r=1$ und $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$:

10)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x+x^2} \partial x = -S'(1,3)^2 - S'(2,3)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1-x+x^2} \partial x = -S'(2,3)^2 - \frac{1}{9} S'(1,1)^2 = -S'(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = -\frac{\pi^2}{108} + S'(1,3)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = S'(1,3)^2 + S'(2,3)^2 - \tfrac{5}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = S'(2,3)^2 + \frac{\pi^2}{108} - \frac{13}{36},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = \frac{\pi^2}{108} - S'(1,3)^2 + \frac{119}{144},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = - S'(1,3)^2 - S'(2,3)^2 + \frac{459}{400},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1-x+x^2} \partial x = - S'(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{108} + \frac{22}{75},$$

u. s. w.

Für $r = 2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ entsteht:

11)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = 2S'(1,3)^3 + 2S'(2,3)^3 = \frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = 2S'(2,3)^3 + \frac{2}{27} S'(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = \frac{2}{27} S'(1,1)^3 - 2S'(1,3)^3 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = - \frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}} + \frac{9}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = -2S'(2,3)^3 - \frac{2}{27} S'(1,1)^3 + \frac{35}{108},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = - \frac{2}{27} S'(1,1)^3 + 2S'(1,3)^3 - \frac{1637}{864},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1-x+x^2} \partial x = - \frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{551}{250},$$

u. s. w.

Von diesen Integralen hat Euler (Integr.-Rechn. Bd. IV. S. 141.) folgenden Fall:

12)

$$\int_0^1 \frac{(1-2x)\lg x}{1-x+x^2} \partial x = - \frac{\pi^2}{18}$$

entwickelt. Man findet ihn, wenn man das zweite Integral in Nr. 10) doppelt von dem ersten abzieht. Hiernach ist:

$$\int_0^1 \frac{(1-2x)\lg x}{1-x+x^2}\partial x = -S'(1,3)^2 + S'(2,3)^2 - \frac{\pi^2}{108} + \frac{3\pi^2}{108}$$
$$= -S'(1,1)^2 + \frac{\pi^2}{36} = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{36} = -\frac{\pi^2}{18}.$$

Wendet man das gleiche Verfahren auf das 4te und 5te Integral in Nr. 10) an, so erhält man:

13)

$$\int_0^1 \frac{x^3(1-2x)\lg x}{1-x+x^2}\partial x = \frac{\pi^2}{18} - \frac{19}{30},$$

u. s. w.

Die Zahlenwerthe für $S'(1,3)^2$, $S'(2,3)^2$,.... sind in §. 27. angegeben.

§. 44.

Legt man die Darstellung

$$\frac{1}{1+x^2+x^4} = x^{-4} + x^{-10} + x^{-16} \ldots x^{-6m+2} + \frac{x^{-6m}}{1+x^2+x^4}$$
$$-(x^{-6} + x^{-12} + x^{-18} \ldots . x^{-6m})$$

zu Grunde und verbindet sie mit $\int_0^1 x^{6m+p}(\lg x)^r \partial x$, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-4} + x^{6m+p-10} \ldots . x^{p+2})\partial x$$
$$+ \int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{6m+p-6} + x^{6m+p-12} \ldots . x^p)\partial x$$
$$= (-)^r . 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+3)^{r+1}} + \frac{1}{(p+9)^{r+1}} + \ldots . \frac{1}{(6m+p-3)^{r+1}}\right)$$
$$+ \int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x$$
$$(-)^{r+1}. 1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+7)^{r+1}} + \ldots \frac{1}{(6m+p-5)^{r+1}}\right).$$

Entwickelt man $\frac{1}{1+x^2+x^4}$ in eine Reihe nach den steigen-

den Potenzen von x und verbindet das hiedurch entstehende Resultat mit $\int_0^1 x^p(\lg x)^r\partial x$, so erhält man:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^p(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r(x^p+x^{p+6}+x^{p+12}+\ldots)\partial x$$

$$-\int_0^1 (\lg x)^r(x^{p+2}+x^{p+8}+x^{p+14}+\ldots)\partial x$$

$$=(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}}+\frac{1}{(p+7)^{r+1}}+\frac{1}{(p+13)^{r+1}}\ldots\right)$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{(p+3)^{r+1}}+\frac{1}{(p+9)^{r+1}}+\frac{1}{(p+15)^{r+1}}\ldots\right)$$

$$=(-)^r.1^{r|1}S(p+1,6)^{r+1}(-)^{r+1}.1^{r|1}S(p+3,6)^{r+1}.$$

Setzt man nun $p=0,1,2,3,4,5$ in Nr. 1) und 2) und verbindet die hiedurch entstehenden Resultate mit einander, so ergeben sich folgende sechs Integralformen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x=(-)^r.1^{r|1}S(1,6)^{r+1}(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S(1,2)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(1+\frac{1}{7^{r+1}}+\frac{1}{13^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(6m-5)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r.\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}\left(1+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x=(-)^r.1^{r|1}S(2,6)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}S(4,6)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{8^{r+1}}+\ldots+\frac{1}{(6m-4)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{10^{r+1}}+\ldots+\frac{1}{(6m-2)^{r+1}}\right),$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x=(-)^r.\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}S(1,2)^{r+1}(-)^{r+1}1^{r|1}S(5,6)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1}.\frac{1^{r|1}}{3^{r+1}}\left(1+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(2m-1)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{11^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(6m-1)^{r+1}}\right),$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x = (-)^r . 1^{r|1} S(4,6)^{r+1} (-)^{r+1} . \frac{1^{r|1}}{6^{r+1}} S(1,1)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1}\left(\frac{1}{4^{r+1}} + \frac{1}{10^{r+1}} + \dots \frac{1}{(6m-2)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . \frac{1^{r|1}}{6^{r+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots \frac{1}{m^{r+1}}\right),$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x = (-)^r . 1^{r|1} S(5,6)^{r+1} (-)^{r+1} . 1^{r|1} S(1,6)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1}\left(\frac{1}{5^{r+1}} + \frac{1}{11^{r+1}} + \dots \frac{1}{(6m-1)^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1}\left(1 + \frac{1}{7^{r+1}} + \frac{1}{13^{r+1}} + \dots \frac{1}{(6m+1)^{r+1}}\right),$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}(\lg x)^r}{1+x^2+x^4}\partial x = (-)^r . \frac{1^{r|1}}{6^{r+1}} S(1,1)^{r+1} (-)^{r+1} 1^{r|1} S(2,6)^{r+1}$$

$$(-)^{r+1} \frac{1^{r|1}}{6^{r+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \dots \frac{1}{m^{r+1}}\right)$$

$$(-)^r . 1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{8^{r+1}} + \dots \frac{1}{(6m+2)^{r+1}}\right).$$

Die Formen in Nr. 7) und Nr. 8) entstehen, wenn die Reihen im zweiten und vierten Ausdrucke ergänzt werden, denn es ist:

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} (-)^r . 1^{r|1} = 0 \quad \text{und} \quad (-)^{r+1} . 1^{r|1} \frac{1}{2^{r+1}} (-)^r . 1^{r|1} \frac{1}{2^{r+1}} = 0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale für $r=1$ und $m=0, 1, 2, \dots$:

9)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -S(1,6)^2 + \tfrac{1}{9} S(1,2)^2 = -S(1,6)^2 + \frac{\pi^2}{72},$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -S(2,6)^2 + S(4,6)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -\frac{\pi^2}{72} + S(5,6)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -S(4,6)^2 + \frac{1}{36} S(1,1)^2 = -S(4,6)^2 + \frac{\pi^2}{216},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -S(5,6)^2 + S(1,6)^2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -\frac{\pi^2}{216} + S(2,6)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -S(1,6)^2 + \frac{\pi^2}{72} + \frac{8}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -S(2,6)^2 + S(4,6)^2 + \frac{3}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x}{1+x^2+x^4}\partial x = -\frac{\pi^2}{72} + S(5,6)^2 - \frac{4}{45},$$

u. s. w.

Wird $r=2$ und $m=0,1,2,3....$ gesetzt, so ergeben sich folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = 2S(1,6)^3 - \tfrac{1}{4}S(1,2)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = 2S(2,6)^3 - 2S(4,6)^3 = \frac{\pi^3}{81\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = \frac{2}{27}S(1,3)^3 - 2S(5,6)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = 2S(4,6)^3 - \frac{1}{108}S(1,1)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{1+x^2+x^2}\partial x = 2S(5,6)^3 - 2S(1,6)^3 + 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = \frac{1}{108}S(1,1)^3 - 2S(2,6)^3 + \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = 2S(1,6)^3 - \frac{2}{27}S(1,2)^3 - \frac{52}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2}{1+x^2+x^4}\partial x = \frac{\pi^3}{81\sqrt{3}} - \frac{7}{32},$$

u. s. w.

Auch die hier angewendete Methode ist, wie man sieht, allgemein und lässt sich leicht weiter fortführen. Sie eröffnet ein grösseres Feld der Anwendung. Man kann nun hiernach das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r}{1-x^2+x^4} \partial x$$

entwickeln. Es wird auf zwölf verschiedene Integralformen führen. Bei der Anwendung dieser Methode hat man die vorliegende Funktion auf zweierlei Weise in Reihen mit fallenden und steigenden Potenzen von x zu entwickeln und dann die sich ergebenden Resultate nach §. 19. zu behandeln. Für alle Functionen von x, die sich in solche Reihen entwickeln lassen, wird daher diese Methode benutzt werden können. Zur Darstellung des Integrals

$$\int_0^1 \frac{x^m (\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3} \partial x$$

erhält man, wenn $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ auf die angedeutete Weise in Reihen entwickelt wird:

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+p}(\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^{4m+p-3}+x^{4m+p-7} \ldots . x^{p+1})\partial x$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x - \int_0^1 (\lg x)^r (x^{4m+p-4}+x^{4m+p-8} \ldots . x^p)\partial x$$

$$= (-)^r . 1^{r|1} \left(\frac{1}{(p+2)^{r+1}} + \frac{1}{(p+6)^{r+1}} + \ldots . \frac{1}{(4m+p-2)^{r+1}}\right)$$

$$+\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x$$

$$(-)^{r+1} . 1^{r|1} \left(\frac{1}{(p+1)^{r+1}} + \frac{1}{(p+5)^{r+1}} + \ldots . \frac{1}{(4m+p-3)^{r+1}}\right),$$

12)

$$\int_0^1 \frac{x^p (\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x = \int_0^1 (\lg x)^r (x^p + x^{p+4} + x^{p+8} + \ldots .)\partial x$$

$$- \int_0^1 (\lg x)^r (x^{p+1} + x^{p+5} + x^{p+9} + \ldots .)\partial x$$

$$= (-)^r . 1^{r|1} S(p+1, 4)^{r+1} (-)^{r+1} . 1^{r|1} S(p+2, 4)^{r+1}.$$

Wird nun $p = 0, 1, 2, 3$ gesetzt und werden die nöthigen Entwickelungen gemacht, so erhält man zur Bestimmung des vorliegenden Integrals folgende vier Formen:

13)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x = (-)^r.1^{r|1}S(1,4)^{r+1}(-)^{r+1}.1^{r|1}S(2,4)^{r+1}$$
$$(-)^{r+1}.1^{r|1}(1+\frac{1}{5^{r+1}}+\frac{1}{9^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(4m-3)^{r+1}})$$
$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{6^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(2m-2)^{r+1}}\right),$$

14)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x = (-)^r.1^{r|1}S(2,4)^{r+1}(-)^{r+1}.1^{r|1}S(3,4)^{r+1}$$
$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{6^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(4m-2)^{r+1}}\right)$$
$$(-)^r.1^{r|1}\left(\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(4m-1)^{r+1}}\right),$$

15)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x = (-)^r.1^{r|1}S(3,4)^{r+1}(-)^{r+1}.\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}S(1,1)^{r+1}$$
$$(-)^{r+1}.1^{r|1}\left(\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(4m-1)^{r+1}}\right)$$
$$(-)^r.\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\ldots\frac{1}{m^{r+1}}),$$

16)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^r}{1+x+x^2+x^3}\partial x = (-)^r.\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}S(1,1)^{r+1}(-)^{r+1}.1^{r|1}S(1,4)^{r+1}$$
$$(-)^{r+1}\frac{1^{r|1}}{4^{r+1}}(1+\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}+\ldots\frac{1}{m^{r+1}})$$
$$(-)^r.1^{r|1}(1+\frac{1}{4^{r+1}}+\frac{1}{7^{r+1}}+\ldots\frac{1}{(4m+1)^{r+1}}).$$

Die Ermittelung besonderer Fälle ergibt sich hieraus leicht. Man sieht, dass, wie bemerkt, diese Methode ein grosses Feld für die Anwendung eröffnet. Sie ist eben so einfach, als allgemein, was sich durch die vorliegenden Resultate verdeutlicht.

§. 45.

Eine besondere Gruppe von Integralen erhält man aus den in §. 22. aufgestellten Gleichungen, wenn man statt p gebrochene Zahlen schreibt. Setzt man $p=\frac{1}{2}$ in Nr. 5) §. 22., so entsteht:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg x)^r}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x$$
$$=(-)^r 2^{r+1}.1^{r|1}S(1,2)^{r+1}(-)^{r+1}2^{r+1}.1^{r|1}(1+\frac{1}{3^{r+1}}+\frac{1}{5^{r+1}}$$
$$+\ldots\frac{1}{(2m-1)^{r+1}}).$$

Hieraus ergeben sich für $r=1$, $m=0, 1, 2, \ldots$ folgende Integrale:

2)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -4S(1,2)^2 = -\frac{\pi^2}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -\tfrac{1}{2}\pi^2 + 4,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{40}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1036}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{51664}{11025},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^m\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{\pi^2}{2} + 4\Sigma_1^m \frac{1}{(2u-1)^2}.$$

Eben so erhält man nach der früher angegebenen Methode:

3)

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)\lg x}{(1-x)^2\sqrt{x}}\partial x = -\pi^2 + 4,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)\lg x}{(1-x)^2\sqrt{x}}\partial x = -\frac{3\pi^2}{2} + \frac{76}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x^4)\lg x}{(1-x)^2\sqrt{x}}\partial x = -2\pi^2 + \frac{2936}{225},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{m+1})\lg x}{(1-x)^2\sqrt{x}}\partial x = -\frac{(m+1)\pi^2}{2} + 4\Sigma_1^m \frac{m-u+1}{(2u-1)^2}.$$

Ferner ist:

4)

$$\int_0^1 \frac{(\Sigma_0^m a_u x^u)\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -(\Sigma_0^m a_u)\frac{\pi^2}{2} - 4\Sigma_1^m a_u(\Sigma_1^u \frac{1}{(2u-1)^2}),$$

woraus sich folgende Integrale ableiten:

5)

$$\int_0^1 \frac{(1+x)\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -\pi^2 + 4,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -2\pi^2 + \frac{112}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^3\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -4\pi^2 + \frac{6736}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^4\lg x}{(1-x)\sqrt{x}}\partial x = -8\pi^2 + \frac{145024}{2205},$$

u. s. w.

Wird $r=2$, $m=0, 1, 2, 3, \ldots$ in Nr. 1) gesetzt, so entsteht:

6)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2 \partial x}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16 S(1,2)^3,$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16 S(1,2)^3 - 16,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16 S(1,2)^3 - \frac{448}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16 S(1,2)^3 - \frac{56432}{3375},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16 S(1,2)^3 - \frac{19410176}{1157625},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^m(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16 S(1,2)^3 - 16 \Sigma_1^m \frac{1}{(2u-1)^3}.$$

Hieraus erhält man folgende Integrale:

7)

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 32 S(1,2)^3 - 16,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 64 S(1,2)^3 - \frac{1312}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^3(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 128 S(1,2)^3 - \frac{386432}{3375},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{\Sigma_1^m a_u x^u)(\lg x)^2}{(1-x)\sqrt{x}} \partial x = 16(\Sigma_0^m a_u)\, S(1,2)^3 - 16 \Sigma_1^m a_u (\Sigma_1^u \frac{1}{(2u-1)^3}).$$

Diese Darstellungen lassen sich beliebig fortsetzen.

Setzt man $p = \frac{1}{2}$ in Nr. 6) §. 22., dann $2m$ und $2m+1$ statt m, so erhält man folgende zwei Integralformen:

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^r}{(1+x)\sqrt{x}} \partial x = (-)^r . 2^{r+1} . 1^{r|1} S'(1,2)^{r+1}$$
$$(-)^{r+1} . 2^{r+1} . 1^{r|1} (1 - \frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} - \ldots - \frac{1}{(4m-1)^{r+1}}),$$

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^r}{(1+x)\sqrt{x}} \partial x = (-)^{r+1} . 2^{r+1} . 1^{r|1} S'(1,2)^{r+1}$$
$$(-)^r . 2^{r+1} . 1^{r|1} (1 - \frac{1}{3^{r+1}} + \frac{1}{5^{r+1}} - \ldots + \frac{1}{(4m+1)^{r+1}}).$$

Setzt man $r=1$ und $m=0, 1, 2, \ldots.$, so leiten sich hieraus folgende Integrale ab:

10)

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = -4S'(1,2)^2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = +4S'(1,2)^2 - 4,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = -4S'(1,2)^2 + \frac{32}{9},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = +4S'(1,2)^2 - \frac{836}{225},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = -4S'(1,2)^2 + \frac{40064}{11025},$$

u. s. w. Für $r=2$, $m=0, 1, 2, \ldots.$ entsteht:

11)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = 16S'(1,2)^3 = \frac{\pi^3}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{\pi^3}{2} + 16,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = +\frac{\pi^3}{2} - \frac{416}{27},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{\pi^3}{2} + \frac{52432}{3375},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2}{(1+x)\sqrt{x}}\partial x = +\frac{\pi^3}{2} - \frac{17984176}{1157625},$$

u. s. w. Diese Gruppe von Integralen lässt sich auf jeden Wurzelexponenten ausdehnen. Setzt man nämlich $\frac{p}{k}$ statt p in Nr. 7) und Nr. 8) §. 22., so erhält man folgende hieher gehörige allgemeine Integralformen:

$$12)\quad \int_0^1 \frac{x^{mp+\frac{p}{k}-1}(\lg x)^r}{1-x^p}\partial x = (-)^r.\frac{k^{r+1}.1^{r|1}}{p^{r+1}}S(mk+1,k)^{r+1},$$

$$13)\quad \int_0^1 \frac{x^{mp+\frac{p}{k}-1}(\lg x)^r}{1+x^p}\partial x = (-)^r.\frac{k^{r+1}.1^{r|1}}{p^{r+1}}S'(mk+1,k)^{r+1}.$$

Hieraus lässt sich, wie früher, eine grosse Reihe besonderer Integrale ableiten, je nachdem die Werthe von k, p, r und m gewählt werden.

(Fortsetzung nächstens.)

XXXI.

Miscellen.

Summirung der Reihen;

$$a^2,\quad (a+d)^2,\quad (a+2d)^2,\quad (a+3d)^2, \ldots, (a+nd)^2;$$
$$a^3,\quad (a+d)^3,\quad (a+2d)^3,\quad (a+3d)^3, \ldots, (a+nd)^3.$$

Von dem Herausgeber.

Wenn der Kürze wegen:

$$P_n = \frac{(a+nd)(a+(n+1)d)(2a+(2n+1)d)}{1.2.3},$$

also:

$$P_{n-1} = \frac{(a+(n-1)d)\,(a+nd)\,(2a+(2n-1)d)}{1.2.3}$$

gesetzt wird, so überzeugt man sich durch einfache Rechnung auf der Stelle von der Richtigkeit der Relation:

$$d(a+nd)^2 = P_n - P_{n-1},$$

und setzt man nun in dieser Relation für n nach und nach:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, n;$$

so erhält man die folgende Reihe von Gleichungen:

$$da^2 = P_0 - P_{-1},$$
$$d(a+d)^2 = P_1 - P_0,$$
$$d(a+2d)^2 = P_2 - P_1,$$
u. s. w.
$$d(a+(n-1)d)^2 = P_{n-1} - P_{n-2},$$
$$d(a+nd)^2 = P_n - P_{n-1};$$

also, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$d\{a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+\ldots+(a+nd)^2\} = P_n - P_{-1},$$

folglich:

$$a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+\ldots+(a+nd)^2$$
$$= \frac{1}{d}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{(a+nd)\,(a+(n+1)d)\,(2a+(2n+1)d)}{1.2.3}\\ -\dfrac{(a-d)\,a(2a-d)}{1.2.3}\end{array}\right\},$$

oder:

$$a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+\ldots.+(a+nd)^2$$
$$=\frac{(a+nd)(a+(n+1)d)(2a+(2n+1)d)-(a-d)a(2a-d)}{6d}.$$

Ferner erhellet sogleich die Richtigkeit der Gleichung:

$$d+\frac{a+(n-1)d}{1.2}=\frac{a+(n+1)d}{1.2},$$

also auch der Gleichung:

$$d(a+nd)+\frac{(a+nd)(a+(n-1)d)}{1.2}=\frac{(a+(n+1)d)(a+nd)}{1.2};$$

und quadrirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man, weil offenbar

$$d^2(a+nd)^2+d(a+nd)^2(a+(n-1)d)=d(a+nd)^3$$

ist, die Gleichung:

$$d(a+nd)^3+\left\{\frac{(a+nd)(a+(n-1)d)}{1.2}\right\}^2=\left\{\frac{(a+(n+1)d)(a+nd)}{1.2}\right\}^2,$$

oder:

$$d(a+nd)^3=\left\{\frac{(a+(n+1)d)(a+nd)}{1.2}\right\}^2-\left\{\frac{(a+nd)(a+(n-1)d)}{1.2}\right\}^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$Q_n=\left\{\frac{(a+(n+1)d)(a+nd)}{1.2}\right\}^2, \text{ also } Q_{n-1}=\left\{\frac{(a+nd)(a+(n-1)d)}{1.2}\right\}^2$$

setzen, die Gleichung:

$$d(a+nd)^3=Q_n-Q_{n-1}.$$

Wird nun in dieser Gleichung für n nach und nach

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots.,n$$

gesetzt, so erhält man die Gleichungen:

$$da^3=Q_0-Q_{-1},$$
$$d(a+d)^3=Q_1-Q_0,$$
$$d(a+2d)^3=Q_2-Q_1,$$
u. s. w.
$$d(a+(n-1)d)^3=Q_{n-1}-Q_{n-2},$$
$$d(a+nd)^3=Q_n-Q_{n-1};$$

also, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$d\{a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3+\ldots.+(a+nd)^3\}=Q_n-Q_{-1},$$

folglich:

$$a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3+\ldots.+(a+nd)^3$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left[\frac{(a+(n+1)d)(a+nd)}{1.2}\right]^2-\left[\frac{a(a-d)}{1.2}\right]^2\right\},$$

oder:

$$a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3+\ldots.+(a+nd)^3$$
$$=\frac{\{(a+(n+1)d)(a+nd)\}^2-\{a(a-d)\}^2}{4d}.$$

Von dem Herausgeber.

Ueber den vielfach verdienten und berühmten Astronomen Friedrich Theodor Schubert, den Verfasser des „Traité d'Astronomie théorique. T. I. II. III. St. Pétersbourg. 1822. 4." und mehrerer anderer werthvoller Schriften und vieler Abhandlungen spricht Ernst Moritz Arndt in seinen „Erinnerungen aus dem äusseren Leben. Zweite Auflage. Leipzig. 1840. S. 159." sich auf folgende Art aus:

„Unter vielen bedeutenden Männern lernte ich" — (in Petersburg im Jahre 1812) — „auch Schubert den Astronomen, Klinger den Dichter, und den Weltumsegler Krusenstern kennen, alle drei Deutsche, der letzte aus einer schwedischen Familie stammend. An Schubert war ich gewiesen als einen Mann aus meiner Heimath *). Ein hoher, schöner und geistreicher Mann, aber durch Hochmuth verdorben. Er war ein Vergötterer Napoleons, zweifelte an jedem Erfolge gegen ihn **), schien überhaupt Geist und Glück anzubeten, kalter Hohnlächler und Menschenverächter. Vielleicht hatte er dies hier gelernt; indessen gehört zu allem irgend eine geborene Anlage. Er gab mir die Lehre: der Mensch ist eine dienstbare und lastbare Bestie; gewöhnen Sie Sich hier recht grob und hoch aufzutreten, dann hält man Sie für etwas ***). Solche widerliche Lebensregeln mögten

---

*) So viel ich weiss, war F. T. Schubert in Wolgast, in Neuvorpommern, geboren; E. M. Arndt war aus Schoritz auf der Insel Rügen gebürtig und geboren 1769. G.

**) Man bedenke, dass dies sich auf das Jahr 1812, welches dem Jahre der Erhebung, 1813, vorausging, bezieht

***) Arndt trat in die Dienste des damals vom Kaiser Alexander nach Petersburg gerufenen Ministers von Stein.

auch anderswo für gewisse Karaktere ihre praktische Gültigkeit haben. Ich war ein paar Mal bei diesem hochfahrenden und vornehmen Gelehrten und kam nicht wieder."

Wie schön spricht er sich dagegen über den aus einer schwedischen Familie stammenden Deutschen, den hochberühmten Krusenstern, aus: „Krusenstern — ja das war ein ganz anderer, obgleich im rauhen Norden an Ehstlands Küsten geboren, der menschlichste, anspruchsloseste, liebenswürdigste Mann, bei welchem jeder Seele wohl ward, der nur die schlichte Einfalt des Seemanns, aber nichts von der Rauhigkeit des rauhen Elements, mit welchem er zu kämpfen hatte, an sich trug."

Berichtigung.

In der Abhandlung „Ueber die der Ellipse parallele Curve etc." im 1sten Hefte dieses Bandes sind vor der ersten Formel auf p. 20. die folgenden Zeilen einzuschalten:

$$k^3.r^2 + k^2.\frac{a^2b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) - b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2b^2}$$
$$+k.\frac{a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2} = 0$$

(in Bezug auf die Veränderliche k) die Gleichung der zur betrachteten Ellipse parallelen Curve liefert, d. i. die Gleichung der Curve, deren auf den Normalen der Ellipse gemessener Abstand von dieser Letzteren unveränderlich und $= r$ ist."

Als ich im VI. Bande der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" p. 140 f. in der Abhandlung: „Ueber Dreiecke und Tetraeder, welche in Bezug auf Curven und Oberflächen zweiter Ordnung sich selbst conjugirt sind" die Ausdehnung der wichtigsten Resultate jenes Zusatzes auf Flächen zweiter Ordnung vorlegte, behielt ich die entsprechende Erweiterung des hier wiederholten Schlusssatzes einer besonderen Gelegenheit vor. Diese Erweiterung liefert den Satz: Die Discriminante der Gleichung ....

Man lese ferner p. 20 Zeile 2. v. n. c^2a^2 statt ca^2,
p. 22 „ 13. v. u. gegeben „ egeben,
p. 27 „ 2. v. u. Curve „ Curven,
p. 34 „ 1. v. n. Durchmesserendpunkte statt Durchmesserpunkte.

Chemnitz, 23. Octbr. 1862. Dr. W. Fiedler.

Druckfehler im Literarischen Berichte Nr. CLV.
S. 15. Z. 9. v. u. für „Schönlein" s. m. „Schönbein".

Literarischer Bericht
CLIII.

Am 28. Juli 1862 starb

Dr. Edmund Külp,

Professor und Director der höheren Gewerbeschule in Darmstadt, der sich auch als Schriftsteller im Fache der Mathematik und Physik einen geachteten Namen erworben hat.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Professor Schulz von Strasznitzki als Gelehrter und Mensch. Eine Erinnerung an dessen zehnten Sterbetag (9. Juni 1862.). Wien. Manz & Comp. 1862. 8.

Die warme Pietät für einen der verdientesten Lehrer der Mathematik, ausgezeichneten Gelehrten und trefflichen Menschen, dessen ausführlicherer Necrolog schon im Liter. Ber. Nr. LXXIV. S. 942. geliefert worden ist, welcher diese Schrift Ausdruck verleihet, macht einen ungemein wohlthuenden Eindruck, und zeigt, wie hoch und allgemein wahres wissenschaftliches Verdienst in Oesterreich geschätzt und erkannt wird. Auf 24 Seiten giebt uns der Herr Verfasser einen ziemlich ausführlichen Lebensabriss und eine sehr interessante Charakteristik des trefflichen Mannes als Lehrer, als Gelehrten und Mensch, aus welchem auch in der erfreulichsten Weise deutlich hervorleuchtet, wie aufmerksam auch in Oesterreich von den Unterrichtsbehörden jedes aufkeimende wissenschaftliche Talent beachtet, jedes wissenschaftliche Verdienst, ohne es, so lange es sich bewährt, jemals aus dem Auge zu verlieren, gefördert und belohnt wird. Wir machen unsere Leser auf die Schrift, die ihnen gewiss eine angenehme Lecture

gewähren wird, aufmerksam. Ausser den schon in der erwähnten Nummer des Literarischen Berichts S. 24. verzeichneten Schriften bemerken wir noch die folgenden, dort nicht angegebenen, von Schulz von Strasnitzki veröffentlichten wissenschaftlichen Arbeiten:

Kennzeichen der Convergenz unendlicher Reihen. 1828.

Ueber binomische Reihen und Lambertische Formeln. 1829.

Cissoiden der Curven. 1829.

Der Euler'sche Lehrsatz von den Polyedern. 1829.

Neue allgemeine Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung. 1829.

(Wahrscheinlich finden sich diese Abhandlungen in verschiedenen Journalen und ähnlichen Sammelwerken, die aber in der vorliegenden Schrift nicht angegeben sind.)

Anleitung zur Rechnung mit Decimalbrüchen. Wien. 1844.

Logarithmen- und andere nützliche Tafeln. Wien. 1844.

Die Reise zum Volkstag nach Frankfurt am Main. Wien. 1848.

Stellung der Astronomie im Bereiche der Menschheit. Brünn. 1850.

Arithmetik.

Handbuch der Kugelfunctionen von Dr. E. Heine, ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität in Halle. Berlin. Reimer. 1861. 8.

Die Theorie der Kugelfunctionen. Von Dr. Georg Sidler. (Aus dem Programm der Berner Kantonsschule für 1861.). Bern. Haller. 1861. 4.

Die sogenannten Kugelfunctionen, ursprünglich hauptsächlich bearbeitet von Laplace, und daher auch Laplace'sche Functionen genannt, finden bekanntlich die vielfachste und wichtigste Anwendung in der Theorie der Anziehung und Abstossung nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung, besonders dann, wenn die Gestalt der anziehenden Massen von wesentlichem Belang ist, also weniger in der Theorie der planetarischen Störungen als bei den mehr in das Gebiet der eigentlichen Physik fallenden Problemen, wie wir hier, übrigens natürlich nur ganz in der Kürze,

bemerken wollen. Eben so wollen wir nur ganz in der Kürze daran erinnern, dass man die $n$te Kugelfunction den, wie sich von selbst versteht, nur von x abhängenden Coefficienten von α^n in der convergirenden Reihe nennt, in welche sich die Potenz

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

unter der Voraussetzung, dass $\alpha^2<1$ ist, nach aufsteigenden Potenzen von α entwickeln lässt.

Herr Professor Heine hat sich jedenfalls ein sehr wesentliches Verdienst erworben, dass er in sehr grosser Vollständigkeit alle Arbeiten, welche bis jetzt über die genannten wichtigen Functionen veröffentlicht worden sind, nicht ohne Zuthun eigener verdienstlicher Untersuchungen, als ein systematisches Ganzes in dem obigen Werke mit grosser Sachkenntniss zusammengestellt, und neben der reinen analytischen Theorie auch die Anwendungen in eingehender Weise berücksichtigt hat. Dieses Verdienst ist um so grösser, je grösser die Anzahl einzelner Abhandlungen ist, in welchen zerstreut die in Rede stehende wichtige Theorie sich findet, und je schwieriger diese Abhandlungen, bei deren Kenntniss man bis zum Jahre 1782 zurückgehen muss, theilweise zu erhalten sind. Wir schlagen dieses Verdienst sehr hoch an, verhehlen jedoch nicht, dass das sehr grosse in diesem Werke zusammengehäufte, besonders analytische Material, wenn namentlich der Physiker, welcher diese rein analytischen Theorien bei seinen speciellen Untersuchungen zu benutzen beabsichtigt, sich eine klare Uebersicht verschaffen will und diese Uebersicht unter der Masse nicht verlieren soll, in dieser Beziehung Schwierigkeiten herbeiführen zu können uns scheinen möchte.

Deshalb dürfte auch der freilich weit kürzeren, sich auf das Wesentlichste beschränkenden, und einen nicht so umfassenden Apparat analytischer Vorkenntnisse voraussetzenden Schrift des Herrn Dr. Sidler, neben dem Heine'schen Werke, ihr Werth nicht abzusprechen sein, weshalb wir einen Jeden, der sich mit nicht zu grossem Zeitaufwande eine allgemeine Uebersicht über die genannte wichtige Theorie in ihren hauptsächlichsten Resultaten zu verschaffen wünscht, auf dieselbe aufmerksam machen.

Da die Sidler'sche Schrift in einzelne, mit besonderen Ueberschriften versehene Unterabtheilungen nicht getheilt ist, so müssen wir eine genaue Angabe des Inhalts derselben uns versagen, geben daher im Folgenden nur den Hauptinhalt der einzelnen Kapitel des Heine'schen Werkes an:

A. Theorie der Kugelfunctionen. Einleitung. Einführung der Kugelfunctionen. — Erster Theil. Die Kugelfunctionen einer Veränderlichen. 1. Verschiedene Formen der Kugelfunctionen. 2. Entwickelung nach Kugelfunctionen. 3. Die Kugelfunctionen zweiter Art. 4. Zugeordnete Functionen erster Art. 5. Zugeordnete Functionen zweiter Art. 6. Die Kettenbrüche. — Zweiter Theil. Die Kugelfunctionen mehrerer Veränderlichen. 1. Entwickelung der Kugelfunctionen erster Art nach Laplace. 2. Entwickelung der Kugelfunctionen zweiter Art. 3. Einführung und Eigenschaften der Lamé'schen Functionen. 4. Entwickelung der Kugelfunctionen nach Lamé'schen Functionen. 5. Dirichlet's Beweis, dass Functionen zweier Veränderlichen nach Kugelfunctionen entwickelt werden können. — **B. Anwendung der Kugelfunctionen.** I. Mechanische Quadraturen. II. Anziehung und Wärme. 1. Die Kugel. 2. Das Rotationsellipsoid. 3. Das dreiachsige Ellipsoid.

Geometrie.

Geometrische Untersuchungen über Curven höherer Ordnungen und Klassen. Von Dr. Sarres, Lehrer am Friedrichs-Gymnasium in Berlin. Wittenberg. Herrosée. 1862. 4.

Die in dieser Schrift mitgetheilten Untersuchungen wurden ursprünglich zu dem Zwecke begonnen, die durch analytische Hilfsmittel gefundenen Eigenschaften der Curven der 3. und 4. Ordnung durch rein geometrische Betrachtungen herzuleiten, und zugleich diese Curven wirklich zu construiren. Die angewandten Mittel zeigten sich aber nicht ausreichend, indem sich jedoch auf der anderen Seite ergab, dass die gebrauchte Methode einer grossen Verallgemeinerung fähig sei, dass sie sich mit Leichtigkeit auf Curven höherer Ordnungen anwenden liess, und dass namentlich die von Steiner mit so grossem Erfolge angewandten Strahlbüschel und Geraden nur specielle Fälle sind von vielfachen Strahlbüscheln und Geraden, die bei den Curven höherer Ordnungen dieselbe Rolle spielen, wie jene bei den Kegelschnitten. Die Leichtigkeit, mit welcher nach dieser Methode Bilder von höheren Curven dargestellt werden können, bewog den Herrn Verfasser, dieselbe weiter zu verfolgen und auf die vollständige Allgemeinheit zu verzichten, da es ihm schien, dass nur durch bestimmte Anschauungen eine tiefere Einsicht in das Wesen geometrischer Gebilde ermöglicht werde, Anschauungen, die man sich a priori nicht bil-

den kann. In der ersten der beiden Abtheilungen, in welche die Schrift zerfällt, wird die Construction der Curven durch rein graphische Hülfsmittel bewirkt, in der zweiten kommt das anharmonische Verhältniss zur Construction derselben Curven in Anwendung; beide Abtheilungen stehen in inniger Beziehung zu einander, und auch hier waltet das Princip der Dualität ob.

Wir glauben die Liebhaber der neueren Geometrie auf diese Schrift, welche wir im Vorhergehenden, absichtlich grösstentheils mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers, etwas näher zu charakterisiren gesucht haben, aufmerksam machen zu müssen.

Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen. Für technische Lehranstalten und zum Selbstunterrichte verfasst von Franz Tilscher, Hauptmann im k.k. Genie-Stabe, Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. Genie-Academie. Mit einem Atlas von 13 lithographirten Tafeln und einem Farbendrucke. Wien. 1862. 8.

So weit wir uns bis jetzt mit dieser neuen Darstellung der Lehre von den Schatten-Constructionen nach grösstentheils dem Herrn Verfasser eigenthümlichen, besonders auf die möglichst leichte praktische Anwendung berechneten Methoden, bekannt gemacht haben, glauben wir dieselbe allerdings den betheiligten Lehranstalten zur Beachtung empfehlen zu müssen. Nachdem dem Herrn Verfasser — so sagt er in der Vorrede — in der Theorie der darstellenden Geometrie, und zwar durch einfache Constructionen, die directe Lösung des Problems gelungen war: an eine gegebene Fläche Berührungsebenen zu legen, welche mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel bilden; lag ihm der Versuch nahe, dieses Resultat zur Darstellung der Intensitätslinien der Flächen anzuwenden und auf Grund bereits bekannter Wahrheiten zu dem Systeme einer „Lehre der Beleuchtungs-Constructionen" in der Art auszuarbeiten, dass es den mit den Elementen der darstellenden Geometrie vertrauten Anfänger in die Lage setzt, in jedem gegebenen Falle, bei beliebig angenommener Richtung der Lichtstrahlen, das wahre Modell für seine Darstellung direct und einfach selbst construiren zu können. — Damit diese Lehre aber auch dort Nutzen stifte, wo dem Constructeur die nöthige Zeit oder Gewandtheit mangelt, sind die Erklärungs-Figuren in einem grösseren Maassstabe und mit solcher Vollständigkeit dargestellt, dass sie als Vorlagen beim Laviren zweckmässig benutzt werden können. — Um endlich die

nach der angewandten Methode erzielten Resultate ersichtlich zu machen, und zugleich für jene, denen wegen Mangels der nöthigen Vorkenntnisse der Unterricht im Laviren nach Vorlagen ertheilt werden muss, eine sichere Grundlage zu bieten, wird der Herr Verfasser demnächst die meisten, in den ersten zwölf Tafeln construirten Figuren nebst noch einigen anderen Beispielen, auf welche häufig im Texte hingewiesen wurde, einzelne jedoch axonometrisch dargestellt, in derselben Manier ausführen lassen, in welcher die Figuren auf Taf. XIII. und XIV. behandelt erscheinen, zugleich aber die Einrichtung treffen, dass diese Vorlagen als eigentliche Vorlagen zum Laviren einen besonderen Anhang zu der Lehre der Beleuchtungs-Constructionen bilden.

Physik.

Recherches sur les propriétés magnétiques du fer. Par T. R. Thalén. Extrait des Actes de la Société Royale des Sciences d'Upsal. Série IIIe. T. IV. Upsal. Leffler. 1861. 4^{0}.

Mit der die schwedischen Mathematiker und Naturforscher auszeichnenden Schärfe und Präcision hat der Herr Verfasser in dieser ungemein lehrreichen Schrift die magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Arten des schwedischen Eisens untersucht, sich dabei anschliessend hauptsächlich an die von W. Weber angegebenen Methoden. Keineswegs aber bloss in Bezug auf diesen speciellen Zweck ist die ausgezeichnete Schrift von Wichtigkeit und grossem Interesse; vielmehr kann dieselbe nach unserer Meinung als ein wahres Muster für die Art und Weise, wie solche Untersuchungen auszuführen sind, betrachtet werden, und enthält zugleich die trefflichste Anleitung zu deren Anstellung, weshalb wir recht dringend auf dieselbe aufmerksam machen. Nach einer kurzen Einleitung über Zweck und Veranlassung der angestellten Untersuchungen beschreibt der Herr Verfasser zuerst in I. die angewandten Instrumente, und verbreitet sich dann in II. in sehr eingehender Weise über die Methode der Beobachtung, woranf ferner die nachstehend nach ihren Ueberschriften von uns angegebenen Abschnitte folgen: III. l'Hélice (1^{0}. Détermination de la force électro-magnétique de l'hélice sur un point, situé dans son intérieur. 2^{0}. Détermination expérimentale de l'intensité du courant d'induction prodnit par une force inductive qui émane successivement de points différents de l'intérieur de l'hélice. 3^{0}. Détermination de la valeur du rayon moyen de l'hélice.) IV. Dé-

termination de la valeur absolue du changement dans le moment magnétique du barreau en fer. V. Sur l'influence de la forme du barreau en fer sur la grandeur de son moment magnétique. VI. Vérification de la formule de M. Neumann, au cas des cylindres. VII. L'influence de la chaleur sur la grandeur de l'induction magnétique du fer. VIII. Détermination de la grandeur d'induction magnétique de différentes espèces du fer.

Schon diese kurze Inhaltsanzeige wird unser obiges Urtheil bestätigen, dass jedem, der Untersuchungen dieser Art anzustellen beabsichtigt, in dieser ausgezeichneten Schrift das beste Muster und die beste Anleitung dazu geboten wird. Dass er darin auch alle nöthigen Formeln und Rechnungsmethoden findet, versteht sich von selbst.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vgl. Literar. Ber. CXLIX. S. 8.).

1861. II. Heft III. Robert v. Schlagintweit: Ueber die Höhenverhältnisse Indiens und Hochasiens. S. 261. — Seidel: Bemerkungen über die Möglichkeit mit Hülfe der Photographie die directen Leistungen optischer Apparate in Ansehung der Vergrösserung zu verstärken. S. 290.

1862. I. Heft I. Jolly: Ueber die Molecularkräfte. S. 38. Herr Jolly gab eine vorläufige Nachricht von dem Resultate seiner Untersuchungen. Er bestimmte für 14 verschiedene Salzauflösungen die Grössen der Contractionen, welche durch allmäligen Zusatz von Wasser eintreten, und zeigt, dass zwei Gesetze sich begründen lassen:

1) Die Contractionen verhalten sich unter sonst gleichen Verhältnissen wie die Aequivalentzahlen der gelösten Körper.

2) Die Contractionen erfolgen durch einen Zug der auf einander wirkenden Molecule des gelösten und des lösenden Körpers, und ihr Zug nimmt ab, wie die Quadrate der Entfernungen der auf einander wirkenden Molecule wachsen, und ist verkehrt proportional der Summe der auf einander wirkenden Molecule.

Herr Jolly wird diese Untersuchungen selbstständig herausgeben, und dadurch gewiss alle Physiker zu besonderem Danke verpflichten.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXLIX. S. 11.)

No. 2. tom. IV. 1861. La teorica delle funzioni elittiche, Monografia del Sig. Prof. E. Betti. p. 57. — Intorno la curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. Memoria del Prof. C. Cremona. p. 71. — Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. Nota di Eugenio Beltrami. p. 102. — **Rivista bibliografica.** O. Hesse: Lezioni di geometria analitica, articolo del Prof. L. Cremona. p. 109. — Pubblicazioni recenti p. 112.

No. 3. tom. IV. 1861. Mémoire sur la résolution des équations dont le degré est une poissance d'un nombre premier. Par M. Emile Mathieu. p. 113. — Sur un système de courbes et surfaces dérivées, et en particulier sur quelques surfaces analogues aux ellipses de Cassini. Par M. William Roberts. p. 153. — Solution d'un problème par M. W. Roberts. p. 153. — Sulla determinazione della Parte Algebrica nell' integrazione in fuozione finita esplicita. Nota di C. M. Piuma. p. 154. — **Rivista bibliografica** Quadratura della doppia ellissoide di rivolozione. Articolo del Prof. B. Tortolini. p. 170. — Risultati di Geometria elementare. Articolo del Prof. B. Tortolini. — Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. Lettres de M. Hermite à M. Borchardt. p. 176.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. (Vrgl. Literar. Ber. Nr. CL. S. 12.)

April 1862. A. v. Bezold: Ueber die Natur der negativen Stromesschwankungen im gereizten Muskel, mitgetheilt von Herrn du Bois-Reymond. S. 199—S. 202. — Ehrenberg: Erläuterung eines neuen wirklichen Passatstaubes aus dem atlantischen Dunkelmeere vom 29. Oct. 1861. (Mit einer Karte). S. 202—S. 222. — Weber: Ueber die Identität der Angaben von der Dauer des längsten Tages bei den Chaldäern, Chinesen, Juden. S. 224.

Mai 1862. Ehrenberg: Mittheilung über den Orkan mit Passatstaub am 27. März bei Lyon. S. 235—S. 236. — Kronecker: Ueber einige neue Eigenschaften der quadratischen Formen mit negativer Determinante. S. 302—S. 311.

Literarischer Bericht
CLIV.

Wiederum haben die Mathematik und Astronomie den Verlust eines ihrer würdigsten Vertreter zu beklagen. Am 5. September 1862 starb in **Lund** der ausgezeichnete schwedische Mathematiker und Astronom

Dr. J. M. Agardh,

Professor der Astronomie an der Universität in Lund und Director der dortigen Sternwarte,

im Alter von 49 Jahren 8 Monaten und 14 Tagen, dem der Herausgeber des Archivs sich zu manchem Danke verpflichtet fühlt. Desto mehr wünscht derselbe, dass ihm von kundiger Hand recht bald ein Necrolog des trefflichen Mannes zur Publication im Archiv eingesandt werden möge.

Am 29. August starb in Folge einer kurzen aber schmerzvollen Krankheit im 77sten Lebensjahre der berühmte Director und erste Astronom der Sternwarte zu Mailand

Franz Carlini,

geboren im Jahre 1785. Seine thatenreiche astronomische Laufbahn begann sehr frühzeitig mit der Berechnung des Jahrgangs 1804 der Mailänder Ephemeriden und erstreckte sich fast durch $^2/_3$ eines Jahrhunderts. Während dieser langen Zeit arbeitete er mit ununterbrochener Thätigkeit für die Fortschritte der Wissenschaft. Im Jahrgange 1863 der Mailänder Ephemeriden erscheint noch eine Abhandlung von ihm, und vier Wochen vor seinem Tode hat er noch Elemente für den Cometen II. 1862 berechnet.

Carlini's Verdienste sind jedem Astronomen bekannt. Er war mit fremden Sprachen und deren Literatur sehr vertraut;

auch liebte er, sich mit mechanischen Arbeiten zu beschäftigen. Sein ganzes Wesen war für den, der ihn genau kannte, sehr liebenswürdig; sein moralischer Charakter fleckenlos.

Dass uns auch ein ausführlicher Necrolog dieses ausgezeichneten Mannes eingesandt werde, wünschen wir sehr. Vorstehende Notizen sind aus den Astronomischen Nachrichten Nr. 1381. entlehnt, und mitgetheilt von Herrn J. V. Schiaparelli, wobei wir jedoch bemerken wollen, dass nach dem Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien Carlini am 8ten Januar 1783 in Mailand geboren ist, worüber wir eine weitere Aufklärung wünschen möchten.

Unterrichtswesen.

Indem wir für die uns wiederum gütigst zugesandte:

> Anzeige der Vorlesungen an der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule zu Carlsruhe für das Jahr 1862—1863. Carlsruhe.

verbindlichst danken, bemerken wir, auf die frühere Anzeige im Literar. Bericht Nr. CXVIII. S. 1. uns beziehend, nur, dass auch diesmal der Unterricht auf dieser trefflichen und berühmten Lehranstalt in jeder wünschenswerthen Vollständigkeit von anerkannt ausgezeichneten Lehrern ertheilt wird.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Scritti di Leonardo Pisano, Matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da Baldassarre Boncompagni, Socio ordinario dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei e Socio corrispondente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino*). Volume II. (Leonardi Pisani Practica Geometriae ed opuscoli). Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata Num°. 211. A. 1862. 4°.

---

*) Auch die Berliner Akademie der Wissenschaften hat zu unserer grossen Freude die wichtigen Verdienste, welche der Fürst Boncompagni sich fortwährend um die mathematischen Wissenschaften erwirbt, durch die Aufnahme unter ihre Ehrenmitglieder vor Kurzem anerkannt.

Wir haben schon öfter die Freude gehabt, unseren Lesern von den ungemein grossen Verdiensten Nachricht zu gehen, welche der Fürst Baldassarre Boncompagni, aus dem reinsten Interesse für unsere Wissenschaft, sich fortwährend um die Geschichte der Mathematik erwirbt, Verdienste, die um so höher anzuschlagen sind, wenn man bedenkt, wie eifrig und mit welchem Erfolge von den ältesten Zeiten an die Mathematik und Physik namentlich auch in Italien von den grössten Männern, denen ihre Entdeckungen die Unsterblichkeit sichern, gepflegt worden sind, und wie unvollständig verhältnissmässig die näheren Umstände dieser Entdeckungen und Arbeiten bis jetzt bekannt sind.

In einem 283 Seiten starken, prachtvoll ausgestatteten Quartbande liegt eine neue Frucht der wichtigen Publicationen des Fürsten Baldassarre Boncompagni jetzt vor uns. Es ist dies der zweite Theil der Schriften des Leonardo Pisano aus dem 13ten Jahrhundert, der den Lesern aus früheren Berichten in unserem Archiv schon bekannt genug ist, und dessen Schriften Herr B. Boncompagni mit Recht zunächst vorzugsweise seine Aufmerksamkeit gewidmet hat.

Es besteht dieser zweite Theil der Schriften des Leonardo von Pisa aus zwei Abtheilungen.

Die erste Abtheilung hat den Titel:

La Practica Geometriae di Leonardo Pisano secondo la lezione del Codice urbinate n°. 292 della Bibliotheca Vaticana.

Der Raum verstattet uns hier nur, auszusprechen, dass wir diese Schrift für die Geschichte der Geometrie, und Mathematik überhaupt, für höchst wichtig halten, und dass Jeder, der sich mit historischen mathematischen Studien und Untersuchungen beschäftigt, derselben die sorgfältigste Berücksichtigung schenken muss, welches allgemeine Urtheil wir durch die nachfolgende Angabe der Ueberschriften der Hauptabschnitte etwas näher bekräftigen wollen:

Incipit practica geometriae a Leonardo pisano de filijs bonaccij anno M°. CC°. XX°. p. 1—5. — Incipit distinctio prima de multiplicatione latitudinum camporum quadratorum rectos angulos habentium in eorum longitudine, in quibus multiplicationibus eorum embada continentur. p. 5—18. — Distinctio secunda. Incipit capitulum de inuenctione radicum. p. 18—30. De mulliplicatione radicum p. 25—26. De addictione radicum. p. 26—28. De extractione radicum. p. 28—29. De divisione radicum. p. 29—30. (Jedenfalls sehr wichtig auch für die Geschichte der älteren

Arithmetik). — Incipit distinctio tertia in mensuratione omnium camporum. p. 30—110. Incipit pars prima tertiae distinctionis de mensuratione triangulorum. p. 30—56 (enthält vieles Merkwürdige). Incipit pars secunda tertiae distinctionis de mensuratione quadrilaterorum. p. 56—83. Incipit pars tertia in dimensione camporum plura latera quam quatuor habentium. p. 83—86. Incipit pars quarta in dimensione circulorum et eorum partium. p. 86—107. (Das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie findet Leonardo von Pisa p. 91. = 275:864 = 1:3,1418). Incipit pars quinta in dimensione camporum qui in montibus iacent. p. 107—110. — Explicit distinctio tertia, incipit quarta de diuisione inter consortes. p. 110—148. (Sehr viele Theilungsaufgaben über Dreiecke, Vierecke, mehrseitige Figuren und den Kreis, die wir sehr zur Beachtung empfehlen). — Explicit distinctio quarta de diuisione camporum inter consortes. Incipit quinta de radicibus cubicis extrahendis. p. 148—158. (Sehr bemerkenswerth wegen der Ausziehung der Cubikwurzeln). Incipit distinctio VI^a in dimensione corporum. p. 158—202. (Viele interessante stereometrische Betrachtungen enthaltend). — Incipit septima distinctio de inuentione altitudinum rerum elevatarum et profunditatum atque longitudinum planitierum. p. 202—207. — Incipit distinctio octaua de quibusdam subtilitatibus geometricis. p. 207—216 (vorzüglich reguläre Vielecke im Kreise betreffend). — Expliciunt questiones geometricales et incipiunt questiones, quorum solutiones non sunt terminate, hoc est quod non cadunt ad unum terminum tantum, sed ad plures (also unbestimmte Aufgaben „ut est ista in qua proponitur inuenire aliquis quadratus numerus, cui si addatur 5, proueniat inde quadratus numerus et hoc potest fieri multipliciter“) p. 216—224

Die zweite Abtheilung hat den Titel:

Opuscoli di Leonardo Pisano secondo la lezione di un codice della Bibliotheca Ambrosiana di Milano contrassegnato E. 75, Parte Superiore.

Incipit flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometriam, uel ad utrumque pertinentium. p. 227—234. De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus. p. 234—236. De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis. p. 236—238. De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta, questio notabilis. p. 238—239. De eadem re. p. 239—242. De quatuor hominibus bizantios habentibus. p. 242—243. De quatuor hominibus qui inuenerunt bizantios. p. 243—246. Questio similis suprascripte de tribus hominibus. p. 246—247. —

Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris. De auibus emendis secundum proportionem datam. p. 247—248. Item de auibus p. 248—249. De compositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurum datum. p. 249—250. Modus alius soluendi similes questiones p. 250—251. Inuestigatio nnde procedat inuentio snprascripta. p. 251—252. — Incipit liber quadratorum compositus a leonardo pisano. Anni. M.CC.XXV. p. 253—283.

Wir glauben durch das Vorstehende, so weit es hier der Raum erlaubt, unseren Lesern eine deutliche Anschaunng von dem Inhalte dieses für die Geschichte der Mathematik hochwichtigen Werks gegeben zu haben, für dessen Pnblication Herrn B. Boncompagni jedenfalls der grösste Dank gebührt. G.

Arithmetik.

Factoren-Tafeln für alle Zahlen der siebenten Million, oder genauer von 6000001 bis 7002000, mit den darin vorkommenden Primzahlen. Von Zacharias Dase. Hamburg. Perthes, Besser und Mauke. 1862. Fol.

„Durch die von mehreren Beförderern der Wissenschaften in Hambnrg ihm gewährte Unterstützung wurde Dase vor etwa einem Jahre in den Stand gesetzt, sich ganz der Ausführung des von Gauss ihm angerathenen Unternehmens widmen zu können. Bis zu seinem am 11. September d. J. „—(1861)—" plötzlich erfolgten Tode hatte er die 7te Million vollständig und die 8te bis anf einen kleinen Theil berechnet. Von der 9ten und 10ten Million hat er, bei Anwendung der Burckhardt'schen Methode, die Factorentafeln zu construiren, auch schon einen beträchtlichen Theil der Factoren bestimmt. Die Fortführung des Werks hat Herr Dr. Rosenberg in Hambnrg übernommen."

Die Dase'schen Tafeln, so wie dieselben jetzt im Druck erscheinen, haben dieselbe Einrichtung wie die Burckhardt'schen, so dass also jedesmal nur der kleinste Factor, mit Ausschluss der Factoren 2, 3 und 5 angegeben ist. Es scheint uns daher auch nicht erforderlich, den Gebrauch derselben hier zu erläutern, da solches bereits in den Burckhardt'schen Tafeln, **als deren Fortsetzung sie angesehen werden können** geschehen ist."

„Auf vollständige Correctheit ist die grösste Sorgfalt verwendet."

Der Druck der 8ten Million wird sogleich nach Herausgabe dieser 7ten Million beginnen."

Hamburg, im November 1861.

Das Comité der Dase-Stiftung. D. H. Jacobj, Dr. — W. A. Lepper. — C. C. H. Maschwitz. — C. A. F. Peters, Dr. und Professor. — H. M. Seegelmann, Pastor. — L. Steenfeld.

Die trefflichen Männer, welche die Herausgabe dieses wichtigen Werkes, dem ein sehr interessanter Brief von Gauss an Dase vorgedruckt ist, möglich machten und dessen Fortsetzung sicher stellten, verdienen den grössten Dank aller Mathematiker und der ganzen Wissenschaft; näher auf dasselbe einzugehen, würde überflüssig sein, da es als eine Fortsetzung der allgemein bekannten Burckhardt'schen Tafeln zu betrachten ist.

Astronomie.

Am 9ten October 1862 wurde auf Veranlassung des Prälaten von Kremsmünster, des hochverdienten Astronomen und Meteorologen Herrn Reslhuber, an dem Hause Nr. 324 in Linz eine marmorne Gedenktafel eingemauert, welche den Namen Kepler und die Jahreszahlen 1614—1627 trägt. In diesem Hause wohnte der grosse Astronom während seines Aufenthalts in Linz vierzehn Jahr.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CLIII. S. 8.)

No. 4. tom. IV. 1861. Ricerca fondamentale per lo studio di un certa classe di proprietà delle superficie curve. Memoria del Prof. F. Casorati (Continuazione e fine). p. 117. — La Teorica dei Covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni. Monografia del Prof. F. Brioschi (Continuazione e fine). p. 186. — Sur un problème concernant la Théorie des surfaces du 2me ordre.

Par M. A. Clebsch. p. 195. — Proposizioni di geometria, Nota del Prof. V. Janni. p. 199. — Risoluzione di tre date equazioni a tre incognite. Nota del Prof. B. Tortolini. p. 202. — Ricerche geometriche sulle funzioni ellitiche del Prof. B. Tortolini. p. 204. — **Rivista bibliographica.** Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un' altra superficie parimenti data in guisa che la rappresentazione riesca nelle sue parti infinitesime una figura simile alla figura rappresentata di C. F. Gauss. Traduzione di Eugenio Beltrami. p. 214. — Pubblicazioni recenti. p. 232.

Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Anno accademico 1861—1862. Bologna 1862.

Der Bericht über die Arbeiten der berühmten Akademie der Wissenschaften in Bologna für 1860—1861 ist im Literar. Ber. Nr. CXLVIII. S. 14. angezeigt worden, und wir freuen uns, jetzt auch den Bericht für 1861—1862 zur Anzeige bringen zu können, so weit der Inhalt in den Kreis des Archivs gehört, wobei wir bemerken, dass die Einrichtung des Berichts ganz dieselbe, wie a. a. O. angegeben, geblieben ist, so dass ausser dem Titel der gelesenen Abhandlung immer auch deren wesentlicher Inhalt angegeben worden ist. — p. 20—p. 21. Prof. **Respighi:** Osservazione del Passaggio di Mercurio sul disco solare nella mattina del 12 Novembre 1861. Mit dem grossen Refractor von Steinheil mit 250maliger Vergrösserung konnten die Zeiten der inneren und äusseren Berührung mit grosser Genauigkeit beobachtet werden. — p. 30—p. 31. Prof. **L. Cremona** legge un sunto d'una sua Memoria sulla Teoria generale delle curve piane. Steiner hat in der Abhandlung: Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven (Crelle's Journal. Thl. 47. 1853) viele wichtige Theoreme über die algebraischen Curven bekannt gemacht, von denen ein Theil neuerlich von Clebsch mittelst der höheren Analysis und der Theorie der Covarianten bewiesen worden ist. Herr L. Cremona, von der Ansicht ausgehend, dass Steiner diese Theoreme auf rein geometrischem Wege gefunden hat, hat dagegen eine rein geometrische Theorie der ebenen Curven zu geben versucht, welche nicht nur die von Steiner, Hesse, Clebsch u. A. gefundenen Resultate umfasst, sondern ihn auch zu vielen neuen Sätzen und interessanten Anwendungen auf die Curven der 3ten und 4ten Ordnung geführt hat. Wir müssen uns hier mit die-

ser vorläufigen Notiz begnügen, und hoffen auf die interessante Abhandlung, wenn dieselbe erst vollständig erschienen sein wird, später zurück zu kommen. — p. 35—p. 54. Prof. **Quirico Filopanti:** Sulle **Geurauie,** ossia di alcune singolari relazioni cosmiche delle Terra et del Cielo. — p. 71—p. 73. Prof. **Maurizio Brighenti:** Sulla Portata dei tubi addizionali cilindrici o divergenti. — p. 79—p. 80. Prof. **Chelini:** De' moti geometrici e loro leggi nello spostamento d'una figura di forma invariabile. Die aus rein geometrischen Gesichtspunkten aufgefasste Bewegungslehre hat man bekanntlich mit dem Namen Phoronomie oder Kinematik (von κινεῖν bewegen) nach Ampère belegt, und Euler, Monge, Chasles, Poinsot, Möbius, Giorgini, Rodrigues u. A. sind auf geometrischem und analytischem Wege zu merkwürdigen Resultaten in dieser Beziehung geführt worden. Herr Chelini hat jedenfalls eine höchst verdienstliche Arbeit unternommen, wenn er versucht hat, alle Gesetze der geometrischen Bewegungslehre in einer vollständigen möglichst elementaren Theorie zusammenzufassen, und wir sind sehr gespannt auf die Publication der betreffenden Abhandlung, die wir, sobald sie zu unserer Kenntniss gelangt, ausführlich zur Anzeige zu bringen uns beeilen werden. — p. 88—p. 91. Prof. **L. Cremona:** Intorno alla trasformazione geometrica di una figura piana in un' altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell' altra una sola retta. Der Zweck dieser Abhandlung, in welcher der Herr Verfasser auf eine frühere Arbeit von Herrn Schiaparelli Bezug nimmt, ist hierdurch mit hinreichender Deutlichkeit angegeben, und nach den in dem Bericht gemachten weiteren Angaben ist Herr L. Cremona in derselben zu sehr merkwürdigen und interessanten Resultaten gelangt, die sich hier nur erst weiter besprechen lassen werden, wenn die vollständige Abhandlung uns vorliegt. — p. 91—97. Prof. **Respighi:** Sulla Latitudine Geografica dell' Osservatorio di Bologna. Die Breite der Sternwarte von Bologna ist schon oft zu verschiedenen Zeiten von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Instrumenten bestimmt worden. Mittelst des berühmten Gnomons in der Kirche S. Petronio fand Manfredi 1706 dieses Element $= 44^{0}.\ 29'.\ 38'',3$ nördlich. Spätere Bestimmungen von demselben Astronomen, von Zanotti, Zach, Caturegli schwanken zwischen $44^{0}.\ 29'.\ 52''$ und $44^{0}.\ 29'.\ 54''$. Mit einem Meridiankreise von Ertel hat Herr Prof. Respighi durch eine sehr fleissige Arbeit die Breite neuerlich im Mittel zu $44^{0}.\ 29'.\ 54'',8$ festgesetzt. — p. 97—p. 101. Dottor **Giulio Casoni:** Intorno alle influenze della luna

sulla nostra atmosfera. — p. 101—103. Prof. **Lorenzo Della Casa:** Sul l'equivalente meccanico del calore. Der Herr Verfasser findet das mechanische Aequivalent der Wärme $= 417,76$. — p. 106—p. 111. Prof. **M. Fiorini:** Sulle triangolazioni topografiche, worin auch eine neue Behandlung der Pothenotschen Aufgabe gegeben wird.

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. III. Upsaliae. C. A. Leffler. 1861. 4°.

Seriei tertiae Vol. II. Fasciculus posterior dieser wichtigen Schriften einer der ersten und berühmtesten Gesellschaften der Wissenschaften ist im Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 15. von uns angezeigt worden. Der uns vorliegende neue Theil (Ser. III. Vol. III.) enthält ausser mehreren zoologischen und botanischen Abhandlungen eine Abhandlung physikalischen Inhalts unter dem Titel:

Recherches sur la conductibilité des corps pour la chaleur, par A. J. Ångström. p. 51—p. 72.

Nachdem Herr Ångström in der Einleitung zu dieser wichtigen Abhandlung in sehr lehrreicher Weise die Arbeiten seiner Vorgänger, namentlich auch rücksichtlich der Beziehung der Wärme und Elektricität zu einander, näher beleuchtet und beurtheilt hat, bezeichnet er in §. 1. als einen namentlich noch nicht hinreichend aufgeklärten wesentlichen Punkt in der Theorie der Wärme den Uebergang der Wärme von einem Metall zu einem anderen, dessen nähere Erörterung der Hauptzweck seiner eben so scharfsinnigen als gründlichen, in dieser auch in mathematischer Rücksicht interessanten Abhandlung niedergelegten Untersuchungen ist. Der weiteren Details und der, unmittelbar anschliessend an die beiden von Poisson in der Théorie de la chaleur p. 254 aufgestellten Gleichungen, experimentell nachgewiesenen Gesetze wegen müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen, und wollen nur noch wörtlich anführen, was der Herr Verfasser am Schluss in §. 9. über die erhaltenen Resultate sagt:

„Quoique nous puissions ainsi regarder les lois, déterminées ci-dessus pour le passage de la chaleur d'un métal à l'autre, comme verifiées par les observations que nous venons d'exposer, on pourrait néanmoins supposer qu'il existe certains cas, où ces lois cessent d'être satisfaites d'une manière rigoureuse. En admettant — comme il nous semble nécessaire — qu'il y a diffé-

rentes espèces de chaleur thermométrique, de même que pour la chaleur rayonnante, et que tout métal conduit dèslors par préférence certaines espèces de chaleur, on peut notamment distinguer les deux cas suivants:

1⁰. La chaleur conserve sa composition d'une manière invariable au passage d'un métal à l'autre, tout aussi bien que la lumière et la chaleur rayonnante, tant que celles-ci se montrent sous la forme d'un mouvement vibratoire;

2⁰. La composition de la chaleur se change à la surface même de contact et dépend seulement de la constitution moléculaire du corps, ainsi qu'on le trouve, quand la chaleur rayonnante se transforme par absorption en chaleur thermométrique.

Si l'on admet le premier de ces deux cas et qu'on vienne à supposer que le pouvoir conducteur varie pour les différentes espèces de chaleur, ce pouvoir d'un seule et même métal devrait être différent, selon que la chaleur vient de l'un ou de l'autre conducteur",

worüber weitere Untersuchungen zu publiciren, der Herr Verfasser sich vorbehält.

Ausser dieser wichtigen physikalischen Abhandlung enthält der vorliegende Band noch:

Résultats des observations météorologiques faites au nouvel observatoire d'Upsal pendant l'année 1857. Observateurs: M. Schulz (Janv.—Juin), **M. Fogelmarck** (Juillet — Dec.). Rédacteur: **M. Wackerbarth**.

Résultats (u. s. w. wie vorher) **pendant l'année 1858. Observateur: M. Nordlund.** Rédacteur: **M. Wackerbarth.**

Die Beobachtungen sind äusserst vollständig, ganz den neueren Ansprüchen der Wissenschaft entsprechend, und die Redaction ist offenbar im höchsten Grade sorgfältig und genau.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1862. Januar — Juni. Mit einer Tafel-Abbildung. Prag. 1862. 8⁰. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CL. S. 12.)

S. 1 — S. 12. Jahresbericht für 1861 vom Secretär Dr. W. R. Weitenweber. — S. 13 — 17. Herr Pierre hielt einen (hier mitgetheilten) Vortrag über den Einfluss der Biegung des

Wagebalkens auf die Richtigkeit der Wage. — S. 27 — S. 31. Herr Weitenweber machte einige Mittheilungen aus einer grösseren hydrologisch-meteorologischen Studie des Herrn Dr. Nowak über das todte Meer und die Verdunstung. — S. 41 — S. 43. Herr Karlinski hielt einen Vortrag über die schnellste Praxis der Auflösung der Kepler'schen Gleichung $M = E - e\sin E$ bei grossen Excentricitäten der elliptischen Cometenbahnen. (Herr Karlinski versucht die bekannte Gauss'sche Auflösung für den Fall sehr excentrischer Cometenbahnen zweckmässig abzuändern und erläutert die Methode durch ein Beispiel, bei dem man allerdings leicht und sicher zum Zweck gelangt). — S. 57 — S. 70. Herr Dir. Böhm demonstrirte einen neuen Zeitbestimmungs-Apparat für populäre Zwecke, den Universal-Gnomon. (Der betreffende Aufsatz ist ausführlich mitgetheilt und durch eine Zeichnung erläutert; wir glauben, dass der neue Apparat allerdings weitere Beachtung verdient; er wird von dem Herrn Mechaniker W. Spitra in Prag in der Grösse von 7 Zoll ausgeführt). — S. 78 — S. 87. Herr Nowak las eine grössere (in ausführlichem Auszuge mitgetheilte) Abhandlung: Ueber die Gewitter. — S. 104 — S. 107. Herr Böhm sprach über ein in Prag befindliches Original-Manuscript Tycho Brahe's: Canon Doctrinae Triangulorum. Das Manuscript ist dem auf der Prager Universitäts-Bibliothek befindlichen: Canon Doctrinae Triangulorum. Nunc primum a Georgio Joachimo Retico, in lucem editus, cum Privilegio Imperiali. Lipsiae. Ex officina Wolfgangi Gunteri. Anno M. D. L. L. beigefügt, umfasst 20 Blätter und hat folgenden Titel:

Triangulorum Planorum et Sphaericorum Praxis Arihmetica. Qua maximus eorum praesertim in Astronomicis usus compendiose explicatur. Tycho Brahe Calend. Januar. 1591. In Trigono Invenies satagit quae docta Mathesis Ille aperit, clausum quicquid Olympus habet. A. C. 1595. 13. Cal. Xbris.

Nach den Mittheilungen, welche Herr Böhm aus diesem, eine Zusammenstellung der zu jener Zeit bekannten Auflösungsformeln und eigenthümliche Beweismethoden, die mit den jetzigen wenig gemein haben, enthaltenden Manuscript macht, scheint dasselbe allerdings von nicht geringem Werthe zu sein, und dürfte eine vollständige Publication desselben zu wünschen sein, wodurch die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften gewiss den Dank der Mathematiker erwerben würde. Das Exemplar dieses „Canons", in dem dieses Manuscript sich befindet, ist aus Tycho's

Nachlasse im Jahre 1642 an das Jesuiten-Collegium zu Prag und später, nach Aufhebung der Jesuiten, an die „Bibliotheca Mathematica" übergegangen, welche letztere seiner Zeit in die Bibliothek der königl. Akademie (nun k. k. Universitäts-Bibliothek) einverleibt worden. Auf dem Titel steht unten mit deutlicher Hand geschrieben:

„Vide in fine Dogmata Tychonis Brahe m. p. scripta".

Indem ich diese Nummer des Literarischen Berichts schliesse, beeile ich mich die Leser noch aufmerksam zu machen auf den mir so eben zugegangenen:

Catalogo di Manoscritti ora posseduti da D. Baldassarre Boncampagni, compilato da Enrico Narducci. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata. Num°. 211 A. 1862. 8°.

Dieser für die Literatur der Mathematik u. s. w. unbedingt sehr wichtige Catalog ist alphabetisch geordnet und enthält auf 176 Seiten 368 Nummern; er wird dadurch noch wichtiger, dass alle Manuscripte sorgfältig beschrieben sind und ihr Inhalt sehr genau und vollständig angegeben ist. Ausserdem ist ein „Appendice" beigefügt, welcher mehrere auf einzelne Manuscripte bezügliche besondere Aufsätze enthält, unter denen sich auch einer von Herrn Woepcke befindet. Zwei Indices: „Indice alfabetico degli autori e traduttori i cui scritti trovansi nei codici indicati nel presente catalogo" und „Indice alfabetico delle persone menzionate nelle pagine 1—176, 179—200 del presente volumine" beschliessen das literarisch-historisch wichtige Werk, für dessen Publication wir den Herren Boncompagni und Narducci besonderen Dank zollen; auch die Vorrede des Letzteren enthält eine grosse Menge der interessantesten und wichtigsten literarischen Notizen. G.

Literarischer Bericht
CLV.

Unterrichtswesen.

Personal-Stand des königlich-böhmischen Polytechnischen Landes-Instituts in Prag und Ordnung der öffentlichen, ordentlichen und ausserordentlichen Vorlesungen an demselben im Studienjahr $18^{62}/_{63}$. Prag (Gottlieb Haase Söhne). 1862. 4°.

Aus dieser Schrift, für deren Uebersendung wir verbindlichst danken, gewinnt man eine sehr deutliche Anschauung von der Einrichtung des polytechnischen Instituts in Prag*), und wir empfehlen dieselbe daher einem Jeden, der diese ausgezeichnete Lehranstalt näher kennen lernen will. Hier können wir nur in der Kürze Folgendes bemerken. Wie bei der berühmten polytechnischen Schule in Carlsruhe ist auch hier in sehr zweckmässiger Weise ein vorbereitender Jahrgang eingerichtet. Die Vorlesungen auf dem eigentlichen polytechnischen Institut betreffen: Elementar-Mathematik, Höhere Mathematik, beschreibende Geometrie, Physik, Naturgeschichte und Waarenkunde, Geographie, Paläontologie, Allgemeine Chemie, Praktische Geometrie mit Feldmessübungen (niedere und höhere Geodäsie), Land-, Wasser- und Strassenbaukunst und Bauökonomie, Mechanische Technologie, Chemische Technologie, Analytische Chemie und Löthrohrprobirkunst, Landwirthschaftslehre, Verwaltungskunde der Landgüter, Agrikulturchemie, Forstwissenschaft, Industriestatistik, Böhmische Sprache, Englische Sprache, Französische Sprache, Italienische

---

*) Höhere technische Lehranstalten besitzt Oesterreich in **Wien**, **Prag**, **Lemberg**, **Brünn**, **Ofen** und **Gratz**.

Sprache, Russische und Serbische Sprache, Stenographie, technisches Modelliren. Der vorbereitende Jahrgang umfasst Elementar-Mathematik, Experimental-Physik, Naturgeschichte aller drei Reiche, Aufsatzlehre, Vorbereitendes technisches Zeichnen und Projectionslehre. Für die Physik besteht ein deutscher und ein böhmischer Cursus, eben so für beschreibende Geometrie und Industriestatistik, und auch für die Elementarmathematik soll neben der deutschen noch eine böhmische Abtheilung eingerichtet werden. Reiche Sammlungen, Kabinete und Werkstätten stehen dem Institut zu Gebote. — Die statistischen Nachweisungen über die Studirenden zu Anfang des Studienjahres 1861—62 sind ausserordentlich vollständig, genau und interessant. Die Gesammtzahl derselben betrug 815, einschliesslich 68 Schüler des Vorbereitungsjahrgangs. Der grössten Anzahl von Hörern erfreuten sich die Elementar-Mathematik (227) und die Physik (267). Die Anzahl der Lehrer und Beamten ist 40, wovon zur Zeit nur ein Paar Stellen unbesetzt sind, nämlich die Docentenstelle für Elementar-Mathematik mit böhmischer Unterrichtssprache und zwei Dienerstellen. Beigegeben sind: 1. Disciplinar-Vorschriften für die Studirenden; 2. Bestimmungen über die Aufnahme der Hörer des polytechnischen Instituts und der Schüler des Vorbereitungs-Jahrgangs; 3. Stiftungen am polytechnischen Institut. Man vergl. Literar. Ber. Nr. CIX. S. 7. G.

Turin, 12. Novbr. 1862. Die officielle Zeitung enthält ein Decret über die Gründung technischer Lehranstalten in Bergamo, Bologna, Brescia, Cagliari, Caltanisetta, Carrara, Catania, Cremona, Messina, Neapel, Palermo, Portomauricio und Vigevano. — Man sieht hieraus in der erfreulichsten Weise, wie kräftig und schnell das neue Italien, so wie im gesammten Unterrichtswesen, insbesondere auch auf dem Gebiete des technischen Unterrichts vorzuschreiten bemüht ist. In Turin selbst, und gewiss auch noch in anderen Städten, besteht schon längst ein höheres technisches Institut.

Geometrie.

Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane. Pel Dr. Luigi Cremona, Professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna. Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani. 1862. 4°.

Es sind in neuerer Zeit so viele Untersuchungen über die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Curven angestellt, und so viele solcher grösstentheils sehr merkwürdiger Eigenschaften gefunden worden, dass es für den, der sich nicht ausschliesslich oder wenigstens vorzugsweise mit diesem Gegenstande beschäftigt, ungemein schwer ist und immer schwerer wird, sich mit demselben bekannt zu machen, bei dem fast täglichen Fortschritt bekannt zu erhalten und die Uebersicht nicht zu verlieren. Dazu kommt noch, dass diese Untersuchungen bisher keineswegs nach einer einheitlichen Methode angestellt worden sind, indem man bei denselben theils den rein geometrischen, theils den analytischen Weg betreten hat. Wir halten es daher für ein sehr grosses Verdienst um die Wissenschaft, dass Herr L. Cremona eine leicht übersichtliche systematische Darstellung der genannten Untersuchungen, wenigstens rücksichtlich der ebenen Curven, in dem vorliegenden schönen Werke geliefert, und sich dabei als einer einheitlichen Methode der rein geometrischen Methode bedient hat, wodurch das Interesse nur erhöht wird, da bei diesen allgemeinen Untersuchungen die genannte Methode bei grosser Eleganz jedenfalls besondere Befriedigung gewährt. Ja, man kann sagen, dass Herr L. Cremona ein wirkliches Elementarwerk über die allgemeinen Eigenschaften der ebenen Curven geliefert hat, zu dessen Verständniss kaum mehr als die gewöhnlichen Kenntnisse der ebenen Geometrie erforderlich sind. Noch mehr wird das Verständniss des ganzen Werks dadurch erleichtert, dass in der ersten Section die fundamentalen Principien entwickelt worden sind, welche zwar aus der gewöhnlichen sogenannten neueren Geometrie wenigstens theilweise bekannt sind, hier aber, mit Rücksicht auf den vorliegenden speciellen Zweck, auf theils neue Weise und — wie, um nur eins anzuführen, z. B. die Theorie der Involution nach der Généralisation de la théorie de l'involution von Jonquières — in verallgemeinerter Gestalt dargestellt worden sind. Dass Herr L. Cremona seinen Gegenstand, so wie derselbe in einer grossen Menge einzelner Abhandlungen jetzt vorliegt, sehr nahe erschöpft hat, sieht der Kundige aus der grossen Menge beigefügter sehr schätzenswerther literarischer Nachweisungen, die zugleich des Hrn. Vfs. weit ausgebreitete Kenntniss des ganzen betreffenden Feldes und die sorgfältigste und eifrigste Benutzung aller vorhandenen Quellen auf das Deutlichste bekunden. War schon grosser Scharfsinn und ungemeiner Fleiss erforderlich, um die grosse Anzahl theilweise nur vereinzelt dastehender Sätze in ein so schönes und wohlgegliedertes System zu bringen, wie es

hier vorliegt: so konnte es doch auch nicht fehlen, dass der scharfsinnige Herr Verfasser dabei auch auf manche interessante und wichtige neue Sätze geführt wurde, die vorzüglich in der zweiten Section sich finden dürften. Sollen wir nun unser Urtheil in der Kürze noch im Allgemeinen aussprechen, so würden wir dasselbe in den Worten zusammenfassen: dass wir das vorliegende schöne Werk für ein vortreffliches, sehr vollständiges, in seiner Art jetzt einzig dastehendes Lehrbuch der rein-geometrischen Theorie der ebenen Curven halten, durch welches ein Jeder in den Stand gesetzt wird, sich mit Leichtigkeit und grosser Befriedigung eine vollständige Kenntniss des betreffenden Gegenstandes zu verschaffen. Der Herr Verfasser verdient für die Publication dieses Werks jedenfalls den grössten Dank, und wir würden eine sofortige Uebersetzung desselben in's Deutsche für ein überaus verdienstliches Unternehmen und eine wahre Bereicherung unserer Literatar halten*). Eine vollständigere Angabe des Inhalts, wie wir sie nachstehend geben, scheint uns bei einem solchen Werke von selbst geboten:

Prefazione. **Sezione I.** Principii fondamentali. I. Del rapporto anarmonico. II. Projettività delle punteggiate e delle stelle. III. Teoria de' centri armonici. IV. Teoria dell' involuzione. V. Definizioni relative alle linee piane. VI. Punti e tangenti communi a due curve. VII. Numero delle condizioni che determinano una curva di dato ordine o di data classe. VIII. Porismi di Chasles e teorema di Carnot. IX. Altri teoremi fondamentali sulle curve piane. X. Generazione delle lineo piane. XI. Costruzione delle curve di second' ordine. XII. Costruzione della curva di terz' ordine determinata da nove punti. — **Sezione II.** Teoria delle curve polari. XIII. Definizione e proprietà fondamentali delle curve polari. XIV. Teoremi relativi ai sistemi di curve. XV. Reti geometriche. XVI. Formole di Plücker. XVII. Curve generate dalle polari, qnando il polo si muova con legge data. XVIII. Applicazione alle curve di second' ordine. XIX. Curve descritte da un punto, le indicatrici

*) Da das Werk in seiner jetzigen Ausstattung nur 16 Bogen in gross Quart umfasst, so würde die Herstellung einer Uebersetzung keine grossen Kosten erfordern und kein sehr grosses Unternehmen von dem buchhändlerischen Standpunkte aus sein, welches wir nur bemerken, um zu einem solchen von uns sehr gewünschten Unternehmen noch mehr zu ermuntern, da wir wohl wissen, dass unsere deutschen Buchhändler vor grossen Unternehmungen jetzt leicht zurückschrecken.

del quale variino con legge data. XX. Alcune proprietà della curva Hessiana e della Steineriana. XXI. Proprietà delle seconde polari. — **Sezione III.** Curve del terz' ordine. XXII. L'Hessiana e la Cayleyana di una curva del terz' ordine. XXIII. Fascio di curve del terz' ordine aventi i medesimi flessi. XXIV. La curva del terz' ordine considerata come Hessiana di tre diverse reti di coniche.

Möge dem von uns hochgeachteten Verfasser Anerkennung im reichlichsten Maasse und in der weitesten Ausdehnung für dieses so verdienstliche Werk zu Theil werden! G.

Sulla trasformazione geometrica delle figure, ed in particolare sulla trasformazione iperbolica, di **G. V. Schiaparelli**. Torino. Stamperia Reale. 1862. 4°.

Herr Schiaparelli, der Nachfolger des vor Kurzem verstorbenen berühmten Carlini in der Direction der Sternwarte zu Mailand, welcher mit gleichem Eifer und gleichem Geschick seine Kräfte der Astronomie und der Geometrie widmet, hat so eben die Wissenschaft mit der obigen interessanten, in das Gebiet der analytischen Geometrie gehörenden Schrift bereichert, welche wir unseren Lesern recht sehr zur Beachtung empfehlen, und mit welcher wir dieselben im Folgenden etwas näher bekannt machen wollen. Nach einer interessanten historischen Einleitung charakterisirt Herr Schiaparelli auf S. 8. ff. seinen Zweck ganz im Allgemeinen auf folgende Art.

Wenn $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve in der Ebene ist, und zwischen den Coordinaten x, y und den neuen Coordinaten ξ, η zwei Gleichungen von der allgemeinen Form

$$f'(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad f''(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad . \; . \; . \; \text{(I)}$$

gegeben sind; so werden sich mittelst dieser Gleichungen sowohl x, y durch ξ, η, als auch umgekehrt ξ, η durch x, y ausdrücken lassen, und die Punkte (xy) und $(\xi\eta)$ können einander entsprechende Punkte genannt werden. Führt man aber die Ausdrücke von x, y durch ξ, η in die Gleichung $F(x, y) = 0$ ein, so erhält man eine Gleichung zwischen ξ, η von der allgemeinen Form $\Phi(\xi, \eta) = 0$, durch welche eine neue Curve charakterisirt wird, die als die stetige Folge der den Punkten (xy) entsprechenden Punkte $(\xi\eta)$ zu betrachten ist. Von den beiden in der vorhergehenden Beziehung zu einander stehenden Curven wird die durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ charakterisirte die primitive, die durch die Gleichung $\Phi(\xi, \eta) = 0$ charakterisirte die transfor-

mirte genannt. Ist die primitive Curve eine Curve im Raume, so müssen natürlich zwischen den Coordinaten x, y, z und ξ, η, ζ drei Gleichungen wie (1) gegeben sein; das Verfahren bleibt aber im Allgemeinen und Wesentlichen ganz dasselbe. Die Gleichungen (1) können natürlich nach sehr verschiedenen Gesetzen gebildet werden; als Grundlage fruchtbarer Untersuchungen zu dienen, werden sie aber nur geeignet sein, wenn ihre Auflösung in bestimmter und allgemeiner Weise möglich ist. Der Herr Verfasser betrachtet nun vorzugsweise die drei folgenden Fälle:

I.

$$x = G'\xi + H'\eta + K', \quad y = G''\xi + H''\eta + K'';$$

II.

$$x = \frac{G'\xi + H'\eta + K}{Q\xi + R\eta + S}, \quad y = \frac{G''\xi + H'' + K''}{Q\xi + R\eta + S};$$

III.

$$x = \frac{M\xi^2 + N\xi\eta + P\eta^2 + G'\xi + H'\eta}{M\xi^2 + N\xi\eta + P\eta^2 + Q\xi + R\eta}, \quad y = \frac{M\xi^2 + N\xi\eta + P\eta^2 + G''\xi + H''\eta}{M\xi^2 + N\xi\eta + P\eta^2 + Q\xi + R\eta},$$

und nennt diese drei Transformationen nach der Reihe die l i n e a r e, die h o m o g r a p h i s c h e und die c o n i s c h e. Alles dieses wird späterhin auch auf den Raum überhaupt ausgedehnt, und diese drei Transformationen werden ausführlich untersucht. Rücksichtlich der conischen Transformation namentlich zeigt der Herr Verfasser, dass dieselbe drei wesentlich verschiedene Fälle unter sich begreift, die nach gewissen Transformationen in der einfachsten Form durch die Formeln:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2};$$

$$x = \frac{\xi}{\xi . \eta} = \frac{1}{\eta}, \quad y = \frac{\eta}{\xi . \eta} = \frac{1}{\xi};$$

$$x = \frac{\xi}{(\xi + \eta)^2}, \qquad y = \frac{\eta}{(\xi + \eta)^2}$$

dargestellt, und nach der Reihe die c y c l i s c h e, h y p e r b o l i s c h e und p a r a b o l i s c h e Transformation genannt werden. Die Leser werden aus diesen wenigen Bemerkungen wenigstens die allgemeine Grundlage der Untersuchungen des Herrn Verfassers erkennen; auf weitere Einzelnheiten einzugehen, gestattet die Natur dieser literarischen Berichte nicht. Wir können im Allgemeinen nur noch hemerken, dass die in Rede stehenden Transformationen

ungemein fruchtbar an den interessantesten Folgerungen sind, und zu einer sehr grossen Anzahl der merkwürdigsten, theils schon bekannter, theils unbekannter geometrischer Sätze führen, wobei auch noch besonders hervorgehoben werden muss, dass der Herr Verfasser gezeigt hat, wie mehrere der in der Einleitung besprochenen älteren besonderen geometrischen Transformationen unter diesen allgemeinen Transformationen als besondere Fälle enthalten sind. Wir halten daher diese Schrift in jeder Beziehung für eine sehr interessante und wichtige Erscheinung auf dem Gebiete der neueren mathematischen Literatur, und wünschen sehr, dass derselben auch in Deutschland ganz die Beachtung gewidmet werde, welche sie in so hohem Grade verdient, wobei wir nur bedauern müssen, dass der Raum uns hier nicht erlaubt hat, noch weiter auf dieselbe einzugehen. Ein Jeder wird sie mit besonderem Interesse lesen, und mit hoher Achtung vor dem Herrn Verfasser von ihr scheiden. G.

Tetraedrometrie von Dr. Gustav Junghann. Erster Theil: Die Goniometrie dreier Dimensionen; mit 9 lithographirten Tafeln. Gotha. Thienemann 1862. XVI und 142. S. 8.

Der Aufforderung des geehrten Herrn Herausgebers des Archivs, in demselben eine kurze Anzeige des vorliegenden Buches zu geben, komme ich desto lieber nach, als ich den Verfasser desselben vor mehr als 30 Jahren zu meinen Zuhörern gezählt zu haben mir zur Ehre rechne. Die Schrift gehört nämlich, meiner innigen Ueberzeugung nach, sowohl wegen des schönen und fruchtbaren ihr zu Grunde liegenden Gedankens, als wegen der Sorgfalt und Treue, mit welcher derselbe verfolgt und ausgebeutet worden ist, zu den beachtenswerthesten der neueren Zeit, und die hier begonnenen Untersuchungen werden, da sie ein neues Element in die geometrische Rechnung einführen, wenn mich nicht Alles täuscht, bald auch von Andern aufgenommen werden. Ich will nun, so kurz als möglich, angeben, um was es sich handelt. Der Verfasser ging von der Bemerkung aus, dass von den fünf verschiedenen Grundformen räumlicher Ausdehnung: Linie, Fläche, Körper, Winkel und Ecke, die letzte bis jetzt noch nicht als selbständiges Element in den Bereich der rechnenden Geometrie gezogen worden ist. Um aber die Ecke als selbständiges Gebilde in die Rechnung einführen zu können, kam es darauf an, Functionen aufzufinden, die zu den Ecken in ähnlicher Beziehung stehen, und durch welche die Ecken in derselben Weise für die Rechnung repräsentirt werden, wie die Win-

kel durch ihre trigonometrischen Functionen. Eine solche Function, nämlich den Exponenten des Verhältnisses der von dem (dreiseitigen) Eckenraum durch eine Ebene gleichschenklig abgeschlossenen Pyramide zu der rechtwinkligen gleichschenkligen Pyramide von derselben Seitenkante, nennt der Verfasser den **Eckensinus**, und im ersten Capitel werden nun die verschiedenen Arten aufgestellt, wie derselbe durch je drei Bestimmungsstücke der dreiseitigen Ecke ausdrückbar ist. — Wenn nun aber zu den Kanten einer dreiseitigen Ecke ein vierter vom Scheitelpunkt ausgehender Strahl tritt, der mit je zwei Kanten eine neue Ecke bestimmt, oder wenn die drei Ebenen einer Ecke von einer vierten geschnitten werden, die mit je zweien derselben neue Ecken bildet, so treten Systeme auf, deren Elemente die Ecken sind, und in den drei folgenden Capiteln werden nun die Gleichungen aufgestellt, welche für diese vierstrahligen und vierebenigen Eckensysteme stattfinden. In diesen Gleichungen tritt uns sogleich eine auffallende Analogie mit den Gleichungen für die gewöhnlichen Winkelfunctionen, also mit denen für $\sin(\alpha \pm \beta)$ u. s. w. entgegen. — Das 5te und 6te Capitel behandelt dann auf gleiche Weise die fünfstrahligen und die fünfebenigen Eckensysteme, und diese Gleichungen entsprechen dann wieder denen, welche für die Winkelsysteme von vier in einer Ebene liegenden Strahlen, so wie für das vollständige Vierseit aufzustellen sind. Das 7te und 8te Capitel betrachtet endlich noch andere Functionen ausser dem Eckensinus, und zeigt, in welchem Zusammenhange unter einander und mit dem Eckensinus sie stehen.

Eine ausführlichere Angabe des reichen Inhaltes der Schrift dürfte wohl kaum ohne tieferes Eingehen in die Bezeichnungsweise möglich sein. Dass bei einer so neuen Untersuchung eine grosse Menge neuer Resultate zu Tage kommen, wird sich jeder Einsichtige selbst sagen; aber man ist doch auch anderseits erfreut, auf diesem neuen Wege auf Resultate zu stossen, zu denen andere Mathematiker bereits früher, zum grossen Theil auf grossen Umwegen gelangt waren, auf Umwegen, weil sie eben die Ecken nicht als Grundform räumlicher Ausdehnung betrachteten, sondern die bestimmenden Elemente derselben, die Winkel, erst einführen und dann wieder eliminiren mussten. So z. B. findet der Verfasser mehrere von Feuerbach in seinem „Grundriss zu analytischen Untersuchungen über die dreiseitige Pyramide", von Carnot in dem „Mémoire sur la relation, qui existe entre les dimensions respectives de cinq points pris dans l'espace", u. A. zum Theil als Corollarien allgemeinerer Sätze. — Hiernach glaube ich annehmen zu dürfen, dass Jeder, der diese Schrift studirt, mit

mir dem Erscheinen des zweiten Theiles mit Begierde entgegengesehen wird. Bremen. H. F. Scherk.

Astronomie.

Kalender für alle Stände. 1863. Herausgegeben von Karl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold. 8°.

Wir haben Liebhabern der Astronomie diesen Kalender in unseren Anzeigen der früheren Jahrgänge (Literar. Ber. Nr. CXL. S. 9. und Nr. CXLVIII. S. 7.) als ein für ihre Zwecke sehr brauchbares populäres astronomisches Jahrbuch empfohlen, welches sie mit allen bemerkenswerthen Himmelserscheinungen, auf welche sie in dem betreffenden Jahre ihre Aufmerksamkeit zu richten haben, bekannt macht. Auch die Ephemeride der Sonne, des Mondes und der Planeten reicht für den in Rede stehenden Zweck sehr wohl aus, und kann selbst Lehrern an Schulen empfohlen werden. Alles dieses gilt auch von dem vorliegenden Jahrgange, welcher im Ganzen völlig dieselbe Einrichtung wie seine Vorgänger hat, so dass wir uns also in dieser Rücksicht auf unsere früheren Anzeigen beziehen können. Rücksichtlich der äusseren Einrichtung bemerken wir nur, dass der vorliegende Jahrgang mit Papier durchschossen ist, und daher zugleich die Stelle eines Notizbuchs vertreten kann. Die Uebersicht des Planetensystems ist wieder in der musterhaftesten Vollständigkeit gegeben, wie man sie schwerlich überhaupt anderwärts finden dürfte; und gleich vollständige Nachrichten über die neueren Entdeckungen fehlen auch in diesem Jahrgange keineswegs. Ausserdem enthält derselbe zwei interessante Aufsätze: „Geschichte der beobachtenden Astronomie nach Grant (Fortsetzung und Schluss zum Kalender 1861)" und „Galilei" eine ziemlich vollständige Lebensbeschreibung des berühmten Mannes nach A. v. Reumont, dessen Untersuchungen zu manchen von den bisherigen Erzählungen abweichenden Resultaten geführt haben, weshalb dieser Aufsatz jedenfalls besonderes Interesse für sich in Anspruch zu nehmen geeignet ist. S. 118. heisst es z. B.: „Die drastischen Erzählungen, die spätere Schriftsteller von Galilei's Leidensgeschichte gaben, entbehren alles Grundes; Galilei hatte eben so wenig Torturen auszustehen, als er wenigstens öffentlich unwandelbar fest hielt an der von ihm erkannten Wahrheit. Die Worte: e pure si muove, mit denen man ihn zu einem Typus des wissenschaftlichen Märtyrthums machte, sind unverbürgt. Auch nach gefäll-

tem Urtheil hatte er kein eigentliches Gefängniss zu erdulden, und wenn er gleich bis zu seinem Ende gewisse, allerdings in die Länge peinigende Beschränkungen seiner persönlichen Freiheit sich gefallen lassen musste, so muss man doch der Mässigung seiner Richter desto mehr Gerechtigkeit widerfahren lassen, je mehr die Zeit, in der sie wirkten, sich jeder Apologie entzieht." Die Inquisition mag es also hiernach doch nicht so schlimm gemacht haben, wie gewöhnlich erzählt wird. — Wir wünschen sehr, dass das vorliegende Büchlein, welches in seiner Anspruchslosigkeit doch recht viel Nützliches für die oben angegebenen Zwecke, auch für Lehrer an Schulen, und manche interressante und lehrreiche Mittheilungen enthält, sich immer mehr Freunde erwerben möge. G.

Nautik.

Reise der österreichischen Fregatte Novara um die Erde in den Jahren 1857, 1858, 1859 unter den Befehlen des Commodore B. von Wüllerstorf-Urhair. Nautisch-physikalischer Theil. I. Abtheilung. Geographische Ortsbestimmungen und Fluthbeobachtungen. Mit drei beigegebenen Curskärtchen und einer Beilage von sieben lithographirten Plänen. Mittheilungen der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. I. Band, 1. Heft. Wien. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei. 1862. 4⁰. In Commission bei Carl Gerold's Sohn.

Von der k. k. hydrographischen Anstalt in Triest, die vom Herrn Professor Dr. Schaub dortselbst dirigirt wird, einer Anstalt, wie man sie jeder Marine-Verwaltung wünschen möchte, und die wohl jetzt in ihrer Art und der ihr gegebenen Ausdehnung einzig dasteht, ist schon im Literar. Ber. Nr. CXLVIII. S. 10. ausführlicher Nachricht gegeben worden. Eine neue Publication dieser grossartigen Anstalt liegt jetzt vor uns. Es ist dies die Berechnung der auf der merkwürdigen Reise der Novara gemachten geographischen Ortsbestimmungen und Fluthbeobachtungen. Die Längenbestimmungen sind in überwiegender Mehrzahl durch Chronometer gemacht, zu welchem Behuf die Novara sieben Box-Chronometer und zwei Taschen-Chronometer an Bord hatte, von denen die zwei letzteren sich jedoch in ihren Gängen so unverlässlich zeigten, dass sie verworfen werden mussten. Zu den Breitenbestimmungen diente u. A. (s. S. 15.) ein ausgezeichneter Pistor'scher Theodolit. Unter den bestimmten Punkten werden Hauptstationen (St. Paul, Saoui, Condul, Singapore,

Cavite, Hongkong, Shanghai, Auckland, Papiete, Valparaiso) und Nebenstationen (Komios-Bucht, Novara-Bucht, Hafen Nongcovri, Galatheabucht, Insel Guam, Hafen Koan-Kiddi, Simpson-Inseln, Riff Bradley, Gower-Insel, Stewarts Inseln, Insel Sta. Anna, Avon-Inseln, Riff Bampton-Shoal) unterschieden. Die Berechnung ist augenscheinlich mit grosser Sorgfalt, Genauigkeit und umsichtiger Kritik angestellt, auch ist überall auf ältere Bestimmungen gehörig Rücksicht genommen worden. — Zur Anstellung der Fluthbeobachtungen diente ein auf S. 51. beschriebener besonderer Fluthmesser; sehr sorgfältige nnd ausgedehnte Beobachtungen dieser Art sind angestellt worden in St.-Paul, Carnicobar (Saoui-Bucht) Tahiti. Graphische Darstellungen, welche von dem Commandanten der Expedition, Herrn von Wüllerstorf-Urbair, mit grosser Sorgfalt ausgeführt worden sind, sind überall beigegeben und erhöhen das Interesse dieser Beobachtungen wesentlich. — Die Beobachtungen und Rechnungen für die Ortsbestimmungen sind von dem Hydrographen Herrn Robert Müller unter Mitwirkung des Seecadetten Herrn Alexander Kalmár ausgeführt, die Fluthbeobachtungen sind von dem Seecadeten Herrn Andreas Graf Borelli angestellt. Die Küstenaufnahmen, auf denen die beiliegenden sehr schönen und wichtigen sieben Karten (Insel St. Paul, Bucht von Saoui auf Carnicobar, Generalkarte der Nicobaren, Komios- (Arrow-) Bucht auf Carnicobar, Insel Tillangschong, Nangcovri-Hafen, St. Georgs-Canal, sämmtlich im indischen Ocean) beruhen, sind hauptsächlich von den Offizieren Herrn Eugen Kronowetter und Herrn Gustav Battlogg gemacht worden. Auch die drei Curskärtchen sind eine sehr dankenswerthe Beilage. Zwei weitere Abtheilungen dieses trefflichen und für Nautik und Geographie wichtigen, auch äusserlich in schwer zu übertreffender Weise ausgestatteten Werks, welches ebenso wie die ganze Novara-Expedition dem österreichischen Kaiserstaate und allen dabei betheiligten Personen zur grössten Ehre gereicht, sehen wir mit grossem Verlangen entgegen; dieselben werden die magnetischen und meteorologischen Beobachtungen der Novara-Expedition enthalten. G.

Physik.

Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente von G. Kirchhoff. Besonderer Abdruck aus den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Berlin. Zweite, durch

einen Anhang vermehrte Ausgabe. Mit drei Tafeln. Berlin. Dümmler's Verlagshandlung. 1862. 4°.

Die das Sonnenspectrum betreffenden berühmten Entdeckungen von Bunsen und Kirchhoff sind zwar bereits bekannt genug, indess wird die vorliegende Schrift, in welcher Kirchhoff sich weiter über dieselben, namentlich auch über die Art, wie die Versuche anzustellen sind, und über das dazu erforderliche Instrument, verbreitet, jedenfalls mit besonderem Danke aufzunehmen sein. In dem kurzen Vorwort sagt der Herr Verfasser: „Einer von den Zwecken, welche die Abhandlung verfolgt, ist der, den Weg anzugeben, auf welchem die chemische Beschaffenheit eines Theiles der Sonne, ihrer Atmosphäre nämlich, untersucht werden kann, und die Existenz einiger irdischen Elemente in derselben nachzuweisen". Demzufolge werden in dem ersten Abschnitt, welcher „das Sonnenspectrum" überschrieben ist, die Linien im Allgemeinen beschrieben, welche in dem durch ein Fernrohr betrachteten Sonnenspectrum sich zeigen, auch auf Taf. I. und Taf. II. (mit Rücksicht auf den zweiten Abschnitt) sehr schöne und genaue Zeichnungen davon geliefert, über welche eine in Millimeter getheilte Scala gesetzt ist, welche zunächst dazu dient, eine jede der gezeichneten Linien mit Leichtigkeit zu bezeichnen. Zugleich ist das zu den Beobachtungen erforderliche, von Steinheil in ausgezeichneter Weise angefertigte Instrument und sein Gebrauch sehr deutlich beschrieben und auf Taf. III. abgebildet. Der zweite Abschnitt ist überschrieben: „Die Spectren der chemischen Elemente", worin die Resultate der die Darstellung dieser Spectren betreffenden Versuche, die auch näher beschrieben werden, und worauf sich, wie schon bemerkt, auch die Zeichnungen auf Taf. I. und Taf. II. beziehen, in höchst lehrreicher und interessanter Weise, jedoch meistens nur mehr im Allgemeinen, dargelegt werden. In dem dritten, die Ueberschrift „Umkehrung der Flammenspectren" tragenden Abschnitte werden sehr merkwürdige Erscheinungen beschrieben und zu erklären versucht, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen können. Hervorheben müssen wir aber, dass der Herr Verfasser S. 11. sagt: „Nach diesen Thatsachen liegt die Annahme nahe, dass jedes glühende Gas ausschliesslich die Strahlen von der Brechbarkeit derer, die es selbst aussendet, durch Absorption schwächt, mit anderen Worten die Annahme, dass das Spectrum eines jeden glühenden Gases umgekehrt werden muss, wenn durch dasselbe Strahlen einer Lichtquelle treten, die hinreichend hell ist und an sich ein continuirliches Spectrum giebt". Einen sicheren Aufschluss darüber, in wie weit diese Annahme richtig ist, findet der Herr Ver-

fasser in einem theoretischen Satze, welcher im Anhange §. 3. S. 24. auf folgende Art ausgesprochen wird: „Das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen ist für alle Körper bei derselben Temperatur dasselbe. Für diesen Satz wird in dem Anhange, durch welchen sich die zweite Auflage vor der ersten auszeichnet, ein auf gewisse, in §. 1. klar ausgesprochene Annahmen gegründeter mathematischer Beweis gegeben. Die beiden letzten Abschnitte endlich sind überschrieben: „Chemische Beschaffenheit der Sonnenatmosphäre“ und „Physische Beschaffenheit der Sonne“. In dem ersten dieser beiden Abschnitte sagt der Herr Verfasser auf S. 13: „Die Beobachtungen des Sonnenspectrums scheinen mir hiernach die Gegenwart von Eisendämpfen in der Sonnenatmosphäre mit einer so grossen Sicherheit zu beweisen, als sie bei den Naturwissenschaften überhaupt erreichbar ist“, und späterhin auf S. 14. wird erwähnt, dass auch das Vorhandensein von Nickel in der Sonnenatmosphäre sehr wahrscheinlich ist; über Kobalt hält der Herr Verfasser sein Urtheil zurück; dagegen sind Gold, Silber, Quecksilber, Aluminium, Cadmium, Zinn, Blei, Antimon, Arsen, Strontium und Lithium in der Sonnenatmosphäre nicht sichtbar. Ein Theil der dunkeln Linien des Spectrums rührt nach dem Herrn Verfasser von einer Absorption in der Sonnenatmosphäre her. In dem zweiten der beiden oben erwähnten Abschnitte sagt der Herr Verfasser: „Um die dunkeln Linien des Sonnenspectrums zu erklären, muss man annehmen, dass die Sonnenatmosphäre einen leuchtenden Körper umhüllt, der für sich allein ein Spectrum ohne dunkle Linien und von einer Lichtstärke giebt, die eine gewisse Grenze übersteigt. Die wahrscheinlichste Annahme, die man machen kann, ist die, dass die Sonne aus einem festen oder tropfbar flüssigen in der höchsten Glühhitze befindlichen Kern besteht, der umgeben ist von einer Atmosphäre von etwas niedrigerer Temperatur“ eine Hypothese, die, mit ganz besonderer Rücksicht auf die Sonnenflecken, des Weiteren in sehr lehrreicher Weise besprochen wird, woraus man sieht, wie wichtig dieser ganze Gegenstand namentlich auch für die Astronomie ist. — Je schwieriger es ist, von einer so inhaltsreichen und wichtigen Schrift ganz in der Kürze eine auch nur näherungsweise richtige Anschauung zu geben: desto dringender müssen wir unsere Leser auf die Schrift selbst verweisen, mit der Versicherung, dass sie dieselbe mit hohem Interesse lesen und mit grosser Befriedigung von ihr scheiden werden.

Vermischte Schriften.

Upsala Universitets Årsskrift. 1861. Upsala, tryckt hos Edquist & K. 1861. 8°.

So wie einige andere, auch deutsche, Universitäten, giebt auch die berühmte Universität zu Upsala in sehr nachahmungswürdiger Weise Universitätsschriften heraus, deren Jahrgang 1861 in einem schön gedruckten, im Ganzen 916 Seiten umfassenden Bande vor uns liegt. Nach den Facultäten ist dieser Jahrgang in fünf Abtheilungen getheilt, nämlich: I. Theologie. II. Rechts und Staatswissenschaften. III. Medicin. IV. Philosophische Facultät und zwar: 1. Philosophie, Sprachwissenschaft und historische Wissenschaften. 2. Mathematik und Naturwissenschaft. Uns kann hier nur die letzte Abtheilung interessiren, welche mehrere sehr werthvolle Abhandlungen im Fache der Mathematik und Astronomie enthält, mit deren Titelangabe wir uns hier leider begnügen müssen. Zuerst enthält diese Abtheilung eine in das Gebiet der höheren Geometrie gehörende Abhandlung: Undersökning af några corresponderanda Curvor, af **H. T. Daug**, auf welche wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen. Hierauf folgt eine astronomische Abhandlung: Ephemerider for Asteroiden Alexandra (54) 1862, af **H. Schultz**, welche nicht bloss eine sehr genau berechnete Ephemeride des genannten Asteroiden enthält, sondern auch eine vollständige Darlegung der angewandten analytischen Formeln und Rechnungsvorschriften liefert, wodurch dieselbe auch im Allgemeinen für die Ausführung aller Rechnungen dieser Art sehr lehrreich und werthvoll ist. Den Beschluss macht C. A. v. Steinheils justeringsmethod för parallaktiska instrument af egen coustruction. Bearbetning af **H. Schultz**, welche gleichfalls sehr instructive und werthvolle Abhandlung die von Steinheil in den Gelehrten Anzeigen der Münchener Akademie. 2. April 1860 angegebene Methode betrifft.

Beigegeben ist diesen Universitäts-Schriften die Chronik der Universität für $18^{60}/_{61}$ (Programm för Rectors-ombytet 1861 af **F. F. Carlson**), worin auch genauere Nachrichten über die reichen Sammlungen und Institute der Universität gegeben sind, unter denen uns vorzüglich die sehr werthvollen, ziemlich ausführlichen Nachrichten über die trefflich ausgestattete Universitäts-Sternwarte auf S. 12—S. 14 (am Ende) interessirt haben, wo auf S. 13 auch einer reichen Schenkung des verstorbenen verdienstvollen Professors der Astronomie Bredman gedacht wird. Den Schluss des Buchs macht das Verzeichniss der öffentlichen Vorlesungen für 1861.

Wir wüssten nicht, dass ein so reich ausgestatteter und zugleich so ausgedehnter Jahrgang von Universitätsschriften von anderen, namentlich deutschen Universitäten uns schon vorgekommen wäre, so verdienstlich diese Schriften auch sind, und so dankbar wir dieselben jederzeit aufgenommen haben. Besonderer Dank für die Publication dieser, wie schon gesagt, in einem starken, schön ausgestatteten Bande uns vorliegenden Universitätsschriften, von denen die einzelnen Abtheilungen aber auch abgesondert zu haben sind, gebührt gewiss auch der Universität in Upsala. G.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Ber. CLIII. S. 7.)

1862. I. Heft II. Lamont: Ueber die tägliche Oscillation des Barometers. (Diese ausführliche Abhandlung zur Erklärung des vielbesprochenen Gegenstandes füllt nebst den ihr beigegebenen Tafeln das ganze vorliegende Heft. Wir gestehen, dass wir dieselbe mit besonderem Interesse gelesen haben. Jedenfalls gebührt der in ihr gegebenen Erklärung vor den meisten sonstigen Erklärungsversuchen der wesentliche Vorzug, dass dieselbe, ausgehend wie jede strenge Erklärung einer Naturerscheinung von gewissen bestimmten Voraussetzungen, die man wohl zuzugeben geneigt sein kann, einer strengeren mathematischen Fassung und Darstellung fähig ist und an vielfache Beobachtungen sich anschliesst, also nicht besteht in einem blossen vagen, wenn auch zuweilen in gewisser Beziehung, wenn man so sagen darf, ganz geistreichen, oder wenigstens geistreich klingen sollenden, Gerede, wie man es leider auf dem Felde der Meteorologie noch häufig genug antrifft, worauf sich aber Herr Lamont nie einlässt, was uns bei seinen meteorologischen Untersuchungen immer besonders angesprochen hat. Dies ist auch bei der vorliegenden Abhandlung der Fall, welche wir daher unseren für Meteorologie sich interessirenden Lesern recht sehr zur Beachtung empfehlen.)

1862. I. Heft III. Schönlein. Fortsetzung der Beiträge zur näheren Kenntniss des Sauerstoffs. S. 165. — v. Kobell: Ueber Asterismus und die Brewster'schen Lichtfiguren (mit drei Tafeln). S. 199. (Zwei interessante, wenn auch nicht unmittelbar in das Gebiet des Archivs gehörende Abhandlungen, besonders die letztere, welche einen wichtigen mineralogischen oder krystallographischen Gegenstand bespricht).

1862. I. Heft IV. Pettenkofer: Die Bewegung des Grundwassers in München vom März 1856 bis März 1862 (mit

einer Tafel). S. 272. (Interessante an 4, später 5 Brunnen in München angestellte Beobachtungen, wobei auch eine lehrreiche Anleitung zur Anstellung solcher Beobachtungen gegeben wird. Eine graphische Darstellung der Beobachtungen ist beigegeben.) — Nägeli: Beobachtungen über das Verhalten des polarisirten Lichts gegen pflanzliche Organisation (mit einer Tafel). S. 290.

1862. II. Heft I. Pettenkofer: Ueber die Bestimmung des Wassers bei der Respiration und Perspiration. S. 56.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLIII. S. 8.)

Juni 1862. Hagen: Ueber das Verhalten der Meereswellen beim Auflaufen auf Untiefen und auf den Strand. S.313—S.316. — Riess: Ueber die Abhängigkeit elektrischer Ströme von der Form ihrer Schliessungen. S.343—S.362. — Dove: Eine neue Methode die Intensität der Interferenzfarben zu bestimmen. S.362—S.363. — Kronecker: Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. S. 263 — S.372. — Du Bois-Reymond: Ueber den zeitlichen Verlauf voltaelektrischer Inductionsströme. S. 372 — S.404. — Kummer: Ueber ein Modell der Krümmungsmittelpunktsfläche des dreiaxigen Ellipsoids. S.426—428.

Juli 1862. Quincke: Experimentelle Untersuchung der optischen Strahlenbündel, mitgetheilt von Herrn Kummer. S.498—S.509. — Encke: Die Tafeln der Melpomene. S.536—S.537. — Dove: Ueber die Unterschiede der bei sehr feuchtem Scirocco und heftigen Niederschlägen erfolgenden Staubfälle und den trockenen Staubwinden der afrikanischen Küste. S. 542. (Abhandlung nicht mitgetheilt).

August 1862. Du Bois-Reymond: Ueber die ungleiche Stärke des Stromes je nach der Richtung in der er durch das Elektrodenpaar geht. S. 560. (Abhandlung nicht mitgetheilt). — Magnus: Ueber die Absorption der Wärme durch Luftschichten von verschiedener Dicke. S.569—S.572. — Magnus: Ueber die Absorption der Wärme durch feuchte Luft. S.572—S.574.

Literarischer Bericht
CLVI.

Arithmetik.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung mit Anwendungen. I. Theil. Differential-Rechnung mit 69 Figuren im Texte von M. Stegemann. Hannover. Helwing'sche Hof-Buchhandlung. 1862. 8°.

In dieser Schrift tritt bei der Darstellung der Differential-Rechnung dem in den Geist der neueren strengen Analysis wahrhaft eingeweihten Leser ein Gemisch der älteren, jetzt als antiquirt zu betrachtenden (sogenannten) Begründungsweise, wo die alte Reihenentwickelung nach der Methode der unbestimmten Coefficienten in der ungenirtesten Weise in Anwendung gebracht wird, mit an die neuere strenge Begründung erinnernden, und derselben entlehnten, freilich oft in wenig genügender Form angestellten Betrachtungen entgegen. Dass aber gerade bei diesen Dingen eine solche Vermischung nur zur Unklarheit führt und den Anfänger in Widersprüche verwickeln muss, giebt wohl jeder Kenner der neueren Analysis ohne Weiteres zu. Auf eine eingehendere Kritik uns einzulassen, halten wir nicht für nöthig und lässt auch der beschränkte Raum unserer literarischen Berichte bei Schriften dieser Art nicht zu. Will man daher das obige Urtheil, weil wir es hier nicht ausführlicher begründen können, für ein blosses subjectives erklären: so müssen wir uns das schon gefallen lassen.

Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des In-

tégrales définies par D. Bierens de Haan. Publiée par l'Académie Royale des sciences à Amsterdam. Amsterdam, C. G. van der Post. 1862. 4°.

Herr Bierens de Haan hat dem sehr grossen Verdienst, welches er sich schon durch die Publication seiner schönen, im Literar. Ber. Nr. CXXVI. S. 1. angezeigten Tafeln der bestimmten Integrale erworben hat, ein neues nicht minder grosses Verdienst hinzugefügt durch die Herausgabe des obigen, 702 Seiten in gr. Quart umfassenden Werks. Wie der Titel besagt, ist dasselbe lediglich der Theorie der bestimmten Integrale gewidmet, und steht jedenfalls gegenwärtig in seiner Art einzig da, da die mathematische Literatur kein Werk besitzt, welches sich dem vorliegenden gleichstellen könnte, was namentlich Vollständigkeit und Strenge der Darstellung betrifft, in welcher letzteren Beziehung besonders hervorzuheben ist, dass das Werk ganz den von der neueren Analysis gestellten Anforderungen entspricht. Die bisher zur Entwickelung der bestimmten Integrale angewandten Methoden treten in sehr grosser Mannigfaltigkeit auf und stehen meistens sehr vereinzelt da, so dass es gewiss nicht geringe Schwierigkeiten hatte, diese Methoden unter gewisse allgemeine Gesichtspunkte zu bringen, welche aber, wie es uns scheint, von dem Herrn Verfasser so glücklich überwunden worden sind, wie es bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft überhaupt möglich sein dürfte. Um diese Methoden aber alle kennen zu lernen und zu sammeln, war eine von uns lebhaft bewunderte Literaturkenntniss nöthig, wie sie schwerlich viele Mathematiker in gleichem Maasse wie der Herr Verfasser besitzen dürften. In der ausgedehntesten Weise sind nun aber auch (in der dritten 504 Seiten umfassenden Abtheilung) die allgemeinen Methoden überall zu der Entwickelung besonderer bestimmter Integrale in Anwendung gebracht worden, wodurch diese Theorie zugleich der beste Commentar zu den „Tafeln" wird, auch zu mehrfachen Verbesserungen derselben Gelegenheit gegeben hat, und neben denselben gar nicht entbehrt werden kann; dass aber in der Hand eines so geschickten Mathematikers, wie Herr Bierens de Haan ist, diese Anwendungen der allgemeinen Methoden auch zu einer grossen Anzahl neuer Resultate führen mussten, braucht wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden; nach der eigenen Angabe des Herrn Verfassers wurden ungefähr 1260 schon in den Tafeln enthaltene bestimmte Integrale und 2130 neue Formeln erhalten, wodurch sich also auch schon von selbst die Nothwendigkeit einer baldigen neuen Ausgabe der Tafeln herausstellt. Wegen der schon gerühmten grossen Strenge und der

ganz im Sinne der neueren Analysis gehaltenen Darstellung, die uns ganz besonders in der ersten, der Entwickelung der allgemeinen Principien der Theorie der bestimmten Integrale gewidmeten Abtheilung in der lebhaftesten Weise angesprochen hat, kann dieses Werk namentlich auch jüngeren Mathematikern zum eifrigsten Studium nicht dringend genug empfohlen werden, die darin reiche Früchte zu ihrer tüchtigen Ausbildung und Befähigung zu eigenen wahrhaft strengen, neueren Ansprüchen genügenden Untersuchungen schöpfen werden. Schliesslich gestattet uns der Raum nur noch die folgende Angabe der Hauptabschnitte des Inhalts: Preface. — **Partie première.** Principes de la théorie des intégrales définies. — **Partie deuxième.** Formules de transformation générales. — **Partie troisième.** Évaluation des intégrales définies. Considérations préliminaires. — Section 1. Méthodes directes. — Section 2. Méthodes qui ramènent à des intégrales définies. — Section 3. Méthodes, qui ramènent à des intégrales définies doubles. — Section 4. Méthodes qui ramènent à des séries. — Section 5. Méthodes, qui ramènent à des équations différentielles. — Section 6. Méthodes pour déduire d'une intégrale définie connue d'autres intégrales définies. — Section 7. Méthodes particulières. (Emploi des intégrales de Fourier. Méthode de Cauchy, calcul des résidus. Méthodes diverses indirectes. Par des considérations de géométrie). — Additions et corrections.

Schwerlich würde die Herausgabe zweier so umfangreichen und kostspieligen Werke, wie die „Tables" und die „Théorie" sind, dem verehrten Herrn Verfasser möglich gewesen sein, wenn denselben nicht die Königlich niederländische Akademie der Wissenschaften in Amsterdam mit der grössten Liberalität Raum in der Sammlung ihrer Schriften, von denen beide Werke einen Theil ausmachen, gestattet hätte, wofür die Wissenschaft dieser hohen gelehrten Körperschaft zu dem grössten und wärmsten Danke verpflichtet ist.

Möge dem Herrn Verfasser Anerkennung seines Strebens, der Wissenschaft und ihren Jüngern durch so grossartige wissenschaftliche Arbeiten wahrhaft zu nützen, im reichsten Maasse zu Theil werden! G.

Geometrie.

La Frémoire's Sammlung von Lehrsätzen und Auf-

gaben der Elementar-Geometrie (Planimetrie und Stereometrie). Aus dem Fanzösischen übersetzt von Professor Kauffmann. Nach dem Tode des Uebersetzers durchgesehen und herausgegeben von Doctor C. G. Reuschle, Professor am Gymnasium zu Stuttgart. Mit circa 400 Abbildungen. Stuttgart. Gust. Hoffmann. Preis Rthlr. 1. 6.

Das französische Original hat bei der neuen Auflage im Jahre 1852 einen neuen Herausgeber, Herrn Catalan, gefunden, wobei es bedeutend erweitert und umgewandelt worden ist. Herr Catalan sagt in seiner Vorrede, er habe eine Menge von Aufgaben und Lehrsätzen, welche in allen geometrischen Lehrbüchern stehen, durch andere ersetzt, und überdiess, um die Sammlung zu einer eigentlichen Ergänzung der Elementargeometrie zu stempeln, eine Anzahl von Lehren eingeführt, wovon die meisten der sogenannten „neueren Geometrie" angehören. Man findet also in dieser Sammlung die Theorie der Transversalen, der Polaren, der harmonischen Theilung, der Potenzlinien, der Aehnlichkeitspunkte, der Punkte der mittleren Entfernungen, der isoperimetrischen Figuren, der windschiefen Polygone, der allgemeinen Eigenschaften der Polyeder, der reciproken Punkte und Geraden, der Polar-Ebenen, Potenz-Ebenen, der sphärischen Transversalen u. s. w. Besonderer Erwähnung verdienen mehrere interessante Probleme, wie die Construction des regulären Vielecks von 17 Seiten, die Transformation der Figuren, über das Volumen des Tetraeders, über die Berührungskugel von drei gegebenen Kugeln.

Der Herausgeber der Uebersetzung, Herr Professor Reuschle, bemerkt mit Recht, dass man zwar keine systematische Darstellung der sogenannten neueren Geometrie erwarten darf, sondern dass sich vielmehr die neueren Theorien als ungezwungene Anhänge altbekannter elementargeometrischer Sätze ergeben, so dass man durch dieses Buch in jene schönen Theorien ganz unvermerkt hineinkommt. Auch legt Herr Reuschle einen besonderen Werth auf die ausführliche Berücksichtigung der Stereometrie, indem unsere gangbaren Aufgabensammlungen sich meistens nur auf die Planimetrie einlassen, obgleich die Stereometrie der ungleich reichere Theil der ganzen Wissenschaft ist, mit welchem dieselbe erst so zu sagen reell und konkret wird. Mit vorstehender kurzen Anzeige hat der Unterzeichnete den Zweck, einem in seiner Art gediegenen Werke, welches in deutschen Kreisen, wie es scheint, wenig bekannt ist, eine weitere Verbreitung zu geben.

Dr. O. Böklen.

Praktische Geometrie.

Elemente der Vermessungskunde von Dr. Carl Maximilian Bauernfeind, Baurath und Professor der Ingenieur-Wissenschaften in München. Zweite Auflage. Erste und zweite Abtheilung. München. Cotta'sche Buchhandlung. 1862. 8⁰.

Es freut uns sehr, die Richtigkeit des von uns über die 1856—1858 erschienene erste Auflage dieses in vielfacher Beziehung empfehlenswerthen Buchs im Literar. Ber. Nr. CXXVII. S. 2. ausgesprochenen sehr günstigen Urtheils insofern bestätigt zu sehen, als schon jetzt eine neue Auflage nöthig geworden ist. In der ganzen Anlage ist diese neue Auflage ungeändert geblieben, wohl aber ist dieselbe eine verbesserte und nicht unbedeutend vermehrte zu nennen, und die berühmte Verlagshandlung hat durch etwas kleineren Druck und schwächeres Papier es möglich gemacht, die früheren zwei Bände in einen aus zwei Abtheilungen bestehenden Band zu vereinigen und den Preis zu vermindern, ohne der Eleganz der Ausstattung im Geringsten Eintrag zu thun. Die Vermehrungen betreffen vorzüglich die Instrumentenlehre, in welcher — um zehn Paragraphen und dreissig Abbildungen vermehrt — alles Neuere von einiger Bedeutung nachgetragen worden ist. Die theoretischen Entwickelungen sind, so viel als irgend thunlich, verkürzt und vereinfacht worden, um das Buch seiner praktischen Bestimmung immer näher zu bringen. Die meisten Veränderungen sind der Lehre von dem barometrischen Höhenmessen zu Theil geworden, wozu dem Herrn Verfasser seine eigenen, diesem Gegenstande gewidmeten, in einer nachher von uns für sich zu besprechenden besonderen Schrift niedergelegten neueren Untersuchungen die natürliche Veranlassung gaben. Auch in der Markscheidekunst ist insbesondere von den neueren Erfindungen in der Instrumentenlehre Nachricht gegeben worden, ohne dieses Kapitel selbst wesentlich zu verändern, wozu uns in der That auch keine besonder Veranlassung vorzuliegen schien. Besonders danken wir es noch dem Herrn Verfasser, dass er in der Vorrede zu dieser zweiten Auflage dem Gebrauche des Messtisches mit der Kippregel, wenn dieselbe namentlich zur Distanzmessung eingerichtet ist, nachdrücklich das Wort geredet, und zugleich einen nach seiner Angabe in dem berühmten Ertel'schen Institute angefertigten neuen, wie es uns scheint, sehr zweckentsprechenden Messtischapparat beschrieben hat. Auch wir können die Abneigung nicht begreifen, welche die praktischen Geometer vielfach

gegen dieses, nach unserer Ueberzeugung wahrhaft wissenschaftliche Instrument haben, welches in der ihm zugewiesenen Sphäre niemals durch ein anderes zu ersetzen sein wird. Dem Gelderwerbe mag freilich die auch bei schlechterem Wetter zu gebrauchende Boussole, welche zugleich das Auftragen zu Hause in der Stube gestattet, wohl förderlich sein, gewiss aber nicht der Genauigkeit, besonders bei der Art und Weise, wie dieses Instrument, dessen auf gewisse Gränzen zu beschränkenden Werth wir übrigens keineswegs verkennen, gewöhnlich gebraucht wird. Wir sind überzeugt, dass dieses schöne Werk auch in seiner neueren Gestalt dazu beitragen wird, eine neue bessere Aera in der Vermessungskunde herbeizuführen, und wünschen dem Herrn Verfasser aufrichtig Glück zu dessen Vollendung. Im Uebrigen verweisen wir auf unsere frühere Anzeige der ersten Auflage.

Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre von Dr. Carl Maximilian Bauernfeind. Mit 79 Tabellen, darunter 6 zur Höhenberechnung, und einer Steinzeichnung. München, J. G. Cotta'sche Buchhandlung. 1862. 8°.

Die Veranlassung zu diesen Untersuchungen fand der Herr Verfasser zunächst in der ausserordentlich grossen Verschiedenheit der Meinungen über den Werth und die Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen. Eine zweite Aufforderung dazu fand er in dem Umstande, dass man die Aenderungen der Temperatur und der Feuchtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe zu wenig kennt, und deshalb bei der Entwickelung der Barometerformel gezwungen ist, Hypothesen über diese Aenderungen zu machen. Besondere mit den Barometerbeobachtungen verbundene Versuche sollten, wenn nicht die Gesetze der Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen selbst, doch den Grad der Zulässigkeit der darüber aufgestellten Hypothesen erkennen lassen. Eine dritte Veranlassung zu diesen Untersuchungen war die Ueberzeugung, dass die barometrische Constante in Folge der neueren Bestimmungen über die Dichtigkeit und Ausdehnung der Luft und des Quecksilbers einer Aenderung bedarf, und der Wunsch, Einiges zu deren Feststellung beizutragen. Endlich hoffte der Herr Verfasser, eine hinreichend grosse Reihe von Beobachtungen würde einige Anhaltspunkte liefern zur Beurtheilung der von G. S. Ohm im Jahre 1854 aufgestellten Ansicht, dass die auf das Barometer drückende Luftsäule nicht das Gewicht eines Cylinders, sondern

eines vertikal stehenden Kegels habe, dessen Spitze im Erdmittelpunkte liegt.

Zu einer Entscheidung über alle diese Fragen glaubte der Herr Verfasser auf folgende Art zu gelangen.

Es soll einer der höchsten, leicht zugänglichen Berge des bayerischen Hochgebirges, etwa der Miesing oder der Wendelstein, von der Thalsohle bis zum Scheitel zweimal auf's Genaueste nivellirt, und seine Höhe in vier nahezu gleiche Theile getheilt werden. An den hierdurch sich ergebenden fünf Theilungspunkten sollen überall Thermometer und Psychrometer, an dem ersten, dritten und fünften aber ausserdem Barometer und Windfahnen aufgestellt, und diese Instrumente von zehn der tüchtigsten Zuhörer des Herrn Verfassers mindestens acht Tage lang Vor- und Nachmittags in kurzen Zwischenräumen gleichzeitig beobachtet werden. Nach Vollendung dieser Beobachtungen soll noch durch ein besonderes Nivellement der Höhenunterschied zwischen der ersten Beobachtungsstation und dem nächst gelegenen Eisenbahnhofe ermittelt werden, um die Meereshöhen der einzelnen Stationen aus directen Eisenbahnnivellements, welche einerseits bis an die Nordsee und andererseits bis an das adriatische Meer reichen, ableiten und mit den durch barometrische Messungen gefundenen Höhen vergleichen zu können.

Man muss gestehen, dass man aus dieser ganzen Schrift die Ueberzeugung gewinnt, dass der Herr Verfasser sich der Ausführung dieses wohl durchdachten Planes, und späterhin der nöthigen vielen Rechnungen, mit dem grössten Eifer und Fleisse, der grössten Ausdauer und grosser Sachkenntniss gewidmet hat. Die gewonnenen, jedenfalls Vertrauen verdienenden Resultate sind am Ende in 15 Nummern zusammengestellt worden, können aber hier der Beschränktheit des Raums wegen nicht vollständig mitgetheilt werden. Jedoch wollen wir nachstehend bemerken, was in Nr. 6. und Nr. 7. über den barometrischen Coefficienten gesagt wird:

„6. Es ist ungenau, bei barometrischen Höhenmessungen den Druck des Wasserdampfes der atmosphärischen Luft nur nach einem mittleren Werthe (indem man die Constante von 18316^m auf 18336^m erhöht) in Rechnung zu bringen und deshalb vorzuziehen, denselben mit Psychrometern an den beiden Stationen wirklich zu messen und das Mittel beider Beobachtungsresultate als mittleren Dampfdruck der Luftschichten in die Barometerformel einzusetzen."

„7. Den neueren Bestimmungen des Verhältnisses der Dich-

tigkeiten von Luft und Quecksilber, so wie des Ausdehnungscoefficienten der Luft gemäss, muss die barometrische Constante von 18316^m auf 18405^m erhöht werden. Eine nothwendige Folge hievon ist die Berechnung neuer hypsometrischer Tafeln."

Bei seinen neuen hypsometrischen Tafeln (S. 37 — S. 42) hat der Herr Verfasser mit Recht die Tafeln von **Gauss** zum Muster genommen, aber drei neue Tafeln beigefügt, welche zur Berechnung des durch die Psychrometer-Beobachtungen eingeführten Factors dienen.

Nach dem Obigen müssen wir dieser Schrift aus Ueberzeugung besondere Wichtigkeit für die Theorie des barometrischen Höhenmessens beilegen, und wünschen derselben daher die sorgfältigste Beachtung. G.

Mechanik.

Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. Memoria di Domenico Chelini, Professore di Meccanica razionale nell' università di Bologna. (Estratta dalla Serie II. Vol. I. delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna). Bologna. Tipografia Gamberini e Parmeggiani. 1862. 4⁰.

Die geometrische Bewegungslehre, die nicht selten mit dem Namen **Kinematik** belegt wird, ist, auf dem auch hier von **Euler** gelegten Grunde weiter bauend, in neuerer Zeit von **Chasles**, **Poinsot**, **Gaetano Giorgini**, **Olinde Rodrigues**, **Möbius** und Anderen mit vielen merkwürdigen Sätzen bereichert worden. Aber alle diese Sätze, in vielen Schriften zerstreut, standen bis jetzt ziemlich isolirt da, und waren auch nicht selten ganz ohne Beweis aufgestellt worden, so dass es mit mancherlei Schwierigkeiten verknüpft war, wenn man sich von denselben eine möglichst vollständige Kenntniss verschaffen wollte. Herr **Chelini** hat nun in der vorliegenden Schrift eine systematische Entwickelung dieser Sätze, so weit wir sehen können, in grosser Vollständigkeit geliefert, mehrere derselben mit eigenen scharfsinnigen, zum Theil ziemlich einfachen Beweisen versehen, und ist auch zu eigenen Resultaten gelangt. Wir halten dies aus den oben angegebenen Gründen für sehr dankenswerth, und würden eine deutsche Uebersetzung dieser ausgezeichneten Schrift für eine Bereicherung

unserer mathematischen Literatur halten. Nachdem zuerst die allgemeinen Begriffe festgestellt und einige Fundamentalsätze bewiesen worden sind, theilt der Herr Verfasser seine Schrift in einen geometrischen und einen analytischen Theil, über die er sich in der voraufgeschickten kurzen Einleitung selbst auf folgende Art ausspricht*): „Nella parte geometrica, le leggi de' moti successivi, tanto di traslazione quanto di rotazione, ho procurato che divengano chiare e visibili al lume di un solo principio, ed inoltre le ho rese alquanto più complete in alcuni punti, per es. in ciò che riguarda i rapporti di equivalenza tra un moto elicoidale ed un sistema di due rotazioni successive intorno ad assi non situati in un medesimo plano. Nella parte analitica, valendomi del principio della retta e dell' area risultante, offro nuove ed assai facili dimostrazioni delle formole di Eulero, di Monge**), di Olindo Rodrigues; stabilisco le relazioni fondamentali di omografia e di polarità, che nascono dal considerare la coesistenza di due figure uguali in luoghi diversi; infine applico le formole di Eulero a vincolare tra loro i punti omologhi delle figure direttamente ed inversamente simili, e poste come si voglia nello spazio le une rispetto alle altre.“ Die Wichtigkeit, welche wir der Schrift beimessen, wird die folgende ausführlichere Inhaltsangabe rechtfertigen: Preliminari. De' moti di traslazione e di rotazione. — **Parte geometrica.** Leggi per gli spostamenti successivi di una figura. 1. Degli spostamenti di una figura piana nel suo piano. 2. Leggi per la composizione delle rotazioni successive in un piano. 3. Degli spostamenti di una figura nello spazio. 4. Proprietà de' punti, delle rette e de' piani che in due figure uguali si corrispondono a due a due. 5. Legge per la composizione delle rotazioni successive intorno ad assi della medesima origine. 6. Leggi e condizioni di equivalenza tra un moto elicoidale ed un sistema di due rotazioni successive. — **Parte analitica.** Moti geometrici riferiti ad assi coordinati. 1. Relazioni tra due assi paralleli di rotazione, de' quali sia data la traslazione relativa.

---

*) Wir bedienen uns der eigenen Worte des Herrn Verfassers, um jedem Missverständnisse vorzubeugen.

**) Der Herausgeber des Archivs erlaubt sich, bei dieser Gelegenheit auf den eigenthümlichen Beweis, welchen er von den Euler'schen Formeln und den daraus leicht abzuleitenden Formeln von Monge in den Supplementen zu dem mathematischen Wörterbuche. Erste Abtheilung. Art. Coordinaten. Nr. 19 und 20 (S. 474 ff.) und in dem Crelle'schen Journal. Thl. VIII. gegeben hat, hinzuweisen.

2. Formole rappresentanti il traslocamento prodotto da una rotazione e traslazione. Formole speciali per la trasformazione delle coordinate. 3. Formole rappresentanti il traslocamento prodotto da tre rotazioni successive intorno ad assi rettangolari. 4. Formole di relazione tra i punti corrispondenti di due figure coincidibili e la figura media. 5. Formole relative alle rotazione intorno all' asse centrale preso per asse delle z. 6. Formole di relazione tra un moto elicoidale ed un sistema di due rotazioni conjugate. Figure polari. 7. Formole risguardanti la similitudine delle figure, sia dirette, sia inversa. — Nota I. Applicazione delle formole di rotazione alla ricerca dell' asse e del centro di equilibrio. Nota II. Del centro istantaneo delle accelerazioni nel moto di una figura di forma invariabile.

Möchte unser schon ausgesprochener Wunsch einer Uebersetzung dieser Schrift recht bald erfüllt werden.

Wir haben diesen Artikel unter die Rubrik Mechanik gestellt, hätten ihn aber natürlich mit demselben Rechte auch der Geometrie zuweisen können. G.

Nautik.

Almanach der österreichischen Kriegsmarine für das Jahr 1863. Mit Genehmigung des hohen Marine-Obercommando's herausgegeben von der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Zweiter Jahrgang. Wien. Gerold. 8⁰.

Der erste Jahrgang dieses in vieler Beziehung sehr interessanten und verdienstlichen Almanachs ist im Literar. Ber. Nr. CXLVIII. S. 10. von uns angezeigt worden. Die Einrichtung ist in dem vorliegenden zweiten Jahrgange im Wesentlichen ganz unverändert geblieben, namentlich hat die Einrichtung der Ephemeride keine Veränderung erlitten, so dass wir uns also in dieser Rücksicht auf die Anzeige des ersten Jahrgangs beziehen können. Einige interessante Aufsätze sind wieder beigegeben. Der erste liefert Notizen über die in den letzten Jahren in Sr. M. Kriegsmarine eingeführten sanitären Massregeln. Von Dr. Stefan v. Patay, Obersten Marine-Arzt, und zeigt deutlich, wie viel Sorgfalt in der österreichischen Kriegs-Marine der Erhaltung eines guten Gesundheitszustandes auf den Schiffen in jeder Beziehung gewidmet wird, namentlich auch die höchst

sorgfältige und rücksichtsvolle Behandlung der Verwundeten oder sonst Beschädigten, für die höchst zweckmässig construirte zerlegbare Tragbahren eingeführt sind. Auch die S. 28. mitgetheilten beiden Tabellen über die Verpflegung der gesunden Schiffsmannschaft unter Segel und im Hafen sind für Jeden, der an der Entwickelung des deutschen Seewesens regen Antheil nimmt, sehr interessant und liefern den deutlichen Beweis, wie ausgezeichnet diese Verpflegung sein muss. In zweckmässiger Abwechselung wird zum Frühstück Zwieback (im Hafen auch frisches Brod), Käse, Kakao, Zucker, Sardellen, Essig, Rum, Oel; zum Mittagsmahl Zwieback (im Hafen auch frisches Brod), Pöckel- und Schweinefleisch (im Hafen auch frisches Rindfleisch), Reis, Erbsen, Mehlspeise, Hülsenfrüchte, Essig, Salz und täglich Wein; zum Nachtmahl Zwieback (im Hafen auch frisches Brod) und Rum geliefert, Alles in hinreichendem Maasse. — Der zweite Aufsatz hat die Ueberschrift: Ueber die Bestimmung der Entfernungen auf der See. Von Dr. F. Schaub. Durch die Einführung von Geschützen, welche mit einer grossen Tragweite eine grosse Präcision des Treffens verbinden, hat die Bestimmung der Distanz eines entfernten Objects auf der See eine erhöhete Wichtigkeit bekommen. General Sir Howard Douglas sagt darüber in seinem berühmten Werke „On Naval Gunnery (fifth edition, London 1860)“: „Wenn zwei Schiffe einander auf grosse Entfernung gegenüberstehen, wird die Wirkung der Geschütze fast gänzlich von der Geschicklichkeit der Kanoniere abhängen; und dasjenige Schiff, welches die Entfernung von seinem Gegner am richtigsten geschätzt hat, wird unter übrigens gleichen Umständen den grössten Schaden anrichten.“ Man sieht hieraus, wie wichtig auch für die Nautik die Construction eines recht zweckmässigen Distanzmessers sein würde, die immer noch zu den noch nicht vollkommen gelösten Problemen und frommen Wünschen gehört. Die von General Douglas gegebene Lösung unterscheidet von der gewöhnlichen sich gar nicht, indem er gewissermassen den Mast des feindlichen Schiffs als Distanzlatte benutzt, und dabei die aus amtlichen Quellen geschöpften Höhen des Grossmastes verschiedener Gattungen französischer Kriegsschiffe zu Grunde legt, mit denen in den meisten Fällen die Masthöhen der amerikanischen Schiffe übereinstimmen sollen, wofür er auch Tafeln berechnet hat. Da nun aber bei verschiedenen Seemächten, und sogar öfter einer und derselben Seemacht die Höhe der Bemastung von Kriegsschiffen ziemlich verschieden ist, so müssen bei der obigen Voraussetzung Fehler entstehen, die, wie man aus den betreffenden, sehr leicht zu entwickelnden Formeln sogleich übersieht, unter Umständen

sehr gross werden können*). In sinnreicher Weise hat deshalb Herr Schaub die Methode der Messung gewissermassen umgekehrt, indem er derselben eine auf dem eigenen Schiffe mit beliebiger Genauigkeit gemessene Höhe als Basis zu Grunde legt. Die zur Berechnung der Entfernung nach dieser Methode erforderlichen Formeln hat Herr Schaub mit Rücksicht auf Kimmtiefe und Refraction mit grosser Sorgfalt und Schärfe entwickelt, und zur Erleichterung der Rechnung drei ziemlich ausgedehnte, sorgfältig berechnete Tafeln beigefügt. Da aber hiebei Alles auf ein Instrument zur möglichst genauen Bestimmung sehr kleiner Winkel ankommt, so hat Herr Schaub seine Aufmerksamkeit namentlich auch auf die Construction eines solchen, hier beschriebenen Instruments in sehr verdienstlicher Weise gerichtet, wobei die Objectiv-Mikrometer von S. Plössl in Wien sehr zweckmässige Verwendung gefunden haben. Ausser dieser Methode sind noch andere Methoden der Distanzmessung angegegeben worden, wo von der einen gesagt wird, dass Herr Schiffsfähnrich Engelmann mittelst derselben zu sehr befriedigenden Resultaten gelangt sei. Man wird hieraus leicht die Wichtigkeit dieses Aufsatzes erkennen, und muss derselbe zu sorgfältigster Beachtung empfohlen werden. — Professor Ehrenberg's Passatstaub. Von Contre-Admiral Bernhard Freiherrn von Wüllerstorf, ist die Ueberschrift des dritten Aufsatzes, welcher höchst interessante Mittheilungen über den vorzüglich häufig in dem west-afrikanischen Dunkelmeere fallenden, mit besonderer Sorgfalt von Ehrenberg untersuchten röthlichen Staub enthält. In höchst verdienstlicher Weise fordert nun Herr v. Wüllerstorf seine jüngeren Cameraden in der österreichschen Marine zu sorgfältigen Beobachtungen über solche Staubfälle auf, und bezeichnet auf S. 89 und S. 90 in bestimmter Weise den dabei einzuschlagenden Weg und die Punkte, auf die es vorzüglich ankommt. Auch dieser Aufsatz muss zu allgemeinster Beachtung nicht bloss der Seeleute, sondern namentlich auch der Naturforscher empfohlen werden. — Die Genealogie des hohen regierenden Keiserhauses Oesterreich und der Personalstand der k. k. Kriegsmarine (October 1862) ist auch diesmal

*) Bei einer Distanz von 1500 Klaftern und einer geschätzten Höhe von 30 Klaftern erzeugt ein Fehler von 1 Klafter in der Höhe schon einen Fehler von 50 Klaftern in der Distanz. Die Formel zur Bestimmung des Fehlers ist

$$\Delta D = \Delta a \cdot \frac{D}{a},$$

wo a die Höhe, D die Distanz ist.

mit dankenswerther Vollständigkeit und Ausführlichkeit mitgetheilt worden. Endlich ist das im vorigen Jahrgange mitgetheilte so sehr verdienstliche Verzeichniss der Leuchtthürme im mittelländischen, schwarzen und azowschen Meere durch die bis Ende September 1862 eingelaufenen neueren Nachrichten vervollständigt worden.

Wir wünschen diesem interessanten Almanach, für dessen Herausgabe die ihre Aufgabe in jeder Weise so trefflich lösende hydrographische Anstalt der k. k. Marine den grössten Dank verdient, im Interesse des gesammten Seewesens den ungestörtesten und ununterbrochensten Fortgang. G.

Nautische Hülfstafeln nebst Erläuterungen über deren Berechnung und Gebrauch. Bearbeitet von W. v. Freeden, Rector der Grossherzogl. Oldenburgischen Navigationsschule und T. Köster, zweitem Lehrer derselben. Mit einer Erdkarte. Oldenburg. Schulze'sche Buchhandlung. 1862. 8°.

Wir haben an diesen neuen nautischen Tafeln nichts bemerkt, was sie vor anderen Tafeln besonders auszeichnete, und halten daher auch eine ausführliche Angabe des Inhalts für überflüssig. Die Anzahl der Tafeln ist 48. Die letzte Tafel liefert auf 96 Seiten ein, wie es scheint, sehr vollständiges und verdienstliches Verzeichniss der „Breite, Länge, Fluthhöhe und Missweisung der wichtigsten Küstenpunkte, Seestädte, Leuchtfeuer, Inseln und Untiefen.“ Ganz richtig bemerken übrigens die Herren Verfasser in der Vorrede, dass die ziemlich allgemein übliche Verbindung der Tafeln mit den Handbüchern der Schifffahrtskunde oder Steuermannskunst für den praktischen Gebrauch sehr unbequem, und dass es daher wünschenswerth ist, eine solche für sich bestehende Sammlung von Hülfstafeln zu haben, wie sie in dem vorliegenden Buche geliefert worden ist. Insofern ist diese Ausgabe abgesonderter nautischer Tafeln immerhin verdienstlich, da auch die Verlagshandlung rücksichtlich des Papiers und Drucks für zweckentsprechende Ausstattung Sorge getragen hat.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CL. S. 10).

Band XLIV. Heft V. December 1861. Haidinger: Das Meteor von Quenggouk in Pegu, und die Ergebnisse des Falles daselbst am 27. December 1857. (Mit 1 Tafel). S. 637. — Friesach: Geographische und magnetische Beobachtungen in der westlichen Hemisphäre, angestellt in den Jahren 1859, 1860, 1861. S. 643. — Fritsch: Thermische Constanten für die Blüthe und Fruchtreife von 889 Pflanzenarten, abgeleitet aus zehnjährigen Beobachtungen im k. k. botanischen Garten zu Wien. S. 711. — Referat der von der kais. Akademie der Wissenschaften zusammengesetzten Commission bezüglich des zu errichtenden Ressel-Monumentes. S. 721. (In Triest bildete sich am 22. December 1857 ein Comité für Errichtung eines Monuments zu Ehren Jos. Ressel's, des angeblichen Erfinders der Schiffsschraube. Der Gemeinderath in Triest beschloss, dem Comité zur Errichtung des Monuments einen öffentlichen Platz in Triest zur Verfügung stellen zu wollen, unter der Bedingung, dass die k. Akademie der Wissenschaften in Wien vorerst den Nachweis für Ressel's Priorität in der Anwendung der Schraube auf die Dampfschiffe liefere. Die Akademie ernannte eine aus den Herren A. Ritt. v. Burg, A. Ritt. v. Ettingshausen, Karl v. Littrow bestehende Commission, welche den vorliegenden, in vielen Beziehungen sehr interessanten Bericht erstattete. Das Resultat dieses Berichts ist: „Die Commission glaubt die Verdienste Ressel's um die Erfindung und Einführung der Schraube als Schiffspropeller dahin richtig stellen zu können, dass ihm die Priorität dieser Erfindung im eigentlichen Sinne des Worts eben so wenig, als dem Franzosen Sauvage und dem Engländer Smith, so wie überhaupt, so viel bekannt ist, irgend einem einzelnen Manne allein zugeschrieben werden könne, dass aber Ressel durch seine Bemühungen und praktischen Versuche zur Einführung der Schiffs-Schraube wesentlich beigetragen habe und seine Verdienste um diesen Fortschritt eine gleiche Anerkennung verdienen dürften, wie solche den mehr erwähnten Männern Sauvage, Smith und Ericsson von ihren Mitbürgern bereits zu Theil wurde." — „Hiernach sei auch die für das Monument vorgeschlagene Inschrift: „Josepho Ressel, Patria Austriaco Natione Bohemo, Qui Omnium Prior Rotam Cochlidem Pyroscaphis Propellendis Adplicuit Anno 1827", durch eine der Wahrheit mehr entsprechende zu ersetzen).

Band XLV. Heft I. Jänner 1862. Weiss, Edm.: Ueber die Bahn von (59) Elpis. S. 55. — Lippich: Ueber die transversalen Schwingungen belasteter Stäbe. S. 91. — v. Lang: Orientirung der optischen Elasticitätsaxen in den Krystallen des rhombischen Systems. III. Reihe. S. 103. — Weiss, Edm.: Berech-

nung der totalen Sonnenfinsterniss am 31. December 1861. (Mit 1 Karte). S. 124.

Band XLV. Heft II. Februar 1862. v. Littrow: Ein merkwürdiger Regenbogen. S. 153. — Wertheim: Ueber eine am zusammengesetzten Mikroskope angebrachte Vorrichtung zum Zwecke der Messung in der Tieferichtung und eine hierauf gegründete neue Methode der Krystallbestimmung. S. 157. — Knochenhauer: Ueber den Gebrauch des Luftthermometers. (Dritte Abtheilung). S. 229. — Unferdinger: Ueber die einhüllende Curve, welche eine constante Länge zwischen zwei sich schneidenden Geraden beschreibt. S. 251. — v. Burg: Ueber die Wirksamkeit der Sicherheitsventile bei Dampfkesseln. — (Mit 3 Tafeln). S. 285.

Antikritik.

So eben kommt mir das 6. Heft der Schlömilch'schen Zeitschrift zur Hand, in dem meine Differential- und Integralrechnung besprochen ist. Mit seinen bekannten Kraftausdrücken nennt sie Herr Schlömilch „ein wüstes Durcheinander analytischer Lehren", weil ich nicht gleich die Differentialrechnung zuerst fertig gemacht habe und dann darauf die Integralrechnung. So wäre auch Poissons Mechanik „ein wüstes Durcheinander", weil er zuerst ein Stück Statik, dann Dynamik, dann wieder Statik u. s. w. behandelt! Unter dem Abschnitte: Taylor'scher Satz finden sich doch wohl nur Dinge, zu denen man die Reihenentwicklung mittelst dieses Satzes braucht und das — mit Erlaubniss des Herrn S. — war die Absicht des Verfassers. Es fehlt nur noch, dass er mir vorwirft, ich kenne die Formeln zur Bestimmung der Tangenten u. s. w. nicht, weil sie im Buche „reinweg vergessen" sind. Herr S. scheint nicht bemerkt zu haben, dass, wie in der ersten, so auch in der zweiten Auflage die Anwendungen auf analytische Geometrie gar nicht gegeben werden sollten. (Erinnert sich Herr S. dabei seiner eigenen Aussprüche, deren Unrichtigkeit ich ihm seiner Zeit nachgewiesen?).

Der „Anhang" ist bei mir überschrieben: Uebungen und Zusätze; als solche dürfte er so ganz verfehlt nicht sein, trotz der Meinung des Herrn S., dem ich überlassen muss, in seinem Werke den „Jüngern der Wissenschaft" ein besseres Licht darzubieten.

„Deutlich", meint der wohlwollende und einsichtsvolle Re-

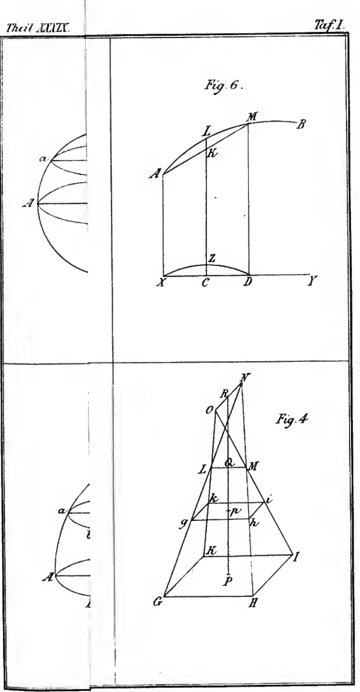
zensent, sei ich allerdings, nur begehe ich die Sünde, Zylinder und nicht auch Differenzial zu schreiben! Die grosse Unbequemlichkeit meines Buches hat S. durch meine eigeue Sorgfalt entdeckt, denn er schreibt mir ganz einfach meine Hinweisung auf die Stellen, in denen seine geliebte Theorie der Konvergenz vorkommt, ab: Ein „deutlich" geschriebenes Buch, in dem nicht Alles hübsch bei einander steht, wie es Herr S. gewohnt ist, zu sehen, ist desshalb nutzlos!

Was den Vorwurf der Unrichtigkeit meiner Darstellung der Restuntersuchung des Taylor'schen Satzes betrifft, so hat S. das eben nicht verstanden. Ich habe nicht zu beweisen, dass die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{h^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} f^{n+1}(x+\Theta h)$ ist, konvergent ist, sondern dass $\frac{h^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} f^{n+1}(x+\Theta h)$ zu Null wird mit unendlichem n! Da darf man sicher Θ wie unveränderlich behandeln, da es höchstens auf dessen Grenzwerth ankommt. Wenn ich mich an ein schlechtes Beispiel hätte halten wollen, wie mir Herr S. freundschaftlichst räth, so hätte ich seine eigene Darstellung gewählt!

Der dritte Band kommt glimpflicher weg. Rührt dies etwa daher, dass sein eignes Werk in diesem Punkte keineswegs „deutlich" ist, und ich seiner Zeit in den „Heidelberger Jahrbüchern" darüber sagen musste, dass es scheine, der Verfasser sei sich selber nicht klar über die Behandlung der partiellen Differentialgleichungen?

Herr S. hat bekanntlich eine grosse Fertigkeit im Absprechen; dass er Anlage zur Kunst habe, will ich ihm gerne glauben, ja ich glaube ihm sogar, dass sein eigenes Werk über Differentialrechnung (natürlich meine ich das bei Vieweg erschienene und nicht das bei Otte angefangene) besser sei, als das meine, und muss nur die Säumigkeit der Käufer bedauern, die trotz des „Ausverkaufs" zu herabgesetztem Preise die erste Auflage von 1853 bis 1862 als das einzig vollendete Werk S. dastehen liessen. Und so, mein Herr Rezensent, wollen wir die Oeffentlichkeit wieder entscheiden lassen, und wenn mir ihre, meines Wissens noch nicht fertige zweite Auflage zu Gesicht kommt, wird es mich freuen, wenn ich aus ihr Belehrung schöpfen kann, die ich selbst von Ihnen, trotz Ihrer Rezension, gerne annehmen werde.

Karlsruhe, 5. Dezember 1862. Dr. J. Dienger.


Fig. 6.
L
M
B
K
A
Z
X
C
D
Y
a
A
Fig. 4
N
R
O
L
Q
M
k
i
p
g
h
K
I
P
G
H
a
A

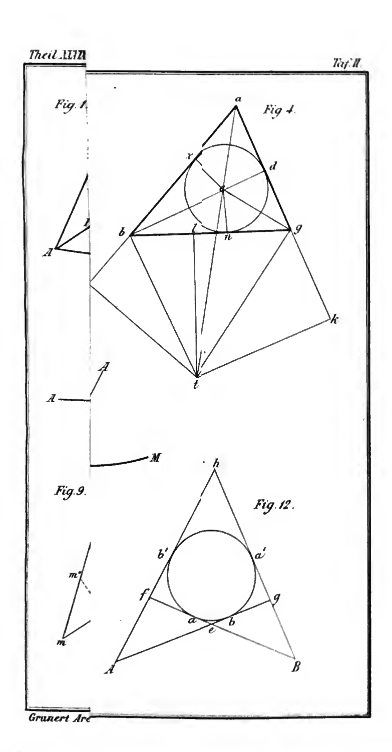
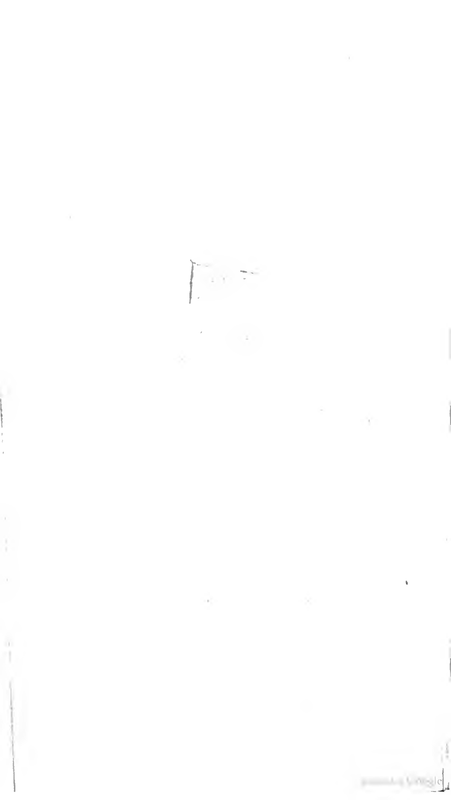
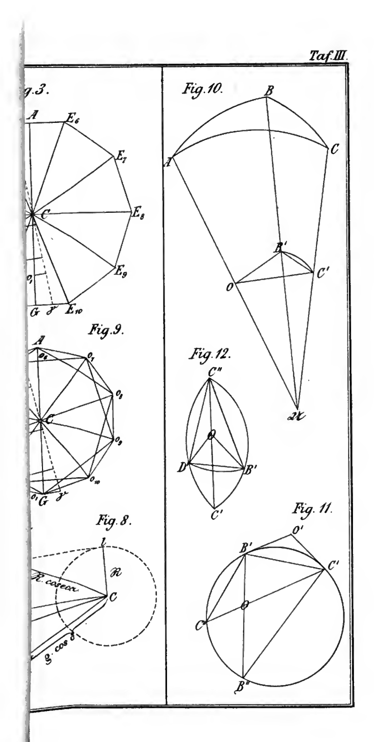
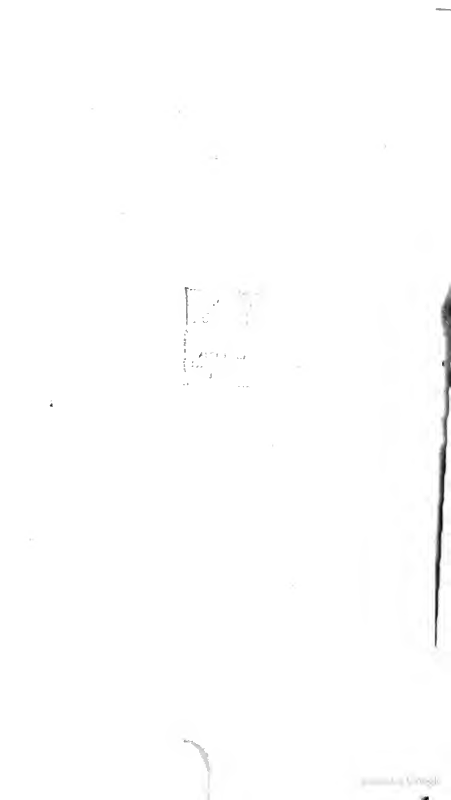
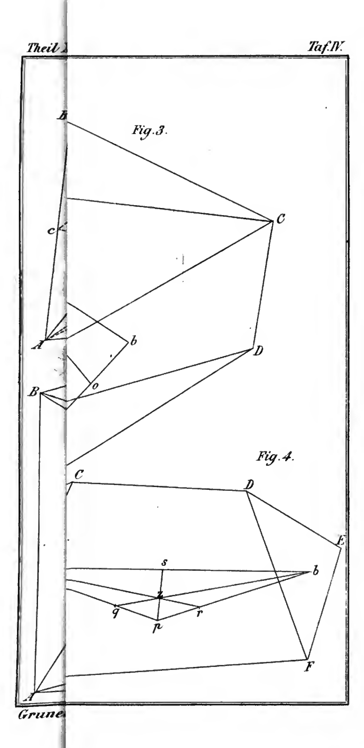


Fig. 1.
Fig 4.
a
x
d
b
l
n
g
k
t
A
A
A
M
Fig. 9.
m'
m
h
Fig. 12.
b'
a'
f
g
a
b
e
A
B

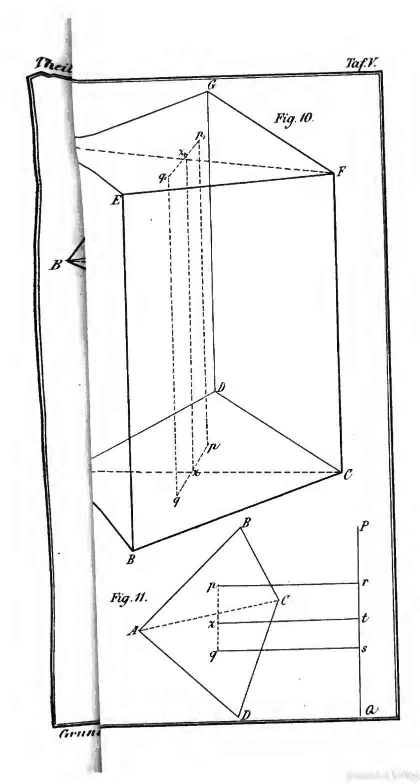



Fig. 3.
A
E_6
E_7
C
E_8
E_9
o_1
G
γ
E_{10}
Fig. 9.
A
o_6
o_7
o_8
C
o_9
o_{10}
o_1
G
γ
Fig. 8.
l
$\mathfrak{R}$
$\mathfrak{R}$. cosec x
C
g. cos δ
Fig. 10.
B
A
C
B'
C'
O
2k
Fig. 12.
C''
O
D
B'
C'
Fig. 11.
O'
B'
C'
O
C''
B''




Fig. 3.
B
C
c
A
b
D
o
B
Fig. 4.
C
D
E
s
b
z
q
r
p
F
A




Theil
Taf. V.
Fig. 10.
G
p_1
x_1
q_1
F
E
B
D
p
x
C
q
B
Fig. 11.
B
P
p
r
C
A
x
t
q
s
D
a
Grun

6

